FAOUZI RASSI

ÉVALUATION, RELATION RISQUE-RENDEMENT et produits dérivés

Presses de l'Université du Québec

ÉVALUATION,
RELATION RISQUE-RENDEMENT
et produits dérivés

Membre de L'ASSOCIATION NATIONALE DES ÉDITEURS DE LIVRES

Presses de l'Université du Québec
Le Delta I, 2875, boulevard Laurier, bureau 450, Québec (Québec) G1V 2M2
Téléphone: 418 657-4399 *Télécopieur*: 418 657-2096
Courriel: puq@puq.ca *Internet*: www.puq.ca

Diffusion / Distribution:

Canada Prologue inc., 1650, boulevard Lionel-Bertrand, Boisbriand (Québec) J7H 1N7
Tél.: 450 434-0306 / 1 800 363-2864

France AFPU-D – Association française des Presses d'université
Sodis, 128, avenue du Maréchal de Lattre de Tassigny, 77 403 Lagny, France – Tél.: 01 60 07 82 99

Belgique Patrimoine SPRL, avenue Milcamps 119, 1030 Bruxelles, Belgique – Tél.: 02 7366847

Suisse Servidis SA, Chemin des Chalets 7, 1279 Chavannes-de-Bogis, Suisse – Tél.: 022 960.95.32

FAOUZI RASSI

ÉVALUATION, RELATION RISQUE-RENDEMENT et produits dérivés

Presses de l'Université du Québec

Catalogage avant publication de Bibliothèque
et Archives nationales du Québec et Bibliothèque et Archives Canada

Rassi, Faouzi F., 1936-

Évaluation, relation risque-rendement et produits dérivés

ISBN 978-2-7605-3831-3

1. Gestion du risque. 2. Rapport risque-rendement. 3. Actifs financiers – Évaluation. 4. Entreprises – Finances. I. Titre.

HD61.R372 2013 658.15'5 C2013-941071-6

Les Presses de l'Université du Québec
reconnaissent l'aide financière du gouvernement du Canada
par l'entremise du Fonds du livre du Canada
et du Conseil des Arts du Canada pour leurs activités d'édition.

Elles remercient également la Société de développement
des entreprises culturelles (SODEC) pour son soutien financier.

Conception graphique
Richard Hodgson

Image de couverture
Saint-Éloy, orfèvre dans son atelier, (détail)
Petrus Christus (1410-1475)
1449, huile sur bois, 100,1 cm × 85,8 cm,
Metropolitan Museum of Art, New York, États-Unis

Mise en pages
Info 1000 mots

Dépôt légal : 3e trimestre 2013
› Bibliothèque et Archives nationales du Québec
› Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada

Table des matières

CHAPITRE

1

Modèles d’évaluation du rendement, du risque et d’un actif

Ce chapitre a pour objet d’analyser les différentes approches d’évaluation d’un actif. Les actifs évalués sont les actions ordinaires, les obligations et les actions privilégiées. Nous verrons que la relation risque-rendement est privilégiée en matière d’évaluation d’un actif financier, que ce soit sur le plan théorique ou dans la pratique des affaires.

Une introduction générale portera sur la notion du taux de rendement, suivie par l’évaluation d’une obligation et par celle d’une action privilégiée. Le taux de rendement d’une action ordinaire est étudié sous trois angles différents :

- l’approche de Gordon,
- le modèle d’évaluation des actifs financiers (MEDAF),
- l’*Arbitrage Pricing Theory* (APT).

1.1. LA NOTION DE TAUX DE RENDEMENT

Le taux de rendement est le résultat obtenu sur l'investissement ou sur tout actif par période et rapporté au montant investi. Le taux de rendement d'une action, par exemple, est l'accroissement exprimé en pourcentage de la richesse qu'elle procure à son détenteur durant une année. Cet accroissement de richesse comprend deux éléments : le dividende encaissé par l'actionnaire et la variation de la valeur de l'action durant cette période. On obtient le taux de rendement d'une action ordinaire en divisant la somme du dividende versé en fin de période et la variation du prix de l'action par son prix au début de cette période d'investissement :

$$r = \frac{(\text{Variation du prix de l'action} + \text{Dividende}) \bullet 100}{\text{Prix en début de période}}$$

Le taux de rendement de l'action comprend :

- le taux de rendement du gain en capital :

$$\frac{\text{Variation du prix de l'action}}{\text{Prix en début de période}} \bullet 100$$

- et le taux de rendement du dividende :

$$\frac{\text{Dividende}}{\text{Prix en début de période}} \bullet 100$$

De façon plus générale :

$$r_{jt} = \frac{\left(P_{jt} - P_{jt-1}\right) + FM_t}{P_{jt-1}}$$

où :

P_{jt} = Prix de l'actif j à la fin de la période t,

P_{jt-1} = Prix de l'actif j au début de la période t,

FM_t = Flux mopnétaire reçu de l'actif j (l'intérêt d'une oblighation ou le dividende d'une action) pour la période t.

La relation suivante exprime le taux de rendement calculé sur une base périodique dans le cas où l'investissement s'étendrait sur plusieurs périodes, c'est-à-dire si l'investisseur garde un titre en portefeuille pour n périodes :

$$r = \frac{\frac{\left(P_{jt} - P_{jt-n}\right)}{n}}{P_{jt-n}} + FM_t$$

Il est utile de faire la distinction entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique des taux de rendement d'un investissement qui s'étend sur plusieurs périodes.

La moyenne arithmétique des taux de rendement observés sur plusieurs périodes est égale à :

$$\bar{r}_a = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} r_t}{n} \tag{1.1}$$

où :

$\bar{r}_a$ = moyenne arithmétique,

r_t = taux de rendement de l'actif pour la période t,

t = 1, 2, 3, …, n,

n = nombre de périodes étudiées ou observées.

La moyenne géométrique des taux de rendement observés sur plusieurs périodes est égale à :

$$\left(1+\bar{r}_g\right)^n = \left(1+r_1\right)\left(1+r_2\right)\ldots\left(1+r_n\right)$$

$$1+\bar{r}_g = \left[\left(1+r_1\right)\left(1+r_2\right)\ldots\left(1+r_n\right)\right]^{1/n}$$

et :

$$\bar{r}_g = \left[\left(1+r_1\right)\left(1+r_2\right)\ldots\left(1+r_n\right)\right]^{1/n} - 1$$

$$\bar{r}_g = \left[\prod_{t=1}^{n}\left(1+r_t\right)\right]^{1/n} - 1 \tag{1.3}$$

On constate que le calcul de la moyenne géométrique des taux de rendement, contrairement à la moyenne arithmétique, tient compte du réinvestissement des flux monétaires et constitue ainsi une mesure plus précise de la rentabilité moyenne de plusieurs périodes.

EXEMPLE

Considérons les prix du titre X aux trois dates suivantes :

Prix au 30 septembre 1996 :	50 $
Prix au 30 septembre 1997 :	80 $
Prix au 30 septembre 1998 :	50 $

On suppose qu'aucun dividende n'a été versé ou distribué aux actionnaires en 1997 et en 1998. On demande de calculer le taux de rendement arithmétique annuel moyen ainsi que le taux de rendement géométrique annuel moyen obtenu par M. Paquet au 30 septembre 1998, sachant qu'il a acquis le titre X le 30 septembre 1996.

■ **SOLUTION :**

Calculons le taux de rendement réalisé par M. Paquet dans chacune des deux années considérées, soit 1996-1997 et 1997-1998, afin d'établir par la suite le taux de rendement arithmétique annuel moyen et le taux de rendement géométrique annuel moyen :

$$r_{96\text{-}97} = \frac{80\$ - 50\$}{50\$} = 0{,}60 = 60\,\%$$

$$r_{97\text{-}98} = \frac{50\$ - 80\$}{80\$} = -0{,}375 = -37{,}5\,\%$$

Le taux de rendement arithmétique annuel moyen est de :

$$\overline{r}_a = \frac{60 + (-37{,}5)}{2} = \frac{22{,}5}{2} = 11{,}25\,\%$$

Le taux de rendement géométrique annuel moyen est de :

$$\overline{r}_g = \left[(1 + 0{,}60)(1 - 0{,}375)\right]^{1/2} - 1 = (1)^{1/2} - 1 = 0\,\%$$

■ **Remarques :**

a) La moyenne arithmétique peut induire en erreur puisqu'elle indique un taux de rendement annuel moyen de 11,25 %, alors qu'au bout de la période de deux ans considérée, le prix de l'action X est finalement inchangé par rapport au début de cette période.

b) La moyenne arithmétique est utilisée pour l'estimation du rendement espéré d'un titre à l'aide de données historiques et pour la mesure de son risque par le calcul de la variance ou de l'écart type autour du taux de rendement espéré. Soixante périodes de rendement d'un titre sont habituellement nécessaires pour le calcul des paramètres de taux de rendement espéré et d'écart type d'une distribution de probabilités de ces taux de rendement.

c) La moyenne géométrique est une mesure de performance plus adéquate, car plus correcte et plus pertinente que la moyenne arithmétique.

d) D'une matière générale,

$$\bar{r}_a > \bar{r}_g$$

Plus la variabilité des taux de rendement est grande, d'une période à l'autre, plus l'écart entre $\bar{r}_a$ et $\bar{r}_g$ s'élargit.

Le taux de rendement espéré (une moyenne pondérée) :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(r) &= (r_1)(p_1) + (r_2)(p_2) + \ldots + (r_n)(p_n) \\ &= \sum_{n=1}^{n} (r_k)(p_k) \end{aligned}$$

où :

r_k = Le k^e rendement possible d'une distribution de probabilités de rendement.

P_k = La probabilité de réalisation de la conjoncture économique k (expansion, récession ou stagnation) à laquelle correspond le rendement r_k.

EXEMPLE

L'estimation du taux de rendement espéré (calcul selon une moyenne arithmétique de taux de rendement observés dans le passé) :

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} r_t}{n}$$

Ce calcul ou cette estimation se justifie dans la mesure où l'on a de bonnes raisons de croire que la distribution de probabilités des taux de rendement passés ou réalisés restera inchangée à l'avenir.

1.2. LA DÉTERMINATION DU TAUX DE RENDEMENT À L'ÉCHÉANCE D'UNE OBLIGATION ET DU PRIX

1.2.1. Le taux de rendement d'une obligation

L'obligation est un titre à revenu fixe qui constitue une créance du détenteur par rapport à l'émetteur. Ce dernier est, en général, une entreprise ou un gouvernement. Les flux monétaires de l'obligation se décomposent en intérêts versés de façon périodique, soit semestriellement en Amérique du Nord, soit annuellement, en général, ailleurs dans le monde, et en principal versé ou remboursé à l'échéance. Les montants versés en intérêts sont calculés selon le taux d'intérêt nominal de l'obligation (taux de coupon), appliqué à sa valeur nominale ou faciale. Le prix de l'obligation est en général différent de sa valeur nominale, car le taux d'intérêt du marché est différent du taux d'intérêt nominal fixé initialement lors de l'émission. La valeur marchande de l'obligation devient égale à sa valeur nominale lorsque le taux d'intérêt exigé sur le marché se confond avec le taux d'intérêt nominal. Il s'agit d'un cas particulier, car le taux de rendement du marché est habituellement soit supérieur soit inférieur au taux nominal. Par ailleurs, il existe une relation inverse entre le prix d'une obligation et le taux de rendement du marché. En d'autres termes, si l'obligation A a une valeur nominale de 1 000 $, cinq ans d'échéance et un taux de coupon de 10 %, et que son prix soit de 1 250 $, le taux de rendement exigé par le marché sera inférieur au taux de coupon de 10 %.

Le taux de rendement du marché ou taux de rendement à l'échéance peut être calculé selon la méthode du taux de rendement interne en utilisant éventuellement le procédé de l'interpolation. Le prix d'une obligation, comme celui de tout actif, est égal à la valeur actuelle des flux monétaires qu'elle génère.

On pose la relation suivante dont l'inconnue est le taux de rendement à l'échéance r :

$$1\,250\,\$ = (1000)\left(\frac{10\,\%}{2}\right)(a_{10;r}) + (1\,000\,\$)\,(\mathrm{FVA}_{10;r}) \tag{1.3}$$

où :

$(a_{10;r})$ = facteur de valeur actuelle d'une périodicité (semestrialité) de 10 semestres au taux de rendement r ;

$\mathrm{FVA}_{10;r}$ = facteur de valeur actuelle d'un montant unique perçu dans 10 semestres au taux r.

La solution de cette équation nous donne un taux de rendement à l'échéance $r = 4{,}42\ \%$ sur une base semestrielle. La signification de ce taux, $r = 4{,}42\ \%$, est la suivante :

Tout investisseur qui acquiert aujourd'hui l'obligation en question à 1 250 $ et qui la garde dans son portefeuille cinq ans, c'est-à-dire jusqu'à l'échéance, est assuré d'un taux de rendement semestriel de 4,42 % ou annuel de 8,84 % si les intérêts reçus sont réinvestis semestriellement à ce même taux.

1.2.2. Le prix d'une obligation

Le prix d'une obligation est donc calculé en actualisant les intérêts qu'elle génère ainsi que le principal remboursé à l'échéance. En d'autres termes, sur une base semestrielle, le prix d'une obligation est égal à la valeur actuelle des flux monétaires futurs attendus sur ce titre. Considérons l'obligation A dans le cas où le taux d'intérêt du marché serait de 12 %. Le prix de cette obligation est établi de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\text{Prix} &= (50)\ (a_{10;0,06}) + (1\ 000)\ (\text{FVA}_{10:0,06})\\ &= (50)\ (7{,}36) + (1\ 000)\ (0{,}558\ 39)\\ &= 368 + 558{,}39 = 926{,}39\ \$\end{aligned}$$

On constate qu'avec un taux de rendement à l'échéance de 12 % supérieur au taux nominal de 10 %, le prix de l'obligation de 926,39 $ est inférieur à sa valeur nominale de 1 000 $, tandis que le prix de 1 250 $ correspondait à un taux de rendement à l'échéance de 8,84 % [(4,42 %)(2)] inférieur au taux nominal de 10 %.

1.3. LA DÉTERMINATION DU TAUX DE RENDEMENT D'UNE ACTION ORDINAIRE SELON LE MODÈLE DE GORDON

L'évaluation d'une action ordinaire est plus complexe et plus difficile que celle de l'obligation, ne serait-ce que parce que sa vie s'étend jusqu'à l'infini, tandis que celle de l'obligation est limitée dans le temps, soit en général un maximum de trente ans. Notons que les flux monétaires générés par une obligation détenue jusqu'à l'échéance sont connus, tandis que ceux d'une action ordinaire ne le sont pas, car incertains, et doivent être prévus en fonction de plusieurs facteurs tel que la prévision de la croissance des profits et l'évolution de la situation économique, par exemple.

Si l'entreprise ne prévoit pas de modifications importantes à sa performance future comparativement à sa performance passée pour ce qui est du taux de croissance des bénéfices et des dividendes, on peut utiliser la moyenne des taux de croissance passés pour prévoir les dividendes futurs. Si, par contre, la situation économique devait être profondément modifiée à l'avenir, d'après les prévisions des instituts de prévision de la conjoncture, et que l'activité et les résultats de l'entreprise devaient en être sensiblement marqués à la baisse, les taux de croissance passés des dividendes ne seraient plus pertinents pour l'avenir. Il faudrait dans un tel cas ajuster le taux de croissance des dividendes aux prévisions, qui deviendraient le critère prépondérant au lieu du taux de croissance moyen passé.

1.3.1. Le prix d'une action ordinaire ou la valeur actuelle des flux monétaires de dividendes futurs et du prix de vente

Le prix P_0 d'une action ordinaire est égal à la valeur actuelle de tous les flux monétaires qu'elle génère, soit les dividendes (que l'on considère annuels pour simplifier les calculs) et le prix P_n de cette action vendue au temps n:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{D_2}{(1+r)} + \ldots + \frac{D_n}{(1+r)^n} + \frac{D_n}{(1+r)^n} \tag{1.4}$$

où:

D_t = le dividende annuel distribué au temps 1, 2, …, n;

r = le taux de rendement exigé sur l'action en question;

P_0 = le prix de l'action ordinaire aujourd'hui, au temps $t = 0$;

P_n = le prix de l'action ordinaire lors de sa vente au temps n.

Si l'on suppose que l'action ordinaire soit détenue jusqu'à l'infini, c'est-à-dire qu'elle n'est pas vendue au temps n, on obtient la relation suivante pour le prix P_0, basée sur la valeur actuelle des flux de dividendes seulement:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{D_2}{(1+r)} + \ldots + \frac{D_\infty}{(1+r)^\infty} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Une firme tend à appliquer une politique de dividende stable et prévisible, car un nombre important de clients l'exige et parce que le marché des valeurs mobilières interprète un changement de politique de dividendes comme un signal de changement notable et durable de l'évolution de ses profits, soit à la hausse ou à la baisse.

Une firme établit, par exemple, un taux de distribution de dividendes (TDD) de 40 % de son profit net annuel qui représente un objectif autour duquel peut fluctuer le taux de distribution des dividendes d'une année à l'autre tout en assurant un taux moyen de 40 % sur la longue période.

$$\left(\text{TDD} = \frac{\text{Dividendes}}{\text{Profit net}} \right)$$

1.3.2. Cas du dividende constant par période (croissance zéro) jusqu'à l'infini

C'est le cas d'une perpétuité dont la valeur actuelle ou le prix est le suivant :

Supposons que le prochain dividende, dans un an, sera de 5 $ et que par la suite le dividende annuel demeure inchangé jusqu'à l'infini et que le taux de rendement exigé sur cette action soit de 5 % ; on obtiendra le prix suivant pour cette action, aujourd'hui, sur le marché :

$$P_0 = \frac{5\,\$}{0{,}05} = 100\,\$$$

$$P_0 = \frac{D_1}{r} \tag{1.6}$$

L'évaluation d'une action privilégiée prend aussi cette forme de l'équation (1.6), puisque le dividende privilégié est un montant constant versé périodiquement.

$$P_0 = \frac{D_p}{r} \tag{1.7}$$

où :

D_P = dividende privilégié,

r = le taux de rendement exigé sur l'action privilégiée.

Le taux de rendement exigé sur une action ordinaire dont le dividende est à taux de croissance nul est établi à partir de la relation (1.6) :

$$r = \frac{D_1}{P_0}$$

Analysons le cas d'une action ordinaire à dividende annuel constant achetée aujourd'hui et revendue dans un an.

Le taux de rendement r obtenu par l'investisseur se décompose en taux de rendement du dividende $\frac{D_1}{P_0}$ et en taux de rendement du gain en capital g.

Considérons le placement effectué par un investisseur au temps $t = 0$. Supposons qu'il achète alors une action ordinaire au prix $P_0 = 100\,\$$ et qu'il s'attend à la revendre un an plus tard au prix $P_1 = 112\,\$$, sachant qu'il va alors recevoir un dividende $D_1 = 5\,\$$.

$t = 0$	$t = 1$
x	x
$P_0 = 100\,\$$	$P_1 = 112\,\$$
	$D_1 = 5\,\$$

Le taux de rendement auquel s'attend l'investisseur est le suivant :

$$r = \frac{P_1 - P_0 + D_1}{P_0} = \frac{112 - 100 + 5}{100} = 17\,\%$$

Le taux de rendement de 17 % se décompose en taux de rendement du dividende

$$\left(\frac{D_1}{P_0}\right)$$

et en taux de rendement du gain en capital (g) :

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} + \frac{D_1}{P_0}$$
$$= g + \frac{D_1}{P_0} = 12\,\% + 5\,\% = 17\,\%$$

où :

g = taux de croissance annuel des bénéfices de l'entreprise et de ses dividendes.

1.3.3. Cas du dividende à taux de croissance constant *g* jusqu'à l'infini

Les dividendes futurs prennent, à titre d'exemple, les valeurs suivantes pour les versements de dividendes des quatre périodes à venir :

$$D_1 = D_0\,(1 + g)$$
$$D_2 = D_1\,(1 + g)$$
$$D_3 = D_2\,(1 + g)$$
$$D_4 = D_3\,(1 + g)$$

où :

D_0 = le dernier dividende distribué et par conséquent connu.

D_1 = le prochain dividende.

En développant l'équation (1.4), on peut établir, dans le cas où $r > g$, la valeur suivante de l'action ordinaire dont le dividende augmente à un taux de croissance constant g :

$$P_0 = \frac{D_1}{r - g} \tag{1.8}$$

En effet, si $r > g$, on peut réduire la progression géométrique de la relation (1.4) selon la relation (1.8) ci-dessus.

EXEMPLE

Une action dont le prochain dividende est estimé à 8 $ et, dont le taux de rendement exigé par le marché s'élève à 10 %, et dont le taux de croissance du dividende et des profits se situe à 4 % aurait le prix suivant :

$$P_0 = \frac{8\,\$}{0,10 - 0,04} = \frac{8\,\$}{0,06} = 133,33\,\$$$

Le taux de rendement requis sur l'action ordinaire est obtenu en transformant la relation (1.8) de la façon suivante :

$$r = \frac{D_1}{P_0} + g \tag{1.9}$$

Notons que trois conditions doivent être remplies pour que les équations (1.8) et (1.9) puissent être appliquées :

- le taux de croissance du dividende reste stable, inchangé d'une période à l'autre ;
- l'horizon considéré est l'infini ;
- le taux de rendement requis *r* sur l'action ordinaire est supérieur au taux de croissance *g* du dividende.

EXEMPLE

La société Outrebond versera un dividende de 4,00 $ à la fin de l'année (dans un an). Le taux de croissance moyen des dividendes des dix dernières années s'élève à 7 % et la société est confiante de pouvoir maintenir ce rythme de croissance à l'avenir. Les actionnaires exigent un taux de rendement du dividende de 4,5 %. On demande de déterminer :

a) le taux de rendement exigé par l'actionnaire de la société Outrebond ;

b) le prix actuel de l'action ordinaire de cette société.

La relation (1.9) permet d'établir :

i) $r = 4{,}5\,\% + 7\,\% = 11{,}5\,\%$

$$0{,}115 = \frac{4\,\$}{P_0} + 0{,}07$$

ii) $0{,}115 - 0{,}07 = \dfrac{4}{P_0}$

iii) $P_0 = \dfrac{4}{0{,}045} = 88{,}88\,\$$

1.3.4. Cas du taux de croissance du dividende à deux étages

Supposons que le taux de croissance du dividende soit de 6 % pour les deux prochaines périodes et qu'il devienne nul par la suite. La détermination du prix de cette action ordinaire est possible, sachant que *r*, le taux exigé par les actionnaires, est de 10 %, que D_0, le dernier dividende, est égal à 3 $ et *g*, le taux de croissance du dividende des deux prochaines périodes, est égal à 6 %.

Nous allons d'abord reproduire et adapter la relation (1.4), qui permet de calculer le prix P_0, et ensuite utiliser les données fournies ci-haut pour illustrer cette relation :

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{1+r} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2} \tag{1.10}$$

or, selon la relation (1.8) :

$$P_2 = \frac{D_3}{r-g} = \frac{D_0(1+g)^2}{r-g}$$

En effet, comme le taux de croissance du dividende est nul à partir de la troisième année, on aura $D_3 = D_2$, soit :

$$D_3 = D_0(1+g)^2$$

On peut maintenant écrire :

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{1+r} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+r)^2} + \frac{D_0(1+r)^2}{(r-g)(1+r)^2}$$

En remplaçant D_0, g et r par les données qui nous sont fournies, on peut calculer le prix P_0 :

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{3(1{,}06)}{1{,}10} + \frac{3(1{,}06)^2}{(1{,}10)^2} + \frac{3(1{,}06)^2}{(0{,}10-0{,}06)(1{,}10)^2} \\ &= 2{,}891\,\$ + 2{,}786\,\$ + 69{,}645\,\$ = 75{,}322\,\$ \end{aligned}$$

On constate que le prochain dividende ainsi que les dividendes futurs, de même que les variations prévues de la valeur du placement fait dans une action ordinaire, sont les fondements de l'évaluation du taux de rendement d'une action ordinaire et de son prix.

1.4. LA DÉTERMINATION DU TAUX DE RENDEMENT ESPÉRÉ EXIGÉ PAR LES ACTIONNAIRES À L'AIDE DU MODÈLE D'ÉVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS (MEDAF)

Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) a pour fondement principal le coefficient bêta (β), qui mesure la sensibilité du taux de rendement d'un actif financier par rapport à la variation du taux de rendement de l'ensemble de l'économie représentée par un indice boursier (Bourse de Toronto ou TSX-300, ou l'indice Dow Jones de New York). Nous expliquons les grandes lignes du MEDAF dans ce chapitre, quitte à le traiter en détail dans le chapitre 2.

Nous admettons pour l'instant, tout en l'expliquant de façon détaillée plus tard dans le cadre du chapitre 2, que le coefficient bêta s'obtient, pour un titre risqué *i*, par le rapport de la covariance du taux de rendement d'un titre *i* et du taux de rendement du marché à la covariance du rendement de l'indice boursier représentant le marché par rapport à lui-même, c'est-à-dire :

$$\beta_i = \frac{\mathrm{COV}_{r_i\,r_m}}{\mathrm{COV}_{r_m,\,r_m}} = \frac{\mathrm{COV}_{r_i,\,r_m}}{\sigma_m^2} \tag{1.11}$$

Le taux de rendement espéré $E(r_i)$ d'un titre *i* est alors déterminé à partir de la relation suivante :

$$E(r_i) = r_s + \left[E(r_m) - r_s\right]\beta_i \tag{1.12}$$

où :

$E(r_i)$ = taux de rendement espéré du titre *i*,
r_s = taux sans risque,
$E(r_m)$ = taux de rendement espéré du marché,
$E(r_m) - r_s$ = prime par unité de risque du marché (bêta),
β_i = niveau du risque du marché du titre *i*.

EXEMPLE

Le taux de rendement des bons du Trésor est de 6 %, l'espérance de rendement du marché de 16 %, et le taux de rendement du titre *i* varie de 20 % lorsque celui du marché varie de 30 %. On demande de calculer le taux de rendement espéré exigé sur le titre *i*.

On sait que :

$$\beta_i = \frac{20\,\%}{30\,\%} = 0{,}66$$

Appliquons la relation (1.12) :

$$\begin{aligned} E(r_i) &= 0{,}06 + (0{,}16 - 0{,}06)\ (0{,}66) \\ &= 0{,}06 + (0{,}10)\ (0{,}66) = 0{,}126 \\ &\text{ou } 12{,}6\,\%. \end{aligned}$$

Chaque titre risqué est rémunéré à partir du taux de rendement sans risque de 6 %, auquel s'ajoute une prime de risque totale de 6,6 % qui dépend de son risque du marché β et de la prime par unité de β égale à 6,6 % (= 10 %) (0,66).

L'espérance du taux de rendement d'un titre risqué *i* est aussi fonction de sa $COV_{ri,rm}$, c'est-à-dire de la contribution que ce titre apporte au risque de l'ensemble du portefeuille du marché.

La relation (1.12) ci-haut traduit une relation linéaire entre l'espérance de rendement d'un titre *i* et son risque de marché β_i. Il s'agit de la ligne d'équilibre des titres (LET) qui représente le modèle du MEDAF, soit l'équilibre risque-rendement pour tous les titres risqués.

Il apparaît clairement que si $\beta_i = 0$, comme c'est le cas pour les bons du Trésor, on aura un titre à risque nul dont le taux de rendement se confond avec celui du titre sans risque.

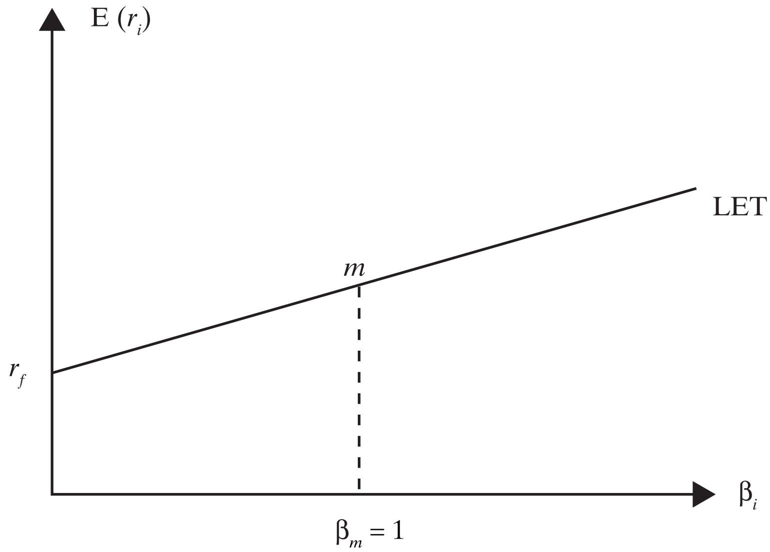
$$E\ (r_i) = r_s + 0 = r_s$$

Si $\beta_i = 1$, on obtiendra un titre dont le taux de rendement espéré se confond avec celui du marché :

$$E(r_i) = r_s + \left[E(r_m) - r_s\right](1) = E(r_m)$$

Figure 1.1

La ligne d'équilibre des titres (LET)



La figure 1.1 indique que la ligne d'équilibre des titres traduit la relation entre l'espérance de rendement d'un titre risqué et son risque du marché ou risque systématique bêta. Notons que bêta est une composante du risque total, la deuxième composante étant le risque spécifique de l'actif qui peut être éliminé ou minimisé par la diversification. Ceci explique pourquoi le seul risque rémunéré par le marché est le risque systématique bêta, le risque spécifique pouvant être éliminé par la diversification tel qu'expliqué dans le chapitre suivant.

RÉSUMÉ

L'évaluation du taux de rendement d'un actif intéresse un grand nombre d'intervenants dans les domaines économiques et financiers. Les calculs du taux de rendement à l'échéance d'une obligation, du taux de rendement d'une action privilégiée et du taux de rendement d'une action ordinaire (selon Gordon et selon le MEDAF) constituent l'essentiel de la matière traitée dans ce chapitre. Le MEDAF sera étudié de façon plus détaillée au chapitre 2.

Le MEDAF est largement utilisé dans la pratique des affaires, malgré les critiques formulées à son égard, en raison de la simplicité de sa présentation et parce qu'il est le seul modèle à fournir une information satisfaisante de la relation risque-rendement. Les courtiers en valeurs mobilières et les gestionnaires de projets d'investissement dans le secteur privé, ainsi que ceux des services publics, utilisent le MEDAF pour prendre des décisions.

QUESTIONS

1. En quoi consiste la notion de moyenne arithmétique des taux de rendement observés sur plusieurs périodes ?
2. Définir la moyenne géométrique des taux de rendement.
3. Expliquer les conditions de calcul du taux de rendement à l'échéance d'une obligation et la signification de ce dernier.
4. Quelles sont les composantes du modèle de Gordon pour la détermination du taux de rendement d'une action ordinaire.
5. Expliquer les facteurs qui permettent de calculer le taux de rendement exigé par les actionnaires ordinaires à l'aide du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF).

PROBLÈMES

1. LES OBLIGATIONS DE LA SOCIÉTÉ A

Vous achetez le 31 décembre 1991 l'obligation de la société A de valeur nominale égale à 1 000 $. Les données statistiques qui la concernent sont les suivantes :

10 ; déc. 31, 06 ; 14 %

- **On demande :**

a) de calculer le prix d'acquisition de l'obligation A sans tenir compte des frais de courtage, sachant que 15 ans la séparent de son échéance du 31 décembre 2006 ;

b) de déterminer le taux de rendement réalisé sur cette obligation si vous la revendez trois ans plus tard, sachant que les taux de rendement annuels du marché étaient respectivement de 14, 13 et 12 % à partir du début des trois années considérées ;

c) de calculer le taux de rendement à l'échéance de l'obligation A, le jour de son acquisition, soit le 31 décembre 1991 d'une part, ainsi que le 31 décembre 1996 d'autre part, sachant que son prix sur le marché était alors de 1 040 $.

Faire les calculs en considérant une capitalisation annuelle.

■ Solutions suggérées

a) Le prix d'achat de l'obligation A= Valeur actuelle (VA) de tous les flux monétaires (FM) qu'elle génère

$$\begin{aligned}\text{Prix de A} &= (100)(a_{15:14\%}) + 1\,000(1 + 0{,}14)^{-15}\\ &= (100)(6{,}142) + 1\,000(0{,}14)\\ &= 614{,}20 + 140\\ &= \underline{\underline{754{,}20\,\$}}\end{aligned}$$

b) Le taux de rendement réalisé de l'obligation A

$$754{,}20 = \frac{\text{VF des FM}}{(1 + r)^3}\text{; VF = Valeur future ou finale}$$

Valeur future des FM :

$$\begin{aligned}&1^{er}\text{ flux : } (100)(1{,}13)(1{,}12) &&= 126{,}56\\ &2^{e}\text{ flux : } (100)(1{,}12) &&= 112{,}00\\ &3^{e}\text{ flux : } 100 &&= \underline{100{,}00}\\ & && \ 338{,}56\,\$\end{aligned}$$

Prix de vente :

$$\begin{aligned}&= (100)(a_{12:12\%}) + 1\,000(1 + 0{,}12)^{-12}\\ &= 619{,}40 + 257\\ &= 876{,}40\,\$\end{aligned}$$

VF de tous les FM: $338{,}56 + 876{,}40 = 1\,214{,}96\,\$$ et $754{,}20 = \dfrac{1\,214{,}96}{(1 + r)^3}$

$$1 - r = \left(\frac{1\,214{,}96}{754{,}20}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}172\,3$$

$r = 1{,}172\,3 - 1 = 0{,}172\,3$ ou $\underline{\underline{17{,}23\,\%}}$

c) Taux de rendement à l'échéance de l'obligation A

– le jour de son acquisition : $r = c = 14\,\%$; cette information est donnée.

où r = taux de rendement courant du marché ou taux de rendement à l'échéance.

c = le taux de coupon affiché par l'obligation.

– le 31 décembre 1996 :

$1\,040 = (100)\,(a_{10\,;i}) + 1\,000\,(1 + i)^{-10}$

Essai à 9 %

$= (100)\,(6{,}418) + (1\,000)\,(0{,}422)$

$= 1063{,}80\,\$$

À 10 %, on a 1 000 $. À 9 %, on a 1 063,80 $.

Différence :	1 %	63,80 $	
	X	40,00 $	(1 040 – 1 000 = 40 $)

$$\text{d'où } \frac{40}{63{,}80}\left(1\,\%\right) = 0{,}627\,\%$$

d'où le taux de rendement à l'échéance $r = 10\,\% - 0{,}627 = 9{,}373\,\%$

2. L'OBLIGATION X

Une obligation risquée X de 1 000 $ de valeur nominale se distingue par les caractéristiques suivantes :

8 ; sept. 20, 07 ; 10,5 %

Vous vous portez acquéreur d'une de ces obligations risquée X le 20 septembre 1999.

- **On demande :**

a) de déterminer le prix d'achat de l'obligation X abstraction faite des frais de courtage ;

b) de calculer le taux de rendement à l'échéance de cette obligation à la date du 20 septembre 2000 si vous l'aviez acheté à 920,50 $;

c) de déterminer le taux de rendement réalisé sur l'obligation X achetée le 20 septembre 2000 si vous la revendiez le 20 septembre 2004 en vous basant sur les données suivantes :

Année	**Taux d'intérêt du marché**
Première année de détention de X	À déterminer
Deuxième année de détention de X	10 %
Troisième année de détention de X	10,5 %
Quatrième année de détention de X	8 %

d) d'expliquer la signification des deux notions de taux de rendement d'une obligation utilisées plus haut.

Faire les calculs en considérant une capitalisation annuelle.

■ **Solutions suggérées**

a) Prix d'achat de l'obligation X = Valeur actuelle de tous les flux monétaires qu'elle génère.

$$\text{Prix} = (80)\left(a_{8:10,5}\right) + 1000\,(1+0,105)^{-8}$$

$$= 80\left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1+0,105)^{8}}}{0,105}\right] + 1000\,(0,449\,88)$$

$$= 80\left[\frac{1 - 0,449\,88}{0,105}\right] + 449,88$$

$$= (80)\,(5,2392) + 449,88$$

$$= 419,13 + 449,88$$

$$= \underline{\underline{869,01\,\$}}$$

b) Le taux de rendement à l'échéance r est le taux d'actualisation qui permet d'égaler la valeur actuelle des sorties de fonds (le prix de l'obligation) à la valeur actuelle des entrées de fonds assurées par cette obligation :

$$920,50\,\$ = (80)(a_{7\,;i}) + 1\,000\,(1 + r)^{-7}$$

Essai avec 12 %

$$= (80)\ (a_{7\,;0,12}) + 1\ 000(1 + 0,12)^{-7}$$

$$= (80)\ (4,563\ 7) + 1\ 000\ (0,452\ 35)$$

$$= 365,1 + 452,35$$

$$= \underline{\underline{817,45\,\$}}$$

d'où

À : 12 %, on a	817,45 $
À : 8 %, on a	1 000,00 $
Différence 4 %	182,55 $
X %	79,50 $

(1 000 – 920,5 = 79,5)

$$\text{et X \%} = \left(\frac{79,5}{182,55}\right)(0,04) = 0,017\ 4 \text{ ou } 1,74\ \%$$

et le taux de rendement à l'échéance = 8 % + 1,74 % = 9,74 %.

Il est évident que l'on peut utiliser la calculatrice pour un résultat plus précis.

c) Le taux de rendement réalisé *r* est un taux observé lors de la vente de l'obligation :

$$920,5\ \$ = \frac{\text{Valeur future des flux monétaires}}{(1+r)^4}$$

La valeur future des flux monétaires =

c.1. Valeur future des intérêts réinvestis au taux du marché :

(80)(1,10)(1,105)(1,08)	=	105,02
+(80)(1,105)(1,08)	=	95,47
+(80)(1,08)	=	86,40
+(80)	=	80,00
		366,89 $

c.2. Valeur de revente de l'obligation le 20 septembre 2004. Cette valeur actuelle des flux monétaires est 1 000 $ à cette date, car le taux de rendement du marché de 8 % se confond avec le taux de coupon ou taux d'intérêt nominal de l'obligation.

D'où la valeur future de tous les flux monétaires s'élève à :

366,89 + 1 000 = 1 366,89 $

$$\text{et } 920,5\ \$ = \frac{1\ 366,89}{(1+r)^4}$$

$$\left(1+r\right)=\left(\frac{1366{,}89}{920{,}5}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(1{,}4849\right)^{\frac{1}{4}}=1{,}1040$$

$$\text{et } r=1{,}1040-1=0{,}104 \text{ ou } \underline{\underline{10{,}4\,\%}}$$

d) Le taux de rendement à l'échéance d'une obligation est le taux de rendement qu'obtiendrait l'investisseur qui la détiendrait jusqu'à l'échéance avec l'hypothèse suivante : le taux de réinvestissement des flux monétaires est inchangé, d'une période à l'autre. Le taux de réinvestissement est le taux de rendement à l'échéance. Les intérêts reçus tout au long de l'existence de l'obligation sont réinvestis à ce taux, qui est un taux de rendement interne. C'est un taux ex ante.

Le taux de rendement réalisé est celui qu'on obtient en réinvestissant les flux monétaires aux différents taux ayant prévalu sur le marché durant la période de détention de l'obligation. Il est évident que les taux observés sur le marché peuvent être différents d'une année à l'autre et seront soit supérieurs soit inférieurs au taux de rendement à l'échéance utilisé comme taux de réinvestissement dans l'approche précédente. Le taux de rendement réalisé est un taux ex post, calculé a posteriori, par exemple lors de la vente de l'obligation après une période donnée de détention. Ce taux est le taux de rendement effectivement réalisé, par opposition au taux de rendement à l'échéance qu'est un taux promis lors de l'achat de l'obligation.

3. L'ACTION ORDINAIRE A

Le revenu brut espéré annuel constant à l'infini d'une action ordinaire A est de 25 $.

Les informations suivantes sont disponibles :

- le taux de rendement espéré du portefeuille du marché est de 16 % et son écart type de 0,8 ;
- la covariance du rendement de l'action A et du rendement du portefeuille du marché M est de :

  σ^2_{AM} = $COV_{(RA,RM)}$ = 0,6
- le taux de risque est de 6 %.

■ **On demande :**

a) de calculer le prix de l'action A.

■ Solution suggérée

a) Le prix de l'action A s'obtient, dans le cas d'un flux monétaire périodique constant R, jusqu'à l'infini, par la relation suivante :

$$\text{Prix}_A = \frac{R}{E\left(r_A\right)}$$

$$\begin{aligned}
E\left(r_A\right) &= r_f + \left[E\left(r_m\right) - r_f\right] \beta_A \\
&= r_f + \left[E\left(r_m\right) - r_f\right] \left(\frac{\text{COV}_{(RA,RM)}}{\sigma^2 r_m}\right) \\
&= 6\,\% + \left(16\,\% - 6\,\%\right) \left(\frac{0{,}6}{\left(0{,}8\right)^2}\right) \\
&= 6\,\% + 10\,\% \left(0{,}9375\right) \\
&= 6\,\% + 9{,}375\,\% = 15{,}375\,\%
\end{aligned}$$

$$\text{d'où Prix}_A = \frac{25}{0{,}153\,75}$$

$$= \underline{162{,}60\,\$}$$

CHAPITRE 2

L'analyse d'un portefeuille d'actifs risqués et l'équilibre risque-rendement

2.1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

L'objet du présent chapitre est de décrire les caractéristiques du risque en l'expliquant en termes de distribution de taux de rendement observés ou attendus autour d'une valeur espérée. Si l'on espère qu'une firme réalisera un taux de rendement de 25 % pour la prochaine année, il n'est pas sûr que celui obtenu à la fin de cette année soit de 25 %. Le taux de rendement réalisé peut être bien supérieur ou bien inférieur au résultat attendu. L'étendue des variations de taux de rendement autour de la valeur espérée de 25 % est mesurée par la variance ou l'écart type de la distribution.

Le risque d'un projet d'investissement se décompose en risque spécifique, propre au projet en tant que tel, et en risque du marché, lié au comportement de l'ensemble de l'économie. L'analyste du projet peut avoir fait des erreurs en estimant ses flux monétaires futurs. Si une firme entreprend plusieurs projets pendant une année, elle peut surestimer les flux monétaires de certains projets et sous-estimer ceux d'autres projets et, de ce fait, diversifier le risque spécifique et le réduire pour l'ensemble des projets comparativement à la somme des risques spécifiques individuels de tous les projets exécutés pendant l'année. Une autre source de risque réside dans les effets favorables ou défavorables des décisions de la concurrence sur les profits et les flux monétaires d'un projet. Notons aussi le risque propre à la branche industrielle à laquelle appartient la firme sujette à des innovations technologiques importantes, à des modifications de prix et à de nouvelles réglementations.

Une autre source importante de risque se trouve dans le risque du marché, qui peut affecter les flux monétaires et les profits d'un projet d'investissement en raison de modifications inattendues des taux d'intérêt, des taux d'inflation, des taux de change et du prix des marchandises. Le risque du marché résulte aussi de changements du rythme de l'activité économique qui se répercutent de façon favorable (quand il y a une expansion forte de la production nationale) sur les résultats de toutes les entreprises. Certaines entreprises seront plus ou moins affectées que d'autres par l'état de la conjoncture économique en fonction de leur sensibilité individuelle au comportement général de l'économie.

Une firme doit adopter des politiques et mettre en œuvre des stratégies d'investissement et de financement susceptibles de maximiser la richesse des actionnaires. La relation risque-rendement facilite les décisions en matière de gestion financière. Elle procède du Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) et contribue à la détermination du coût de capital optimal de la firme (le taux d'actualisation des flux monétaires dans la méthode de la valeur actuelle nette) à l'aide de la structure optimale de capital. La détermination du risque du portefeuille et de son taux de rendement espéré, le calcul de l'effet de diversification, le modèle du marché, le choix du portefeuille, la relation risque-rendement et le modèle de l'*Arbitrage Pricing Theory* (APT) font l'objet du présent chapitre.

Les projets d'investissement des différentes branches industrielles d'une économie ont des résultats qui ne fluctuent pas de la même façon à travers les différents cycles économiques. Il en résulte que les fluctuations de revenus de projets de nature différente s'annulent en partie, entraînant une réduction du risque global du portefeuille de projets appelée effet de diversification.

Une caractéristique fort intéressante de la diversification des actifs consiste à réduire le risque du portefeuille tout en préservant son taux de rendement moyen. La mesure de la réduction du risque se fait à l'aide des paramètres suivants, à savoir :

- l'espérance mathématique,
- l'écart type,
- la covariance,
- le coefficient de corrélation.

2.2. L’ENTREPRISE FACE AU RISQUE

L’analyse des projets d’investissement devrait tenir compte, de façon générale, du facteur risque même si cet aspect important n’est pas traité de façon formelle dans l’entreprise. Certains considèrent, pour simplifier les choses, que le risque d’un nouveau projet est identique à celui de l’ensemble des projets en activité, soit un risque égal au risque moyen de l’entreprise. Or, un nouveau projet peut se distinguer par un risque supérieur ou inférieur au risque moyen de l’entreprise. Si le gestionnaire ne traite pas de façon convenable le degré du risque de nouveaux projets afin de pouvoir exiger le taux de rendement correspondant, il est exposé à la possibilité de prendre de mauvaises décisions. Exiger un taux de rendement trop faible, par rapport au niveau du risque d’un projet, peut conduire à un gaspillage de ressources. Par ailleurs, un taux de rendement requis trop élevé peut empêcher l’adoption d’un projet intéressant, résultant en l’abandon d’une possibilité d’enrichissement de l’entreprise.

Le risque d’un projet s’explique par plusieurs facteurs :

- la difficulté d’obtenir des données précises sur certaines variables déterminantes du projet ;
- l’absence de relations historiques entre variables, qui rend plus délicate l’interprétation des données relatives à des projets caractérisés par une technologie nouvelle ;
- les difficultés de l’analyse des conséquences de l’évolution de la conjoncture économique domestique, ainsi que l’impact de la mondialisation, des systèmes économiques et financiers sur les ventes de l’entreprise, qui compliquent la mesure du risque ;
- les erreurs d’analyse et d’interprétation des données financières, comptables et fiscales d’un nouveau projet.

Le gestionnaire des projets d’investissement doit être conscient de l’importance de l’intégration du risque en matière de gestion du budget en capital de l’entreprise. La qualité de la décision d’investir s’améliore en étudiant les projets sous l’angle risque-rendement plutôt qu’en se limitant au seul taux de rendement comme critère d’acceptation ou de rejet d’un projet.

L’entreprise qui ne dispose ni de ressources financières suffisantes ni d’experts dans le domaine du traitement du risque, pour déterminer de façon satisfaisante l’ampleur de ce dernier, devrait au moins en tenir compte de façon approximative. En effet, les investisseurs, ainsi que l’ensemble des intervenants sur les marchés financiers, conditionnent leur contribution au financement de l'entreprise ainsi que le taux de rendement exigé à la détermination assez précise du risque des projets d'investissement nouveaux et à sa répercussion sur le risque global de l'entreprise.

Ce chapitre traite de la détermination et de l'analyse du risque d'un projet unique. Des probabilités seront affectées aux différents résultats possibles (flux monétaires) d'un nouveau projet afin d'en calculer la valeur espérée et le risque.

La valeur espérée est obtenue par la somme des produits des probabilités ou du pourcentage de chance de réalisation des résultats possibles de flux monétaires, par la valeur monétaire de ces résultats. La distribution de probabilités de réalisation des flux monétaires d'un projet peut être établie, d'une part, en fonction de l'information historique provenant de projets semblables et, d'autre part, sur la base d'une analyse prévisionnelle de l'évolution de la conjoncture économique et, enfin, selon des données relatives à la concurrence dans le secteur industriel de l'entreprise.

Une distribution de probabilités de résultats est définie de façon complète lorsque ses deux paramètres d'espérance mathématique et d'écart type sont calculés. L'espérance mathématique est une valeur fondamentale de la distribution de probabilités ; elle mesure une valeur moyenne ou espérée des résultats d'un projet, tandis que l'écart type mesure les variations des différents résultats possibles autour de cette valeur moyenne et renseigne l'investisseur sur l'ampleur du risque.

L'écart type détermine donc l'importance des fluctuations des résultats, c'est-à-dire le risque du projet. Il devient alors possible d'établir plusieurs degrés de risque et de champs de probabilités d'occurrence correspondant à une rentabilité moyenne, faible ou élevée de l'investissement. La tolérance (du gestionnaire ou de l'investisseur) au risque peut alors être intégrée plus facilement au processus de la décision d'investir.

2.3. L'ANALYSE DU RISQUE D'UN PROJET

2.3.1. Le risque et l'incertitude

Tout projet d'investissement, ou tout placement qui se distingue par un seul et unique résultat possible, est un projet certain. Tel est le cas de l'acquisition d'une obligation du gouvernement fédéral. En réalité, les projets d'investissement sont marqués par le risque ou par l'incertitude et non par la certitude. Un projet risqué se caractérise par plusieurs résultats possibles dont les probabilités de réalisation sont connues. Par contre, il n'est guère possible de définir les probabilités de réalisation des différents résultats attendus dans le cas de l'incertitude.

Les distributions de probabilités sont établies soit de façon objective, soit de façon subjective. Il s'agit, dans le premier cas, de calculer les probabilités des différents résultats à partir d'informations statistiques publiées par des organismes spécialisés, ou de données historiques reliées à un projet de même nature, réalisé dans une conjoncture économique semblable.

L'information subjective s'impose lorsque des données objectives ne sont pas disponibles. Le gestionnaire de projets construit la distribution de probabilités des résultats à l'aide de son expérience de projets semblables, et en se basant sur son intuition et sur son aptitude à prévoir et à analyser les différentes étapes du cycle économique.

2.3.2. Les caractéristiques d'un investissement risqué

Un investissement risqué, comparé à un placement en obligations gouvernementales dont le résultat est certain et unique, présente plusieurs résultats possibles pour lesquels il est possible d'assigner des probabilités d'occurrence, c'est-à-dire l'importance relative de la réalisation de chaque résultat. La distribution de probabilités des résultats d'un projet permet de déterminer son risque, c'est-à-dire la variabilité de son taux de rendement ou de sa valeur actuelle nette. Prenons quelques exemples.

L'exemple suivant a tout simplement pour objet de décrire une distribution de probabilités de ventes de produits, selon différentes conjonctures ou situations que peut présenter l'économie domestique :

Tableau 2.1

Distribution de probabilités des ventes de produits fabriqués dans le cadre d'un projet donné X

Conjoncture	Probabilités	Ventes (en $)
Bonne	0,4	30 000 $
Moyenne	0,2	20 000 $
Mauvaise	0,4	10 000 $

Expliquons maintenant la notion de risque en comparant deux investissements. Le premier est un placement A effectué dans des obligations du gouvernement fédéral qui assure un taux de rendement annuel de 6 %. Le deuxième investissement B consiste en l'acquisition d'actions ordinaires d'une société de fabrication de tuyaux en acier. L'analyse des rendements passés de cette société révèle que les variations de rendement furent importantes et permettent, à la lumière des prévisions économiques, de faire les estimations suivantes :

Probabilité de réalisation	Taux de rendement sur l'investissement
20 chances sur 100 (20 %)	– 4 %
10 chances sur 100 (10 %)	0 %
10 chances sur 100 (10 %)	6 %
40 chances sur 100 (40 %)	20 %
20 chances sur 100 (20 %)	30 %

L'investissement dans la société de fabrication de tuyaux en acier peut assurer un taux de rendement aussi élevé que 30 %, si les affaires prospèrent suffisamment, comme il peut réaliser un résultat négatif (– 4 %) si le contexte économique général est défavorable. On peut cependant espérer que pour l'avenir, à travers de bonnes et de mauvaises années, on pourrait obtenir un taux de rendement moyen u de 13,8 %.

$$u = (0{,}20)(-4\ \%) + (0{,}10)(0\ \%) + (0{,}10)(6\ \%) \\ + (0{,}40)(20\ \%) + (0{,}20)(30\ \%) = 13{,}8\ \%$$

L'obligation gouvernementale offre un taux de rendement de 6 %, tandis que la société de fabrication de tuyaux en acier présente un taux de rendement espéré de 13,6 % qui est beaucoup plus risqué. Un risque plus élevé traduit une plus grande incertitude quant au résultat réalisé à l'avenir en raison de plus importantes fluctuations possibles des taux de rendement, soit –4 % et 30 % pour le placement B comparé à 6 % fixe, inchangé à 6 % pour le placement A. En d'autres termes, la dispersion des résultats autour de la valeur espérée est d'autant plus grande que le risque est élevé.

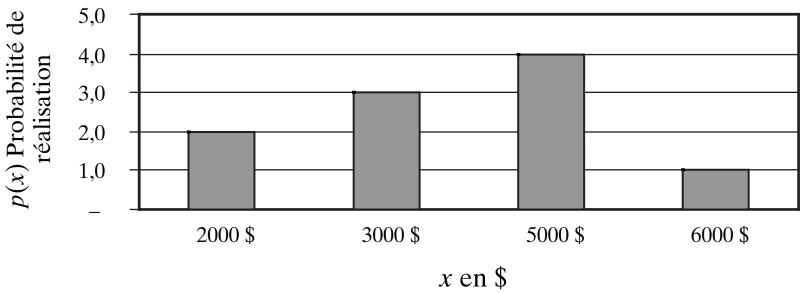
Les ventes de produits fabriqués par une firme constituent une variable aléatoire dont la distribution de probabilités peut se présenter sous l'une des deux formes suivantes :

2.3.2.1. La forme de distribution de probabilités discrète

Une forme discrète est celle selon laquelle une variable x prend un nombre limité de valeurs bien définies telles que 2 000 $, 3 000 $, 5 000 $ et 6 000 $. On assigne à chacune de ces quatre valeurs discrètes une probabilité donnée (voir la figure 2.1).

Figure 2.1

Distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète



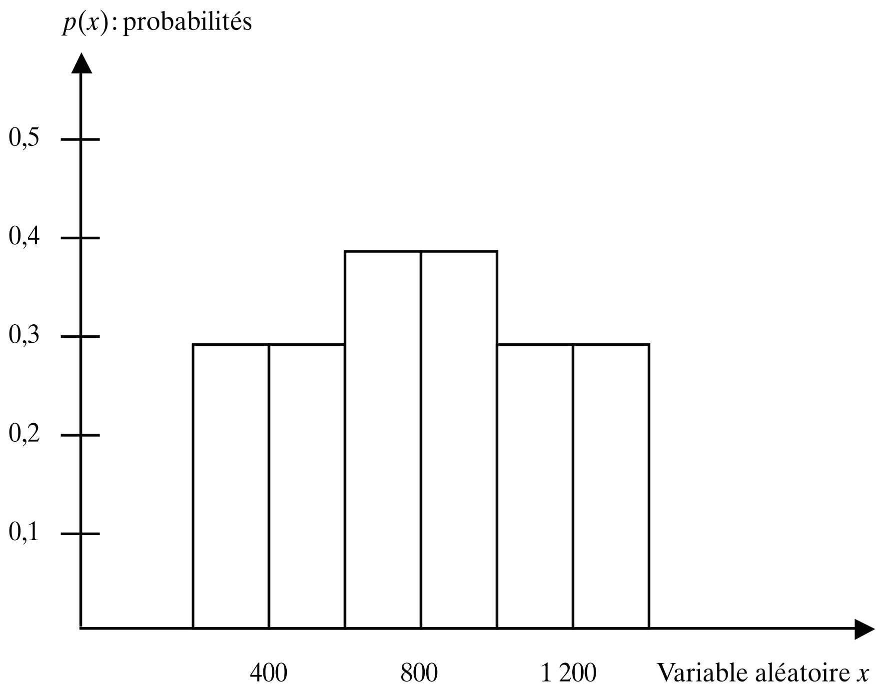
Distribution de la variable x en $		
Conjoncture économique	**Probabilités (p_x)**	**Ventes (x $)**
Moyenne	0,20	2 000 $
Bonne	0,30	3 000 $
Très bonne	0,40	5 000 $
Excellente	0,10	6 000 $

2.3.2.2. La forme de distribution de probabilités continue

Une forme continue est celle selon laquelle la variable peut prendre toutes les valeurs possibles comprises dans un espace constitué d'une valeur supérieure et d'une valeur inférieure, par exemple des valeurs de 800 $, 800,01 $ ou 799,99 $.

Figure 2.2

Transformation d'une variable continue en une variable discrète



Les variables financières sont en général caractérisées par la forme continue. Cette dernière présente un travail laborieux en matière d'élaboration des probabilités du nombre considérable de valeurs qu'elle peut adopter. D'où la nécessité de simplifier la présentation des distributions de probabilités d'une variable continue en utilisant une variable aléatoire discrète (figure 2.2) ou en utilisant une forme normale (figure 2.3) compatible avec un grand nombre de données financières.

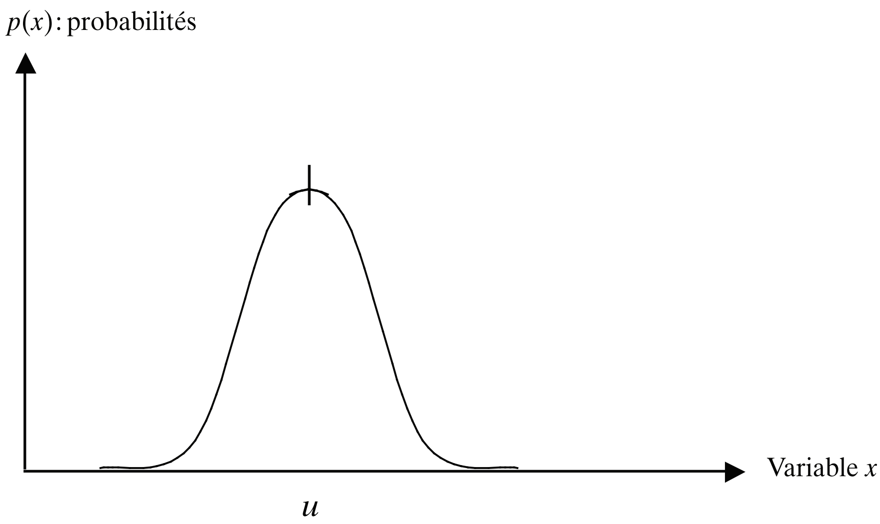
La simplification de l'étude et de l'interprétation d'une variable continue se fait aussi en supposant que la variable en question se présente selon une forme déterminée de distribution définie par les deux paramètres suivants :

- l'espérance mathématique,
- l'écart type.

Cette méthode de traitement d'une variable aléatoire est très répandue, et elle présente un grand avantage en matière d'exploitation des données financières.

Figure 2.3

Distribution normale de probabilités



Il est utile d'analyser les critères utilisés par le gestionnaire pour décider d'un investissement risqué, lorsque les flux monétaires du projet sont présentés sous la forme d'une distribution de probabilités. Plusieurs critères peuvent être choisis par le gestionnaire afin de s'assurer de l'information la plus complète possible dans sa démarche de maximisation des résultats d'un projet.

2.3.3. Le concept d'espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une distribution de probabilités de flux monétaires nets d'un projet d'investissement est la moyenne pondérée de ces résultats attendus ; la pondération est la probabilité d'occurrence de chaque flux monétaire net.

Considérons la distribution de probabilités de la valeur actuelle nette (VAN) d'un projet X de fabrication de produits de consommation ci-après :

Probabilités	VAN (en milliers)
0,20	3 000 $
0,40	5 000 $
0,40	6 000 $

L'espérance mathématique de la valeur actuelle nette est égale à :

$$\begin{aligned} u &= (3\,000\$)\,(0{,}20) + (5\,000\$)\,(0{,}40) + (6\,000\$)\,(0{,}40) \\ &= 600\$ + 2\,000\$ + 2\,400\$ \\ &= 5\,000\$ \end{aligned}$$

La valeur espérée de 5 000 $ n'est pas un critère absolu d'appréciation sur lequel repose la décision du gestionnaire car :

- sa réalisation n'est pas certaine ;
- elle ne constitue une valeur moyenne que dans le cas où l'on répéterait l'expérience un nombre considérable de fois.

Le gestionnaire doit compléter l'analyse et le traitement des données d'un projet par d'autres critères que celui de l'espérance mathématique. Ce dernier critère ne permet pas en soi de cerner de façon satisfaisante les caractéristiques d'un projet risqué. Le concept de la variance fournit au gestionnaire des renseignements utiles quant aux variations possibles des différents résultats d'un projet autour de l'espérance mathématique. La variance mesure le risque du projet et informe le gestionnaire sur l'ampleur de ce risque.

2.3.4. Le concept de la variance

Les probabilités d'occurrence des résultats sont bien précises dans un contexte de risque, contrairement à celui de l'incertitude. Le gestionnaire peut établir, à l'aide de la variance, l'importance des variations des résultats par rapport à la valeur espérée. Comme la variance mesure la dispersion des résultats autour de la valeur espérée, elle renseigne le gestionnaire sur le degré de risque que représente un nouveau projet. La décision d'investissement s'effectue sous un double éclairage nouveau :

1. Le risque défini par la variance est-il tolérable par le gestionnaire ou l'investisseur ?
2. La rentabilité du projet nouveau compense-t-elle suffisamment le risque propre au projet ?

La variance d'un projet X est calculée de la façon suivante :

$$\sigma_x^2 = (x_1 - u)^2\, p_1 + (x_2 - u)^2\, p_2 + \ldots + (x_i - u)^2\, p_i + \ldots + (x_n - u)^2\, p_n$$

où :

σ_x^2 = variance de la distribution de probabilité de la valeur actuelle nette du projet X,

x_i = valeur actuelle nette (VAN) de la possibilité de la i^e VAN, sachant que $i = 1, 2, \ldots, n$,

μ = valeur espérée de la VAN,

p_i = probabilité de réalisation de la VAN i.

La distribution de probabilités de la VAN du projet X a pour variance :

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= (3\,000 - 5\,000)^2\,(0{,}20) + (5\,000 - 5\,000)^2\,(0{,}40) + (6\,000 - 5\,000)^2\,(0{,}40)\\ &= 800\,000\,\$ + 0\,\$ + 400\,000\,\$ = 1\,200\,000\,\$\end{aligned}$$

L'écart type qui est la racine carrée de la variance renseigne aussi sur les fluctuations qui caractérisent une variable :

$$\sigma_x = (1\,200\,000\,\$)^{1/2} = 1\,095{,}45\,\$$$

La pertinence de l'information additionnelle fournie par la mesure du risque selon l'écart type ou par la variance apparaît d'autant plus dans le cas d'une comparaison de deux projets qui présentent une même espérance mathématique.

Considérons un nouveau projet Y dont la distribution de probabilités de la VAN est la suivante :

Probabilités	VAN (en milliers)
0,20	2 000 $
0,40	5 000 $
0,40	6 500 $

Le projet Y a, comme le projet X, une espérance mathématique de VAN égale à 5 000 $; par contre, son écart type ou risque est beaucoup plus élevé. En effet, la variance du projet Y est de :

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= (2\,000 - 5\,000)^2\,(0{,}20) + (5\,000 - 5\,000)^2\,(0{,}40) + (6\,500 - 5\,000)^2\,(0{,}40)\\ &= 1\,800\,000\,\$ + 0 + 900\,000\,\$ = 2\,700\,000\,\$\end{aligned}$$

L'écart type du projet Y s'élève à :

$$\sigma_y = (2\,700\,000\,\$)^{1/2} = 1\,643{,}17\,\$$$

Le projet Y présente un risque beaucoup plus élevé que le projet X, car l'écart type de 1 643,17 $ indique une dispersion de sa VAN beaucoup plus large que celle de X, qui se chiffre à 1 095,45 $. En d'autres termes, le projet Y peut se distinguer par une VAN positive plus élevée et par une VAN négative plus élevée que celles du projet X. Il est bien évident qu'un projet comme Y, qui peut éventuellement atteindre un résultat négatif plus élevé, est plus risqué.

2.4. LES MESURES NÉCESSAIRES À L'ANALYSE DU RISQUE DANS LE CADRE DE PROJETS MULTIPLES[1]

2.4.1. Autres concepts et mesures du risque

Une cimenterie a des activités qui fluctuent avec la conjoncture économique. Les bénéfices peuvent varier de façon marquée selon les différentes phases du cycle économique, car la construction domiciliaire et résidentielle se caractérise par d'importantes fluctuations. L'investisseur éprouve généralement une aversion pour le risque, lequel se traduit par des variations de profit ou de tout autre résultat considéré autour de la valeur espérée. La réduction du risque s'obtient par la minimisation des fluctuations des ventes et des profits. Si le détenteur d'un certain nombre d'actions de l'entreprise désire stabiliser le taux de rendement obtenu sur l'ensemble de ses investissements, il devra acquérir des actions de sociétés dont les activités varient en sens contraire ou de façon indépendante par rapport à celles de l'entreprise. Lorsque les profits seront élevés pour la cimenterie, ils seront modestes ailleurs et vice versa, réduisant ainsi, par la combinaison d'investissements dont les bénéfices varient différemment dans le temps, les fluctuations de taux de rendement, c'est-à-dire le risque du portefeuille.

C'est la diversification des projets et des portefeuilles qui permet de stabiliser le taux de rendement global des investissements. L'ampleur de la réduction du risque dépend du degré d'indépendance des différents investissements réalisés, des actions détenues en portefeuille ou de la mesure dans laquelle l'évolution des taux de rendement se fait en sens contraire. Pour établir la relation dans le temps entre les variations des profits de deux investissements différents, il faut recourir à de nouveaux concepts et instruments de mesure du risque : la covariance et le coefficient de corrélation.

1. F. Rassi (1989). « Notions fondamentales et instruments de mesure du risque, section 2. L'analyse du risque dans le cadre de projets multibles », dans R. Belzile, G. Mercier et F. Rassi, *Analyse et gestion financière*, Québec, Presses de l'Université du Québec, p. 626-636.

2.4.2. La covariance

La covariance permet de chiffrer dans quelle mesure et de quelle façon deux variables évoluent ensemble dans le temps par rapport à leurs moyennes respectives. La covariance est la relation entre les variations simultanées des variables soit au-dessus de leurs valeurs moyennes respectives, soit en dessous. L'exemple de calcul de la covariance au tableau 2.2 ci-après ainsi que l'explication et l'interprétation qui suivent illustrent la nature de la covariance et sa signification. Si par exemple il s'agit de deux taux de rendement ou de deux valeurs actuelles nettes qui évoluent de façon systématique soit au-dessus, soit en-dessous de leurs moyennes respectives, on obtiendra des produits de la différence de ces valeurs avec leur moyenne de signes positifs. La covariance est alors positive. Par contre, elle est négative lorsque la VAN d'un projet X prend systématiquement des valeurs supérieures à sa moyenne, tandis que la VAN d'un projet Y prend simultanément des valeurs inférieures à sa moyenne.

Nous allons illustrer le concept de covariance par plusieurs états de la nature, c'est-à-dire par des conjonctures économiques différentes. Les valeurs actuelles nettes des projets X, Y et Z et les probabilités correspondantes sont :

État de la nature	Probabilité	VAN		
		Projet X	Projet Y	Projet Z
Favorable (expansion économique)	0,4	2 500 $	5 000 $	3 000 $
Moyen (faible expansion)	0,4	3 000 $	2 500 $	4 000 $
Défavorable (récession)	0,2	4 000 $	0	5 000 $

La valeur actuelle nette espérée et l'écart type sont respectivement de :

	Projet X	Projet Y	Projet Z
E (VAN)	3 000,00 $	3 000,00 $	3 800,00 $
σ	547,72 $	1 870,82 $	748,33 $

Le concept de covariance permet de mesurer l'évolution simultanée des valeurs actuelles nettes des projets X et Y, par exemple, selon les phases du cycle économique. La covariance est indispensable pour établir l'écart type des valeurs actuelles nettes d'une combinaison de projets, car les fluctuations de ces valeurs actuelles nettes, qui se manifestent différemment selon l'évolution de la conjoncture économique, ne s'ajoutent pas. Elles se neutralisent plutôt en partie, d'une manière générale. La covariance des fluctuations des VAN des projets X et Y est ainsi calculée :

$$\mathrm{COV}_{XY} = \sum_{i=k}^{n} \left[\mathrm{VAN}_{Xk} - E(\mathrm{VAN}_{x})\right] \left[\mathrm{VAN}_{Yk} - E(\mathrm{VAN}_{Y})\right] p_k \qquad (2.1)$$

où :

VAN_{Xk} = valeur actuelle nette du projet X dans une conjoncture économique donnée *k*,

VAN_{Yk} = valeur actuelle nette du projet Y dans une conjoncture donnée *k*,

p_k = probabilité de réalisation de la conjoncture ou de l'état de la nature *k*,

n = nombre d'états de la nature retenus (ici trois),

E(VAN) = espérance de la valeur actuelle nette de chaque projet considéré, soit X et Y.

La covariance obtenue est de – 1 000 000 $ (voir le tableau 2.2).

Tableau 2.2

Calcul de la covariance de deux projets

État de la nature	$[\mathrm{VAN}_{Xk} - E(\mathrm{VAN}_X)]$	$[\mathrm{VAN}_{Yk} - E(\mathrm{VAN}_Y)]$	(P_k)		
Favorable	[2 500 $ – 3 000 $]	[(5 000 $ – 3 000 $)]	(0,4)	=	– 400 000 $
Moyenne	[3 000 $ – 3 000 $]	[(2 500 $ – 3 000 $)]	(0,4)	=	0 $
Défavorable	[4 000 $ – 3 000 $]	[(0 – 3 000 $)]	(0,2)	=	– 600 000 $
					– 1 000 000 $

Le calcul détaillé de la covariance donne une mesure absolue, soit – 1 000 000 $, des relations entre les valeurs actuelles nettes des projets X et Y dans le temps. La covariance peut varier entre moins l'infini (– ∞) et plus l'infini (+ ∞). On constate bien que dans le contexte d'une conjoncture favorable, la VAN du projet X est inférieure à son espérance de VAN, tandis que la VAN du projet Y est supérieure à sa propre espérance de VAN, donnant un résultat de signe négatif (– 400 000 $). Nous obtenons un signe négatif (– 600 000 $) de covariance dans le cas de la conjoncture défavorable, car, dans le cas du projet X, la VAN est supérieure à sa valeur espérée, tandis que dans le cas du projet Y, la VAN est inférieure à sa valeur espérée. On obtient comme résultat une covariance de – 1 000 000 $, indiquant une évolution des variations des VAN du projet X et du projet Y en sens contraire. Si le signe de la covariance avait été positif, les VAN mentionnées auraient varié dans le même sens dans le temps par rapport à leurs moyennes respectives. Lorsque la covariance prend une valeur nulle, il s'agit de projets indépendants, c'est-à-dire d'une absence de relation de quelque nature que ce soit, positive ou négative, entre les projets étudiés.

Précisons que la variation d'une VAN par rapport à elle-même est traduite par sa variance. Si l'on compare les résultats d'une VAN par rapport à elle-même (par exemple, la VAN du projet X par rapport à la VAN du projet X), la formule (2.1) nous permet de constater que l'on obtient la variance du projet X.

La covariance est une mesure absolue des interrelations entre résultats de taux de rendement ou de valeur actuelle nette dans le temps ; le coefficient de corrélation est une autre mesure normalisée ou « standardisée » de ces interrelations.

2.4.3. Le coefficient de corrélation

La covariance exprime de façon absolue le sens ou l'orientation des variations de résultats de deux grandeurs dans le temps ; le coefficient de corrélation mesure, en termes relatifs, la dépendance entre ces deux variables à l'intérieur de la fourchette ±1. L'avantage du coefficient de corrélation réside non seulement dans l'expression de l'orientation des relations entre variables (comme le fait la covariance), mais aussi en mettant l'accent de façon plus précise sur la force, l'intensité ou le degré de leurs interrelations. Le coefficient de corrélation $\rho_{(XY)}$ concernant deux projets X et Y est calculé à partir de la covariance :

$$\rho_{(XY)} = \frac{COV_{XY}}{(\sigma_X)(\sigma_Y)} \tag{2.2}$$

Nous savons que :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[X_i - E(X)\right]^2 p_i$$

Si deux variables s'orientent dans le même sens et exactement dans les mêmes proportions, il en résulte le degré de corrélation le plus élevé entre elles ; le coefficient de corrélation sera alors de signe positif et égal à l'unité. Dans ce cas précis, les deux variables évoluent ensemble de façon totale et complète, c'est-à-dire dans le même sens et dans les mêmes proportions.

Nous pouvons établir, à partir de la formule du coefficient de corrélation, l'expression de la covariance nécessaire au calcul de l'écart type, c'est-à-dire le risque de portefeuille. En effet, puisque :

$$\rho_{(XY)} = \frac{COV_{XY}}{(\sigma_X)(\sigma_Y)}$$

on a

$$COV_{XY} = (\rho_{(XY)})(\sigma_X)(\sigma_Y)$$

Précisons que lorsque $\rho_{(XY)}$ prend des valeurs situées entre 0 et 1, la relation de dépendance entre les taux de rendement ou les VAN des projets X et Y est positive. L'exemple qui suit précise et illustre la signification de cette dépendance, qui est d'autant plus forte que la corrélation se rapproche de 1. Les deux variables ont tendance à varier dans le même sens, mais pas nécessairement dans les mêmes proportions, lorsque le coefficient de corrélation varie entre 0 et 1. Quand $\rho_{(XY)} = +1$, la corrélation positive est parfaite et la relation est linéaire, de la forme $y = a + bx$ avec le coefficient $b > 0$. Par contre, lorsque $\rho_{(XY)}$ prend des valeurs situées entre 0 et –1, la relation de dépendance devient négative, c'est-à-dire que les variables ont tendance à évoluer en sens inverse, mais pas nécessairement dans les mêmes proportions. Cette relation se distingue par d'autant plus de force que la corrélation se rapproche de –1. Lorsque $\rho_{(XY)} = -1$, la corrélation négative est parfaite et la relation est linéaire avec cependant le coefficient $b < 0$. Enfin, dans les cas où $\rho_{(XY)} = 0$, il n'y a aucune relation entre les taux de rendement ou les VAN des deux projets considérés qui sont alors indépendants du point de vue statistique.

Calculons le coefficient de corrélation entre les valeurs actuelles nettes des projets X et Y sachant que $COV_{XY} = 1\,000\,000\,\$$, $\sigma_X = 547{,}72\,\$$ et $\sigma_Y = 1\,870{,}82\,\$$.

$$\begin{aligned}\rho_{(XY)} &= \frac{-1\,000\,000\,\$}{(547{,}72\,\$)\,(1\,870{,}82\,\$)}\\ &= -0{,}976\end{aligned}$$

Les projets X et Y se distinguent par une corrélation négative très forte, puisque le coefficient est très proche de –1. Les résultats de ces deux projets varient en sens contraire dans le temps de façon presque parfaite. Il s'agit d'une diversification très efficace, concernant deux projets, car elle assure une minimisation du risque presque la plus forte possible.

Dans un marché de valeurs mobilières, on peut considérer qu'un portefeuille est bien diversifié s'il est composé d'une trentaine de titres ou d'actions choisis au hasard. Ce portefeuille représente déjà bien fidèlement le marché, car il élimine le risque spécifique. Ce dernier est relié aux facteurs qui influencent les activités d'exploitation de l'entreprise, ainsi qu'à la nature du secteur d'activité auquel elle appartient. Il est évident, par exemple, que des dirigeants incompétents peuvent mettre l'entreprise rapidement en difficulté. En outre, une direction dont l'ensemble des pouvoirs est concentré entre les mains d'un seul homme représente habituellement un risque plus élevé par rapport à une direction collégiale, dont la continuité dans le temps est plus assurée. Le risque spécifique dépend aussi de facteurs tels que la fréquence des grèves dans une entreprise ou dans un secteur d'activité donné, de l'état de la concurrence dans un secteur et de la réaction habituelle des compétiteurs dans un champ d'activité donné face aux initiatives des entreprises concurrentes.

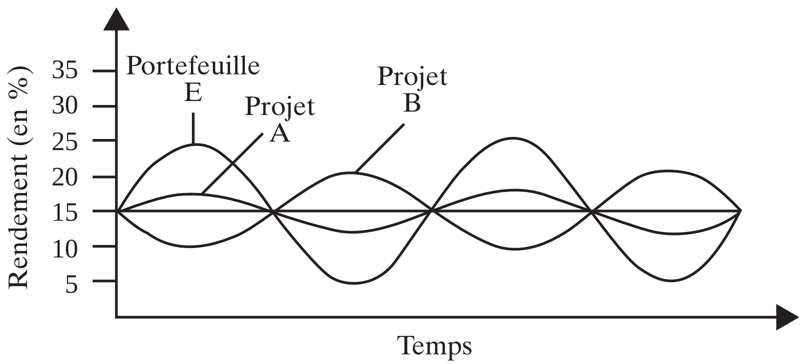
Il est important de noter que si la diversification élimine le risque spécifique, ou risque non systématique, elle ne peut cependant pas réduire le risque systématique. En effet, ce dernier, appelé aussi risque du marché, est lié aux mouvements généraux de l'économie et non aux particularités ou à la spécificité d'une entreprise donnée ou d'un secteur d'activité. Ainsi, une inflation forte qui touche l'ensemble de l'économie est en général accompagnée de taux d'intérêt élevés, d'un ralentissement de l'investissement et d'un accroissement du chômage. L'ensemble de l'économie s'installe dans la récession et les profits d'entreprise s'amenuisent rapidement.

La figure 2.4 facilite la compréhension des effets de la diversification sur le risque d'un portefeuille de projets d'investissement ou de titres. Supposons que l'entreprise E réalise un ensemble de projets dont les rendements évoluent selon la courbe E de cette figure et que deux nouveaux projets A et B mutuellement exclusifs soient envisagés. L'entreprise désire minimiser le risque à l'endroit de son portefeuille de projets. La figure 2.4 indique comment évolueraient, dans le temps, les taux de rendement respectifs des projets A et B par rapport au portefeuille existant E.

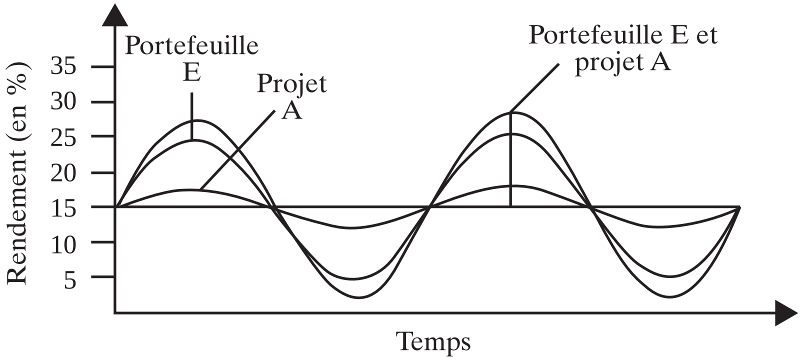
Figure 2.4

Évolution dans le temps des taux de rendement du portefeuille E

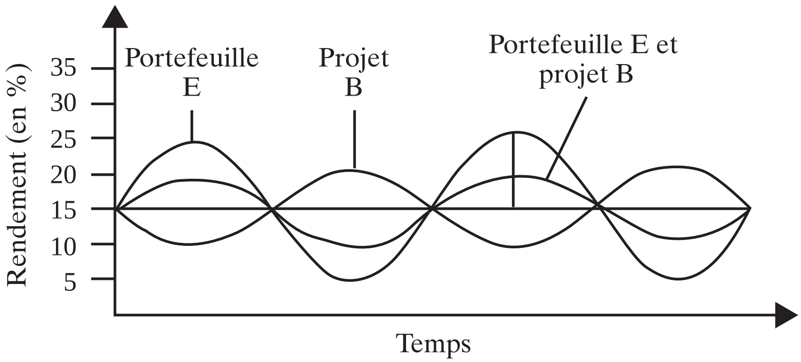
A – Par rapport aux projets A et B



B – Par rapport au projet A



C – Par rapport au projet B



Si l'entreprise choisissait le projet A, dont le taux de rendement évolue de la même façon que celui de l'ensemble de ses activités, son risque global augmenterait puisque les fluctuations du taux de rendement du projet A s'ajouteraient à celles du portefeuille E (voir la figure 2.4B). Le portefeuille actuel E de l'entreprise est corrélé de façon positive au nouveau projet A, ce qui explique pourquoi l'adoption du projet A entraînerait de plus grandes fluctuations de taux de rendement, c'est-à-dire un nouveau portefeuille à risque plus élevé.

Si c'était plutôt le projet B qui s'ajoutait à l'ensemble des activités existantes de l'entreprise, le risque global du nouveau portefeuille diminuerait, car les fluctuations de son taux de rendement seraient réduites. Le fait que le portefeuille actuel E soit corrélé de façon négative au projet B signifie que les taux de rendement du portefeuille E et du projet B évoluent en sens contraire dans le temps. Ils se neutralisent, réduisant ainsi le risque global du nouveau portefeuille (voir la figure 2.4C).

Le projet B se distingue par des variations de taux de rendement plus grandes que celles du projet A, d'où son risque propre plus élevé. Toutefois, c'est le projet B qui se distingue par une contribution plus favorable au risque global de l'entreprise, car il le réduit et, par conséquent, c'est lui qui sera adopté, toutes choses égales d'ailleurs. Ce n'est pas le risque individuel d'un projet qui importe, mais sa contribution additionnelle ou marginale au risque total de l'entreprise. Le coefficient de corrélation peut être calculé non seulement à partir de la covariance et des écarts types des variables considérées, mais aussi directement à partir de données brutes sur l'évolution simultanée de ces variables.

EXEMPLE

Considérons le cas du taux de rendement agricole d'un champ de pommes de terre. Ce taux de rendement est fonction d'unités d'engrais déversées par unité de terre. Le résultat obtenu Y (la variable dépendante) est le nombre de kilos de pommes de terre par unité de terre en fonction de différentes quantités d'engrais, représentant la variable indépendante X.

Les données suivantes sont fournies :

X	0,2	0,5	1	1,4	2
Y	12	16	18	20	18

Le coefficient de corrélation est une mesure qui indique le degré et la direction de la relation entre la variable indépendante et la variable dépendante. Ce coefficient ρ s'obtient en utilisant les données présentées ci-haut, de la façon suivante :

$$\rho = \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\left(\sqrt{n\Sigma X^2} - (\Sigma X)^2\right)\left(\sqrt{n\Sigma Y^2} - (\Sigma Y)^2\right)} \tag{2.3}$$

X	Y	X^2	Y^2	XY
0,2	12	0,04	144	2,4
0,5	16	0,25	256	8
1	18	1	324	18
1,4	20	1,96	400	28
2	18	4	324	36

Les résultats du tableau précédent montrent que :

$\Sigma X = 5{,}1$; $\Sigma Y = 84$; $\Sigma X^2 = 7{,}25$; $\Sigma Y^2 = 1\ 448$ et $\Sigma XY = 92{,}4$; d'où :

$$\rho = \frac{(5)(92,4)-(5,1)(84)}{\left(\sqrt{(5)(7,25)-(5,1)^2}\right)\left(\sqrt{(5)(1\,448)-(84)^2}\right)}$$

$$= \frac{462-428,4}{\left(\sqrt{36,25-26,01}\right)\left(\sqrt{7\,240-7\,056}\right)}$$

$$= \frac{33,6}{(3,2)(13,56)}$$

$$= \frac{33,6}{43,39}$$

$$= +0,77$$

Le coefficient de corrélation de +0,77 est positif ; il indique une variation dans le même sens de la variable indépendante X, les quantités d'engrais, et de la variable dépendante Y, les kilos de pommes de terre obtenus par unité de terre. Par ailleurs, le degré de corrélation est élevé, soit de 0,77 entre les deux variables indiquées.

2.4.4. Le coefficient de variation

L'utilisation de l'écart type ou de la variance comme mesure exclusive du risque présente l'inconvénient d'une mesure absolue, qui ne peut donc être considérée comme une référence définitive ou un indice de risque. Lorsque l'écart type est élevé, la dispersion des résultats autour de l'espérance mathématique est d'autant plus large et le risque plus grand. On peut aussi montrer que, parfois, lorsque le revenu net espéré est très élevé, un projet peut être adopté même si son écart type est élevé. Le coefficient de variation permet de remédier à la faiblesse qui caractérise la mesure, en termes absolus, du risque par l'écart type. La formule et le calcul du coefficient de variation sont présentés ci-après.

Supposons que deux projets X et Y se distinguent par les chiffres suivants caractérisant leur revenu net espéré :

	Projet X	**Projet Y**
Revenu net espéré	100 000 $	600 000 $
Écart type	5 000 $	12 000 $
Coefficient de variation	0,05	0,02

Le revenu net espéré (600 000$) ainsi que l'écart type (12 000$) du projet Y sont beaucoup plus élevés que ceux du projet X (100 000$ et 5 000$ respectivement). Les deux paramètres d'espérance des résultats et d'écart type autour de cette espérance ne semblent pas suffire, en tant que tels, pour trancher définitivement en faveur du projet X ou du projet Y. Un investisseur, selon son expérience et sa familiarisation avec le monde des affaires, constatera que, par rapport au projet X, le revenu net espéré du projet Y est six fois plus élevé, tandis que son écart type ne l'est que 2,4 fois ; par conséquent, c'est le projet Y qui représente globalement le plus d'attraits. En fait, le résultat du projet Y est assez élevé pour absorber une plus grande fluctuation de ce résultat mesurée par l'écart type. On constate également que le projet Y est moins risqué que le projet X si l'on se fie à la mesure du risque par le coefficient de variation.

Le coefficient de variation est le rapport de l'écart type d'une distribution de probabilités à sa valeur centrale, qui est la valeur espérée des résultats :

$$\frac{\sigma}{u} = \frac{\text{Écart type}}{\text{Espérance mathématique}}$$

Cette mesure en termes relatifs de la dispersion ou du risque d'un projet s'impose lorsque deux projets tels que X et Y se distinguent par des divergences importantes quant à leurs écarts types et à leurs valeurs espérées de résultats. Le coefficient de variation du projet X est égal à : 5 000$/100 000$ = 0,05 et celui de Y est égal à : 12 000$/6 000 000$ = 0,02. Le projet Y est préférable, car son espérance de revenu net est plus élevée et son risque relatif, mesuré par le coefficient de variation, plus faible.

L'écart type ne permet pas de différencier les projets selon l'importance de l'investissement effectué ; c'est le coefficient de variation qui établit si la variance élevée d'un grand projet A dénote réellement un risque plus élevé que celui d'un projet d'investissement de taille modeste B et de faible variance. Si le projet A se distingue par un coefficient de variation de 1,5 et le projet B de 2,5, on en conclut que le projet A est relativement moins risqué que le projet B.

2.5. LE RISQUE DU PORTEFEUILLE ET LES CONSÉQUENCES DE LA DIVERSIFICATION

Le risque d'un portefeuille formé de deux actifs est inférieur à la moyenne pondérée de leur risque individuel dans la mesure où le coefficient de corrélation est inférieur à l'unité. La pondération des écarts types est donnée par la proportion de chacun de ces deux actifs dans l'ensemble du portefeuille qu'ils forment. Le concept d'écart type d'actif unique ainsi que celui du coefficient de corrélation et de covariance sont indispensables à la détermination du risque d'un portefeuille formé de plusieurs actifs.

2.5.1. Le risque du portefeuille

Le risque du portefeuille est calculé par la relation suivante :

$$\sigma_p = \left[\left(X_B^2\right)\left(\sigma_B^2\right) + \left(X_C^2\right)\left(\sigma_C^2\right) + \left(2\right)\left(X_B\right)\left(X_C\right)\left(\rho_{BC}\right)\left(\sigma_B\right)\left(\sigma_C\right)\right]^{1/2} \qquad (2.4)$$

et, comme l'indique la relation (2.2), on aura aussi :

$$\sigma_p = \left[\left(X_B^2\right)\left(\sigma_B^2\right) + \left(X_C^2\right)\left(\sigma_C^2\right) + 2\left(X_B\right)\left(X_C\right)COV_{BC}\right]^{1/2} \qquad (2.5)$$

2.5.2. Le taux de rendement espéré du portefeuille

Le taux de rendement espéré du portefeuille formé des actifs B et C est calculé selon la relation suivante :

$$r_p = \left(X_B\right)\left(r_B\right) + \left(X_C\right)\left(r_C\right) \qquad (2.6)$$

où :

r_p = taux de rendement espéré du portefeuille,
X_B, X_C = proportions respectives des actifs B et C dans l'ensemble du portefeuille,
COV_{BC} = covariance entre les actifs B et C,
σ_B^2, σ_C^2 = variances respectives de B et C,
$\rho_{(B,C)}$ = coefficient de corrélation des actifs B et C,
r_B, r_C = rendement espéré de B et C.

EXEMPLE

Deux actifs, A et B, forment un portefeuille de façon équipondérée avec des taux de rendement respectifs de 15 % et de 20 % et des écarts types respectifs de 2 % et de 3 %. Ces deux actifs se distinguent par un coefficient de corrélation de –0,75. On désire établir le taux de rendement espéré ainsi que le risque de ce portefeuille A et B.

– Le taux de rendement espéré du portefeuille A et B :

$$\begin{aligned} r_p &= (0{,}50)\ (15\,\%) + (0{,}50)\ (20\,\%) \\ &= 7{,}5\,\% + 10\,\% = 17{,}5\,\% \end{aligned}$$

– L'écart type ou risque du portefeuille A et B :

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \left[(0{,}50)^2\,(2\,\%)^2 + (0{,}50)^2\,(3\,\%)^2 + (2)(0{,}50)(0{,}50)(-0{,}75)(2\,\%)(3\,\%)\right]^{1/2} \\ &= (1 + 2{,}25 - 2{,}25)^{1/2} = (1)^{1/2} = 1\,\% \end{aligned}$$

2.5.3. La diversification

La diversification d'un portefeuille d'actions ordinaires entraîne les conséquences suivantes :

- L'élimination partielle du risque global d'un portefeuille, sans perte ou sacrifice de rendement, se fait par la minimisation voire l'élimination du risque spécifique.
- Le seul risque à considérer, après l'élimination du risque spécifique, est celui du marché. Tout portefeuille se distingue par des variations de taux de rendement plus ou moins sensibles aux variations de taux de rendement du portefeuille du marché représenté par un indice boursier comme celui de la Bourse de Toronto.

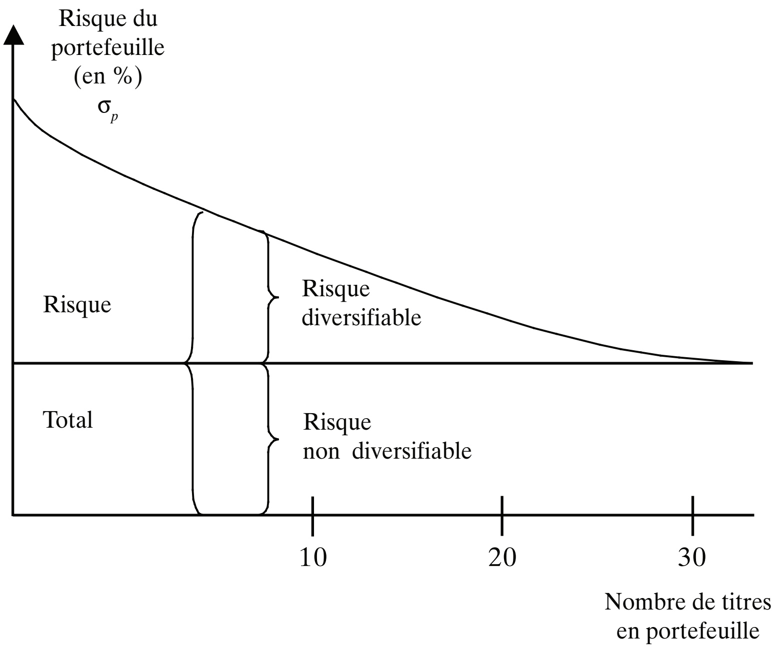
Le risque total d'un actif se décompose en risque spécifique et en risque du marché. Le risque non systématique s'explique par des facteurs propres à l'entreprise qui lui sont préjudiciables : une grève prolongée, la perte d'un client important ou des dirigeants fraudeurs, par exemple. Il n'y a donc pas de lien direct et durable entre les variations de cette composante du risque total d'un actif et les fluctuations de l'ensemble de l'activité économique dans lequel baigne l'entreprise.

D’où l’expression de risque non systématique, qui s’explique par l’absence de lien systématique ou rigoureux entre les fluctuations des taux de rendement d’un actif donné et celles du taux de rendement d’un indice boursier représentatif de l’ensemble de l’économie.

Une grande partie du risque spécifique est éliminée avec une trentaine de titres différents en portefeuille. Seul le risque systématique ou risque du marché, lié à l’évolution globale de l’économie, n’est pas diversifiable. Il est incontournable car incompressible, c’est-à-dire que le risque du marché ne peut être réduit par la diversification. Les fluctuations de l’activité économique influent directement sur les niveaux de production et de vente des entreprises ainsi que sur leurs résultats bénéficiaires, qui s’améliorent avec la phase d’expansion du cycle économique et se détériorent avec la phase de récession.

Figure 2.5

La diversification et le nombre de titres en portefeuille



Les conséquences inévitables des différentes phases du cycle économique, c’est-à-dire de l’environnement ou du marché en général, sur la performance des entreprises se traduisent par des fluctuations de taux de rendement conditionnées par des fluctuations économiques. L'entreprise n'a aucun moyen de diversifier et d'éliminer ce risque du marché qu'elle subit comme toutes les entreprises, quoiqu'à des degrés divers. C'est cette fraction du risque total qui justifie l'attribution d'une prime de risque du marché qui est une fonction croissante du risque systématique de l'entreprise. Plus ce dernier sera élevé, plus la prime de risque du marché exigée par les investisseurs sera élevé et, par conséquent, plus le taux de rendement attendu sur un titre donné s'élèvera aussi.

2.5.3.1. La mesure de l'effet de diversification

L'effet de diversification traduit la diminution du risque du portefeuille par rapport à la moyenne pondérée des écarts types respectifs des titres qui le composent. Il indique, pour une composition donnée du portefeuille, la différence entre la variabilité maximale possible de ses rendements et la variabilité effective observée.

On pose :

$$\mathrm{EDD}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i - \sigma_p \tag{2.7}$$

où :

EDD_p = effet de diversification pour une proportion donnée de ses différents titres,
x_i = proportion de l'investissement effectuée dans le titre i,
σ_i = écart type des taux de rendement du titre i,
σ_p = écart type des taux de rendement du portefeuille,

On peut aussi exprimer l'effet de diversification de façon relative :

$$\left[\frac{\mathrm{EDD}_p}{\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i}\right](100) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i - \sigma_p}{\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i}\right](100) \tag{2.8}$$

EXEMPLE

Considérons deux titres 1 et 2 formant respectivement 50 % de la valeur d'un portefeuille dont les écart types sont :

$$\sigma_1 = 10\,\% \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = 16\,\%$$

La variabilité maximale de ce portefeuille serait de 13 % dans le cas où le coefficient de corrélation $\rho_{12} = 1$. En effet :

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \left[x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2(x_1)(x_2)(\rho_{12})(\sigma_1)(\sigma_2)\right]^{1/2} \\
&= \left[(0,25)(100) + (0,25)(256) + (2)(0,25)(1)(10)(16)\right]^{1/2} \\
&= (25 + 64 + 80)^{1/2} \quad = \quad (169)^{1/2} \quad = \quad 13\ \%
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire que la variabilité maximale de ce portefeuille est donnée par la moyenne pondérée de ses écarts types :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\sigma_i = (0,5)(10\ \%) + (0,5)(16\ \%) = 13\ \% \tag{2.9}$$

On constate qu'il n'existe pas d'effet de diversification lorsque le coefficient de corrélation égale l'unité, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de réduction du risque du portefeuille. La variabilité des taux de rendement du portefeuille est maximale dans ce cas particulier.

Considérons le cas le plus fréquent de la réalité : celui d'un coefficient de corrélation inférieur à l'unité, soit $\rho_{12} = 0{,}25$. Le calcul du risque du portefeuille indique $\sigma_p = 10{,}44\ \%$ et un effet de diversification de : $EDD_p = 13\ \% - 10{,}44\ \% = 2{,}56\ \%$ et, de façon relative : $2{,}56/13 \times 100 = 19{,}69\ \%$. La diversification a permis, avec un coefficient de corrélation de 0,25 et une équipondération, c'est-à-dire des proportions égales des titres 1 et 2, de réduire le risque du portefeuille de 19,69 % par rapport à la variabilité maximale possible.

EXEMPLE

La récapitulation des différentes étapes de calcul du taux de rendement espéré et du risque d'un portefeuille formé de deux titres.

Considérons la distribution de probabilités suivante des taux de rendement attendus sur deux titres X et Y qui forment un portefeuille de façon équipondérée :

État de l'économie	Probabilité	Action X	Action Y
Récession	0,20	5 %	– 5 %
Expansion moyenne	0,40	10 %	+ 10 %
Expansion forte	0,40	20 %	+ 30 %
Taux de rendement espéré E(r)		13 %	15 %
Écart type : σ		6 %	13,41 %
Coefficient de corrélation		0,994	

Calcul du coefficient de corrélation selon la relation (2.2) :

$$\rho_{xy} = \frac{COV_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

$$COV_{xy} = (-8)(-20) \times 0,20 + (-3)(-5) \times 0,40 + (7)(15) \times 0,40 = 80$$

$$\rho_{xy} = \frac{80}{(6)\,(13,41)} = 0,994$$

Calcul du taux de rendement espéré du portefeuille équipondéré :

$$E(r_p) = (13) \times 0,50 + (15) \times 0,50 = 14\,\%$$

Calcul du risque du portefeuille :

$$\sigma_p = \left[(0,5)^2\,(6)^2 + (0,5)^2\,(13,41)^2 + 2(0,5)\,(0,5)\,(0,994)\,(6)\,(13,41)\right]^{1/2} = 9,69\,\%$$

Calcul de la moyenne pondérée des risques individuels des deux titres X et Y qui mesure le risque maximal que peut atteindre ce portefeuille :

$$\sigma_{\max i} = (6) \times 0,50 + (13,41) \times 0,50 = 9,70\,\%$$

La comparaison du risque de portefeuille maximal possible de 9,70 % au risque du portefeuille X et Y de 9,69 % indique que l'effet de diversification est négligeable. L'explication est simple : le coefficient de corrélation ρ_{xy} de 0,994 est très proche de 1, indiquant une corrélation presque parfaite positive. Nous savons que dans le cas où le coefficient de corrélation est égal à l'unité, il n'existe pas d'effet de diversification et, par conséquent, à 0,994, la diversification est insignifiante.

2.6. LE MODÈLE DU MARCHÉ

Le modèle du marché établit la relation entre les variations du taux de rendement d'un titre et celles d'un indice boursier représentant le comportement de l'ensemble de l'économie dans le temps. Ce dernier indice représente le portefeuille du marché, c'est-à-dire le portefeuille d'actifs risqués optimal.

2.6.1. Le risque du marché

Le coefficient β, appelé risque du marché ou risque systématique, indique la relation qui existe entre les fluctuations du taux de rendement d'un actif donné *j* et celles de l'indice du marché, c'est-à-dire de la Bourse des actions ordinaires. Le coefficient bêta est calculé de la façon suivante :

$$\beta_i = \frac{\text{COV}r_j,\ r_m}{\text{COV}r_m,\ r_m} = \frac{\text{COV}r_j,\ r_m}{\sigma^2_{r_m}} \tag{2.10}$$

$$\frac{\text{Covariance de l'actif } j \text{ avec le portefeuille du marché}}{\text{Variance du portefeuille du marché}}$$

$$= \frac{n\Sigma r_j,\ r_m - \left(\Sigma r_j\right)\left(\Sigma r_m\right)}{n\Sigma r_m^2 - \left(\Sigma r_m\right)^2}$$

où :

β = niveau du risque systématique ou risque du marché,

n = nombre d'observations,

r_j = taux de rendement observé ou historique d'un titre,

r_m = taux de rendement observé ou historique du marché ou de l'indice boursier.

Les actifs dont les taux de rendement varient de la même façon que ceux du marché sont moins risqués que les actifs dont les taux de rendement varient plus que ceux du marché. Les premiers ont un bêta égal à l'unité et les seconds un bêta supérieur.

En effet, la covariance du portefeuille du marché par rapport à lui-même est sa variance, et le bêta du marché est égal à l'unité :

$$\beta_m = \frac{COV r_m, r_m}{\sigma^2_{r_m}} = \frac{\sigma^2_{r_m}}{\sigma^2_{r_m}} = 1$$

D'où l'explication que les actifs plus risqués que le portefeuille du marché ont un bêta supérieur à 1, et ceux dont le risque est inférieur à celui du marché se distinguent par un bêta inférieur à 1. Les actifs sans risque, comme les obligations du gouvernement fédéral canadien, ont un bêta nul.

Notons que le portefeuille du marché, représenté par un indice boursier, devrait comprendre, en principe, tous les actifs transigés sur le marché selon la proportion de leur valeur marchande.

2.6.2. Le modèle du marché et la ligne caractéristique (LC)

Le modèle du marché pour un actif *j* est représenté par la ligne caractéristique. Il prend la forme suivante :

$$r_{jt} = \alpha_j + (\beta_j)(r_{mt}) + e_{jt} \tag{2.11}$$

α_j = constante propre ou particulière à l'actif *j*,

β_j = coefficient de risque du marché de l'actif *j*,

e_{jt} = erreur résiduelle de régression censée être négligeable.

L'actif *j* peut être aussi bien un titre qu'un portefeuille ou un projet d'investissement. La ligne caractéristique (LC) établit un lien entre le taux de rendement d'un actif *j* soit (r_j), et celui du marché (r_m). La LC est une droite de régression. Les coefficients α_j et β_j de la relation (2.11) sont exprimés ci-après, dans l'exemple suivant, selon les relations (2.12) et (2.13). Le modèle du marché est une deuxième approche pour la détermination du risque du marché β_j. Ce dernier est la pente de la ligne caractéristique LC.

EXEMPLE

Considérons les taux de rendement mensuels suivants d'un titre *j* et ceux de l'indice boursier *m* représentatif du marché sur une durée de quatre mois (un échantillon de 4 observations pour les fins de simplification) :

	Mois				Moyenne
	1	2	3	4	
Rendement de l'action *j* (r_j)	4 %	6 %	6 %	–2 %	3,5 %
Rendement du portefeuille du marché (r_m)	5 %	–1 %	8 %	–4 %	2 %

Nous allons tenter d'établir la relation entre le taux de rendement du titre *j* et celui du marché, représentée par une droite appelée la ligne caractéristique. La détermination des coefficients de la régression linéaire α_j et β_j facilite l'établissement de cette relation à partir du nombre d'observations $n = 4$.

$$\alpha_j = \frac{\Sigma r_j \Sigma r_m^2 - \Sigma r_m \Sigma r_j r_m}{n\Sigma r_m^2 - \left(\Sigma r_m\right)^2} \tag{2.12}$$

$$\beta_j = \frac{n\Sigma r_j \ \Sigma r_m^2 - \Sigma r_m \ \Sigma r_j r_m}{n\Sigma r_m^2 - \left(\Sigma r_m\right)^2} \tag{2.13}$$

Ainsi :

r_m	r_j	r_m^2	$r_j r_m$
5 %	4 %	25 %	20 %
–1	6	1	–6
8	6	64	48
–4	–2	16	8

$$\Sigma r_m = 8 \qquad \Sigma r_j = 14 \qquad \Sigma r_m^2 = 106 \qquad \Sigma r_j r_m = 70$$

Nous pouvons déterminer les coefficients suivants de la droite de régression :

$$\alpha_j = \frac{14 \times 106 - 8 \times 70}{4 \times 106 - 8 \times 8} = \frac{924}{360} = 2,57$$

$$\beta_j = \frac{4 \times 70 - 14 \times 8}{4 \times 106 - 8 \times 8} = \frac{168}{360} = 0,47$$

Le titre *j* a un risque systématique faible, car ses taux de rendement varient proportionnellement beaucoup moins que ceux du marché. Ils réagissent, en moyenne, de ±0,47 % pour chaque variation de ±1 % du taux de rendement du portefeuille du marché. L'équation de la droite de régression ou ligne caractéristique est la suivante :

$$r_j = 2{,}57 + (0{,}47)\ (r_m)$$

Représentons-la graphiquement par la figure 2.6 :

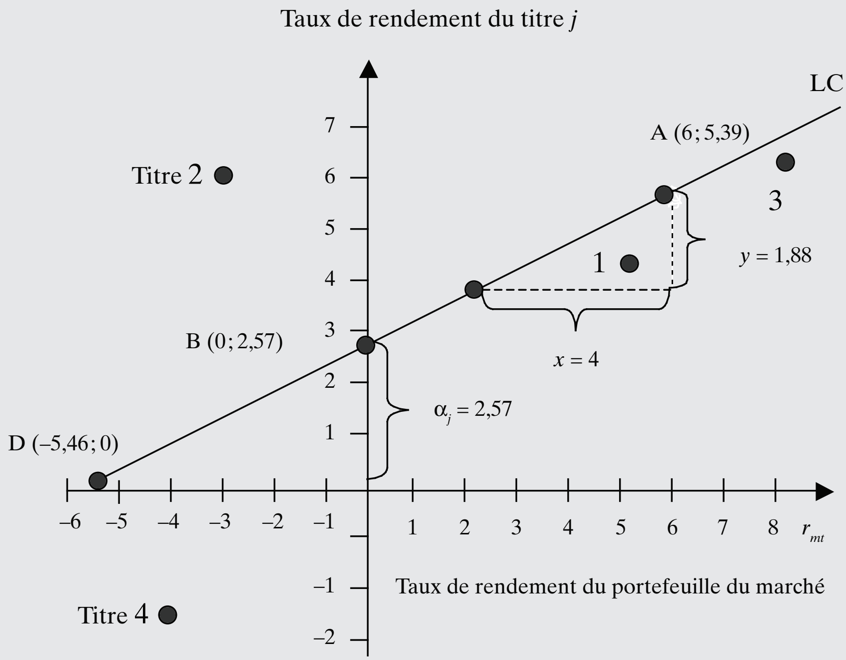
NOTE :

Les renseignements fournis par la ligne caractéristique sont les suivants : à un taux de rendement donné du marché correspond un taux de rendement du titre *j*. Dans le cas où le marché affiche un taux de rendement de 6 %, on s'attend à ce que le titre *j* ait un taux de rendement de 5,39 % (voir le point A de la LC sur la figure 2.6).

Toute droite, y compris la LC, se distingue par sa pente et par son point d'intersection avec l'axe vertical des ordonnées Y lorsque X = 0.

Figure 2.6

La ligne caractéristique : la relation entre le titre *j* et le portefeuille du marché



La pente de la LC est appelée le facteur bêta (β) du titre j et son point d'intersection avec l'axe des Y est illustré par le symbole α. Le facteur β_j, tel qu'indiqué dans la relation 9, peut aussi être calculé de la façon suivante :

$$\beta_j = \frac{\text{COV}r_j,\ r_m}{\text{COV}r_m,\ r_m} = \frac{\text{COV}r_j,\ r_m}{\sigma^2_{r_m}}$$

Déterminons ces deux covariances en nous basant sur l'échantillon considéré dans cet exemple :

$$\text{COV}r_j,\ r_m = \sum_{t=1}^{n}\left[\left(r_{j,t} - \bar{r}_j\right)\left(r_{m,t} - \bar{r}_m\right)\right]\left(\frac{1}{n-2}\right) \qquad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
= \ & (\ 0{,}04 - 0{,}035)\ (\ 0{,}05 - 0{,}02) &= &\ \ 0{,}000\ 15\\
& (\ 0{,}06 - 0{,}035)\ (-0{,}01 - 0{,}02) &= &\ -0{,}000\ 75\\
& (\ 0{,}06 - 0{,}035)\ (\ 0{,}08 - 0{,}02) &= &\ \ 0{,}001\ 50\\
& (-0{,}02 - 0{,}035)\ (-0{,}04 - 0{,}02) &= &\ \ \underline{0{,}003\ 30}\\
& & &\ \ 0{,}004\ 20
\end{aligned}$$

Nous obtenons la covariance en divisant cette somme totale par le nombre d'observations moins deux :

$$\text{COV}r_j,\ r_m = \frac{0{,}004\ 2}{4 - 2} = 0{,}002\ 1$$

Calculons la covariance σr^2_m du rendement du marché selon la ralation suivante :

$$\sigma r^2_m = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(r_m - \bar{r}_m\right)^2}{n - 2}$$

$$\begin{aligned}
= \ & (\ 0{,}05 - 0{,}02)^2 = 0{,}000\ 9\\
& (-0{,}01 - 0{,}02)^2 = 0{,}000\ 9\\
& (\ 0{,}08 - 0{,}02)^2 = 0{,}003\ 6\\
& (-0{,}04 - 0{,}02)^2 = \underline{0{,}003\ 6}\\
= \ & \qquad\qquad\qquad\quad\ 0{,}009\ 0
\end{aligned}$$

et

$$\text{COV}r_m,\ r_m = \sigma r^2_m = \frac{0{,}009}{4 - 2} = 0{,}045$$

Le calcul du facteur bêta s'établit à 0,47 :

$$\beta_j = \frac{0,002\,1}{0,004\,5} = 0,47$$

Ce résultat a déjà été obtenu en déterminant la pente de la ligne caractéristique selon l'équation 2.12.

2.7. FRONTIÈRE EFFICACE ET CHOIX DE PORTEFEUILLE SELON LA COMBINAISON RISQUE-RENDEMENT DE L'INVESTISSEUR

La figure 2.7 comprend des portefeuilles d'actifs risqués selon le taux de rendement $E(r_p)$ et le risque σ_p correspondant. Les différents points représentant les actifs risqués forment l'ensemble des portefeuilles disponibles sur le marché. La frontière efficace est formée par la courbe XYZ qui enveloppe l'ensemble des portefeuilles existants sur le marché. Les portefeuilles X, Y et Z sont efficients parce qu'ils sont situés sur la frontière efficace qui est le lieu géométrique des portefeuilles qui dominent, car à un risque donné correspond le taux de rendement le plus élevé et à un taux de rendement donné s'associe le risque le plus faible.

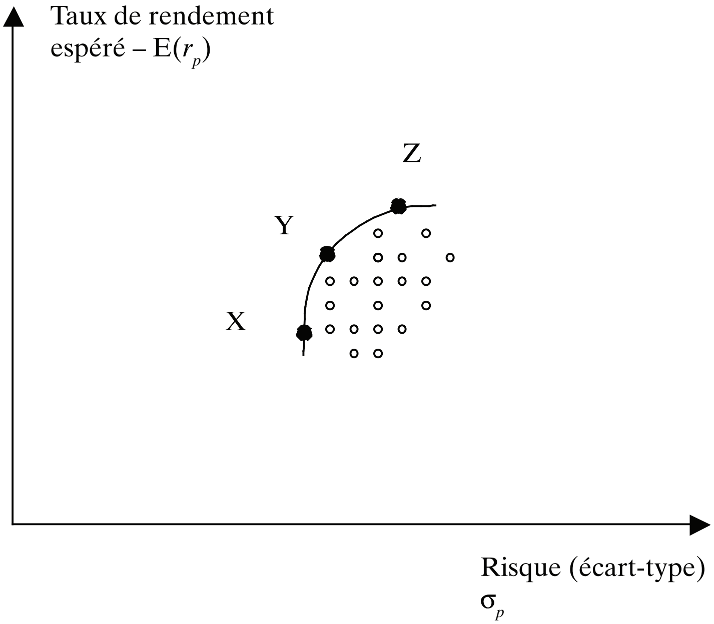
2.8. LE CHOIX DU PORTEFEUILLE EN PRÉSENCE D'UN ACTIF SANS RISQUE

La frontière efficace et le choix de portefeuille ont été considérés, dans la section précédente, dans un contexte de titres exclusivement risqués.

Il est utile et réaliste d'ajouter un titre sans risque, comme les bons du Trésor du gouvernement fédéral, à la détermination de la frontière efficace et à l'analyse du choix de portefeuille par les investisseurs. Utile car les possibilités et les combinaisons de portefeuille d'investissement sont meilleures (un taux de rendement plus élevé pour un même risque, et le risque le plus faible pour un taux de rendement donné) comparativement au choix de portefeuille en l'absence du titre sans risque. L'ajout de ce dernier au modèle d'analyse du choix de portefeuille est réaliste, car un nombre considérable de bons du Trésor et de titres à long terme du gouvernement fédéral circulent sur le marché.

Figure 2.7

La frontière efficace



L'explication des caractéristiques de portefeuilles efficients est donnée dans le cadre de marchés parfaits dont les traits distinctifs sont les suivants :

- L'investisseur est rationnel et poursuit l'objectif de maximisation de la richesse.
- L'investisseur a une aversion envers le risque et décide selon la règle de la moyenne-variance.
- Il n'existe ni frais de transaction ni impôts.
- Les anticipations ou perceptions des investisseurs sont homogènes.
- Il existe un seul et unique taux d'intérêt sur le marché (le taux de prêt est égal au taux d'emprunt).
- Il n'existe pas de risque de faillite.

L'objectif poursuivi par l'analyse du choix de portefeuille consiste à déterminer la relation entre le taux de rendement $E(r_p)$ d'un portefeuille parfaitement diversifié et son risque (l'écart type).

Cette relation est illustrée par le modèle suivant :

$$\mathrm{E}(r_p) = r_f + \left[\frac{\mathrm{E}\left(r_m\right) - r_f}{\sigma_m}\right]\left(\sigma_p\right) \qquad (2.15)$$

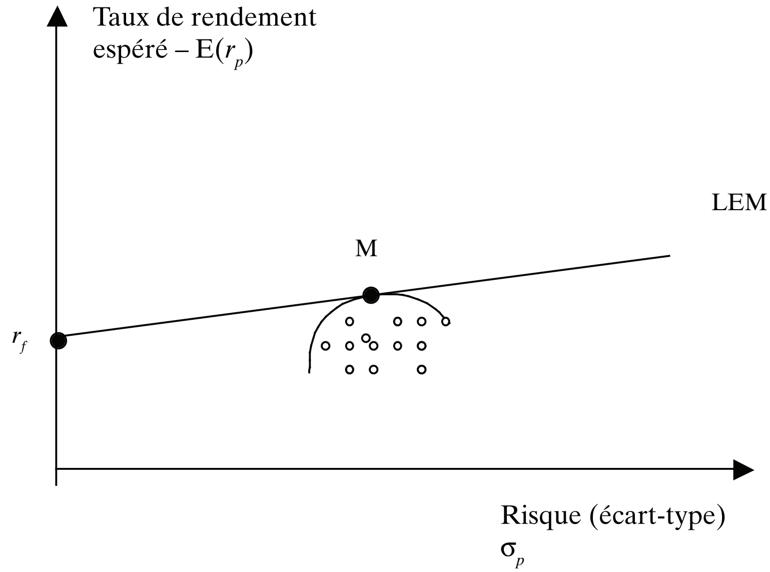
où

$\mathrm{E}(r_p)$ = le taux de rendement espéré du portefeuille parfaitement diversifié P,
r_j = le taux de rendement du titre sans risque comme les bons du Trésor,
$\mathrm{E}(r_m)$ = taux de rendement espéré du marché (M), soit celui d'un indice boursier représentatif,
σ_m = le risque du portefeuille du marché (M),
σ_p = le risque du portefeuille P.

La figure 2.8 représente la ligne d'équilibre du marché, c'est-à-dire graphiquement la relation risque-rendement d'un portefeuille parfaitement diversifié, en présence d'un actif sans risque.

Figure 2.8

La ligne d'équilibre du marché (LEM)



Quelques exemples permettent d'illustrer l'utilité et la signification de la relation du choix de portefeuille pour l'investisseur.

EXEMPLE 1

Le gestionnaire d'un fonds B a établi le risque acceptable de ses épargnants à 2 %. Les statistiques financières suivantes sont disponibles :

- Le taux de rendement des bons du Trésor (r_f) est de 4 %.
- L'espérance de rendement du marché E(r_m) s'élève à 10 %.
- L'écart type (σ_m) de l'E(r_m) se chiffre à 3 %.

Le gestionnaire du fonds B désire calculer l'espérance du taux de rendement du portefeuille de ce fonds, soit E(r_p), compatible avec le risque toléré de 2 % selon la relation (2.14) :

$$\begin{aligned} E(r_p) &= 4\,\% + \left[\frac{10\,\% - 4\,\%}{3\,\%}\right](2\,\%) \\ &= 4\,\% + (2\,\%)(2\,\%) \\ &= 8\,\% \end{aligned}$$

Les épargnants qui placent leurs économies dans le fonds B sont informés qu'ils peuvent s'attendre à obtenir un taux de rendement de 8 % pour le niveau de risque de 2 % qu'ils acceptent, c'est-à-dire qu'ils sont prêts à prendre ou à assumer.

EXEMPLE 2

Le gestionnaire d'un fonds C a recueilli les exigences de rendement de ses épargnants, soit 14 %. Les statistiques financières de l'exemple 1 sont toujours valables. Les épargnants dont les fonds sont déposés dans C désirent savoir quel niveau de risque du portefeuille correspond à un taux de rendement de 14 % qu'ils exigent.

La relation (2.14) aidera le gestionnaire à établir le risque σ_p du portefeuille C et à le faire connaître aux épargnants de ce fonds :

$$14\,\% = 4\,\% + \left(\frac{10\,\% - 4\,\%}{3\,\%}\right)\sigma_p$$

$$14\,\% = 4\,\% + (2\,\%)(\sigma_p)$$

et

$$\sigma_p = \frac{10\,\%}{2} = 5\,\%$$

La relation de la ligne d'équilibre du marché permet de déterminer le taux de rendement espéré pour différents portefeuilles risqués en fonction de leur degré de risque et vice versa. Le calcul du taux de rendement d'un titre en particulier et non plus d'un portefeuille se fait en franchissant une autre étape par l'adoption du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF).

2.9. LE MODÈLE D'ÉVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS (MEDAF)

Le MEDAF établit la relation exprimant le taux de rendement d'un actif *i* en fonction de son risque systématique et compte tenu du taux de rendement du marché. Nous considérons toujours le contexte de marchés parfaits. Le marché est représenté par un indice boursier comme celui de la Bourse de Toronto :

$$\begin{pmatrix}\text{Taux de rendement}\\ \text{espéré d'un actif } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Taux de rendement}\\ \text{sans risque}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\text{Prime de rendement par}\\ \text{unité de risque du marché}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Niveau de risque systématique}\\ \text{de l'actif } i\end{pmatrix}$$

$$E(r_i) = r_f + \left[E(r_m) - r_f\right]\beta_i$$

Cette équation est celle de la ligne d'équilibre LET. Notons que :

$E(r)$ = taux de rendement requis espéré par le marché sur un actif *i* de risque systématique β_i,

$E(r_m)$ = taux de rendement espéré du marché ou d'un portefeuille du marché représentatif de toute l'économie,

r_f = taux sans risque illustré par le taux de rendement des bons du Trésor,

β_i = mesure du niveau du risque systématique de l'actif *i* ; ce risque qui dépend de l'évolution de la conjoncture économique n'est pas diversifiable. C'est un risque inévitable, incontournable, car lié à des événements macroéconomiques.

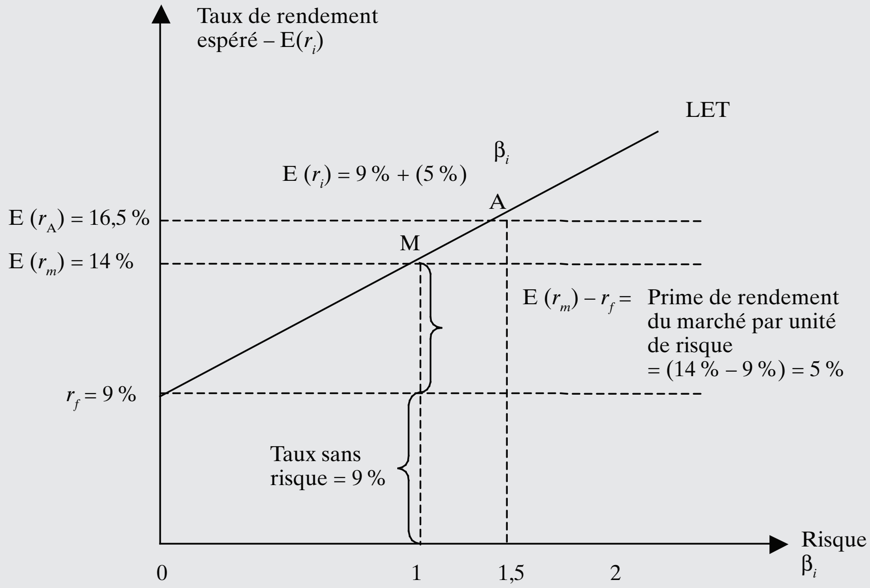
EXEMPLE

La firme A désire calculer le taux de rendement espéré exigé par le marché pour son titre dont le risque du marché est de $\beta = 1{,}5$; l'espérance de rendement de la Bourse de Toronto est égal à 14 %, le taux des bons du Trésor se situant à 9 %. La relation ci-haut permet d'établir le taux de rendement espéré sur le titre A tel qu'indiqué dans la figure 2.9.

$$\begin{aligned} E(r_A) &= 9\,\% + [14\,\% - 9\,\%]\ (1{,}5) \\ &= 16{,}5\,\% \end{aligned}$$

Figure 2.9

La ligne d'équilibre des titres (LET)



Il est évident que si l'ensemble de l'économie est en forte expansion, les ventes et les résultats d'une entreprise donnée sont susceptibles de s'améliorer et vice versa. D'où l'importance d'établir le lien qui existe entre la performance d'une entreprise et celle de toute l'économie. Le coefficient bêta traduit comment le taux de rendement d'un actif donné évolue ou se comporte par rapport aux changements du taux de rendement d'un indice boursier représentant l'économie globale du pays.

Le coefficient bêta n'est pas le seul facteur qui détermine l'évaluation d'une action ordinaire. En d'autres termes, le MEDAF comporte d'autres variables comme le taux sans risque et le taux de rendement espéré du marché M [soit $E(r_m)$] qui influencent et contribuent à la fixation du prix des actions ordinaires via la détermination du taux de rendement attendu par le marché sur cette action. Le taux de rendement sans risque est représenté par celui des bons du Trésor du gouvernement central.

Le portefeuille de l'indice boursier du marché M est composé d'actifs risqués et représente donc le taux de rendement risqué ; ce portefeuille se distingue par des proportions optimales des différents actifs risqués composant l'indice boursier.

Le risque total d'une action ordinaire se décompose en risque spécifique et en risque systématique. Le premier risque est propre à la firme et peut être éliminé par la diversification et, de ce fait, n'est pas pertinent pour fixer la rémunération d'une action ordinaire tel qu'exigé par le marché.

Le risque systématique ou risque du marché bêta est le critère fondamental de la détermination du taux de rendement exigé par les actionnaires et, par conséquent, de la fixation du prix de l'action.

Notons que le MEDAF est une innovation majeure de la finance moderne, car il permet de déterminer, pour un titre ou actif donné i risqué, le taux de rendement auquel s'attend l'investisseur en fonction du risque du marché de cet actif. Le taux de rendement ainsi déterminé est utilisé comme taux d'actualisation des flux monétaires générés par l'actif considéré, afin d'en déterminer la valeur marchande.

Un exemple simple permet d'illustrer comment le prix d'un actif donné est établi à partir des flux monétaires qu'il génère et sur la base du taux de rendement exigé par le marché. Supposons qu'un actif ait une durée de vie d'une année seulement et qu'aujourd'hui, au temps $t = 0$, on prévoit qu'à la fin de cette année il rapportera des flux monétaires de 1 200 000 $. Supposons également que le taux de rendement exigé sur un actif de même catégorie de risque soit de 20 %. Le prix de cet actif, aujourd'hui, s'établirait à :

$$\frac{1\,200\,000\,\$}{1+0,20} = 1\,000\,000\,\$$$

Le gestionnaire financier a, avec le MEDAF, un outil précieux de calcul, d'analyse et de gestion des investissements de la firme. Il faut tenter, dans le cadre de ce chapitre, de comprendre les caractéristiques générales et les propriétés du MEDAF et de le comparer à d'autres approches de détermination du taux de rendement d'un actif risqué, afin de le situer par rapport à l'état actuel de la science financière dans le domaine de l'évaluation du prix d'un actif risqué à partir du taux de rendement exigé sur cet actif.

Le MEDAF a permis aux gestionnaires financiers d'améliorer les décisions d'investissements risqués ainsi que celles de leur financement. L'une des principales hypothèses restrictives du MEDAF est celle de considérer les décisions dans un contexte de marché parfait. Les caractéristiques du marché parfait sont toujours : la disponibilité de l'information très rapidement et gratuitement, l'absence de frais de transaction et d'impôt, la divisibilité parfaite des investissements, l'existence d'un seul taux de prêt et d'emprunt, la détermination des prix par la loi de l'offre et de la demande. Ajoutons l'aversion des investisseurs pour le risque ainsi que l'hypothèse que leurs décisions sont basées sur la relation moyenne-variance.

2.10. LE MODÈLE DE L'ARBITRAGE (APT)

Plusieurs auteurs ont critiqué le MEDAF en se demandant s'il est logique de faire dépendre le risque d'un actif d'un seul facteur de sensibilité au marché. Le risque et le rendement d'un titre sont influencés par plusieurs facteurs plutôt que seulement par le comportement du rendement d'un titre par rapport à celui de l'ensemble du marché.

Le modèle de l'arbitrage est une rupture par rapport au MEDAF, c'est-à-dire qu'il ne développe pas et n'approfondit pas ce dernier, mais il constitue une approche nouvelle d'évaluation des actifs. Le modèle de l'arbitrage (APT) est présenté comme un grand progrès par rapport au MEDAF. L'APT est destiné à remplacer le MEDAF en considérant que le risque d'un actif est affecté par plusieurs facteurs économiques et financiers et non plus par un seul facteur de risque (risque du marché) bêta.

Le risque d'un titre s'explique, selon le modèle de l'APT, par sa sensibilité à des changements non anticipés de facteurs économiques majeurs. En d'autres termes, le taux de rendement observé d'un titre varie de façon différente de son taux de rendement espéré à cause de changements non prévus des facteurs suivants :

- changements non prévus de la production industrielle ;
- changements non prévus des taux d'inflation ;
- changements non prévus de la structure des taux d'intérêt ;
- changements non prévus de la différence entre les taux d'intérêt des obligations à risque élevé et de celles à risque faible.

Ces quatre facteurs sont censés fournir plus d'information sur les variations des taux de rendement des titres que ne le font les autres facteurs ou grandeurs économiques.

Le modèle de l'APT prend la forme suivante :

$$\mathrm{E}\left(r_i\right) = r_f + \left(s_{i1}\right)\left(\beta_1\right) + \left(s_{i2}\right)\left(\beta_2\right) + \ldots \left(s_{ij}\right)\left(\beta_{\mathrm{j}}\right) + \ldots \left(s_{in}\right)\left(\beta_n\right) \qquad (2.16)$$

où :

$\mathrm{E}(r_i)$ = le taux de rendement espéré du titre *i*,

r_f = le taux sans risque,

β_j = la sensibilité des taux de rendement du titre *i* aux changements non prévus du facteur économique *j*,

s_{ij} = la prime de risque du marché correspondant aux changements non prévus du facteur économique *j*,

n = le nombre de facteurs économiques considérés.

Le taux de rendement espéré offert par un titre ou par un portefeuille est d'autant plus élevé qu'il est sensible aux changements non prévus des quatre facteurs économiques importants mentionnés ci-haut. Sinon, l'investisseur pourrait substituer aux titres du portefeuille d'autres titres présentant les mêmes sensibilités, mais se distinguant par des taux de rendement espérés plus élevés. Or, selon la théorie financière, à l'équilibre, il n'y a pas de «repas gratuit» (ou *free lunch*), c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de réaliser des profits sans risque avec des titres risqués.

Le MEDAF a été critiqué parce qu'il repose sur l'hypothèse d'un marché parfait qui simplifie la réalité. En effet, des études empiriques portant sur le MEDAF indiquent que les taux de rendement des portefeuilles à bêta faible sont en réalité plus élevés que ceux calculés par le modèle et vice versa. Les résultats des tests empiriques établissent aussi que la prime de risque par unité de risque du marché bêta, soit $[E(r_m) - r_s]$ est inférieure à celle obtenue à l'aide du MEDAF. Certains auteurs considèrent que, de toute façon, le MEDAF est difficile sinon impossible à tester, car il est basé sur des rendements espérés, non observables.

Le modèle de l'arbitrage (APT) a pour objet de compléter le MEDAF en considérant que plusieurs variables affectent le rendement espéré d'un actif et non plus une seule variable comme c'est le cas avec bêta. Le modèle de l'APT est attrayant, mais il n'y a pas, à l'heure actuelle, de tests empiriques qui le valident de façon décisive. Ce modèle représente une voie prometteuse pour l'avenir mais ne peut, dans l'état actuel des choses, en tant que tel, remplacer le MEDAF dans l'évaluation des actifs financiers.

EXEMPLE

Supposons que l'on étudie le comportement des taux de rendement mensuels de 1 000 titres, à l'aide de l'analyse factorielle, en retenant les quatre facteurs économiques précités censés influencer le risque et le rendement des titres risqués. Supposons qu'en utilisant le modèle de l'APT, à l'aide des coefficients β_j calculés par l'analyse du comportement des 1 000 titres considérés, l'on obtienne la relation suivante :

$$E(r) = 0{,}045 + 1{,}360\ \beta_{i1} + 1{,}875\ \beta_{i2} - 0{,}625\ \beta_{i3} - 1{,}98\ \beta_{i4}$$

où :

- 0,045 représente le taux sans risque tel que fourni par le modèle,
- les valeurs 1,360, 1,875, –0,625 et –1,98 représentent les primes de risque de chacun des quatre facteurs économiques considérés,
- β_{i1}, β_{i2}, β_{i3} et β_{i4} représentent respectivement les sensibilités du titre *i* par rapport aux quatre facteurs économiques en question.

Le modèle de l'APT, décrit dans la relation (2.15), peut être utilisé pour estimer les taux de rendement attendus par le marché pour une série d'actions de sociétés. Une analyse de régression permet : 1) d'établir les liens ou les relations qui existent entre les taux de rendement d'actions de sociétés et les quatre facteurs économiques significatifs étudiés ; 2) les coefficients β_{ij} qui mesurent la sensibilité du taux de rendement de chaque action de société par rapport à chacun des quatre facteurs économiques considérés. Supposons que l'on obtienne les résultats suivants pour le titre i :

$$\beta_{i1} = 0{,}07\ ;\ \beta_{i2} = 0{,}035\ ;\ \beta_{i3} = -0{,}03 \text{ et } \beta_{i4} = 0{,}04$$

On peut maintenant calculer, à l'aide du modèle de l'APT, le taux de rendement espéré par le marché sur le titre i.

$$\begin{aligned} E(r_i) &= 0{,}045 + (1{,}360)(0{,}07) + (1{,}875)(0{,}035) \\ &\quad + (-0{,}625)(-0{,}03) + (-1{,}98)(0{,}04) \\ &= 0{,}045 + 0{,}095\,2 + 0{,}065\,63 + 0{,}018\,75 - 0{,}079\,2 \\ &= 0{,}145\,38 \text{ ou } 14{,}538\ \% \end{aligned}$$

RÉSUMÉ

L'analyse de la rentabilité et du risque d'un projet unique est préalable à l'étude de la gestion du risque d'un ensemble ou d'un portefeuille de projets d'investissement. Une entreprise peut réaliser simultanément plusieurs projets d'investissement durant l'année avec pour résultat des fluctuations de taux de rendement des différents projets qui ne se font pas dans le même sens et se neutralisent ainsi en partie. L'analyse de la covariance du coefficient de corrélation et du coefficient de variation permet de mieux situer la notion du risque et de préciser sa mesure.

L'avantage de la diversification est de réduire le risque d'un portefeuille d'actifs tout en préservant son taux de rendement moyen lorsque les rendements individuels des actifs considérés ne sont pas parfaitement corrélés. Il en résulte une augmentation du rendement de l'investisseur par unité de risque. Une diminution de la variabilité du taux de rendement d'un portefeuille, toutes choses égales, est favorable à l'investisseur, car elle minimise le risque spécifique. Le risque auquel fait face l'investisseur est le risque du marché, qui devient la référence incontournable en matière de rémunération d'un actif. Nous avons souligné que le risque de marché bêta n'était pas diversifiable, mais lié à des événements macroéconomiques tels qu'une récession ou une expansion économique. Le risque du marché d'un portefeuille d'actifs est incompressible, puisqu'il n'est pas diversifiable. Il est égal à la moyenne pondérée des bêtas individuels des actifs qui constituent ce portefeuille. Le modèle du marché, la théorie du portefeuille, le modèle d’évaluation des actifs financiers et l’APT améliorent et mettent en évidence les facteurs qui permettent de déterminer les taux de rendement exigés et la valeur intrinsèque des actifs.

QUESTIONS

1. Définir les contextes de certitude, de risque et d’incertitude.
2. Quelle est la différence entre une variable aléatoire discrète et une variable aléatoire continue ?
3. Expliquer la covariance et sa signification pour déterminer le risque d’un portefeuille.
4. En quoi consiste le coefficient de corrélation, qu’il soit égal à –1, 0 ou +1 ?
5. Expliquer la théorie de la diversification et ses conséquences pour la gestion d’un portefeuille d’actifs risqués.
6. Comment est mesuré l’effet de diversification ?
7. Quels sont les facteurs qui influencent le modèle du marché ?
8. Expliquer la théorie du portefeuille.
9. Expliquer la signification et la portée du MEDAF en matière d’évaluation des actifs.
10. Quelles sont les caractéristiques essentielles de l’*Arbitrage Pricing Theory* (APT) ?

PROBLÈMES

1. LES TITRES K ET L

Il vous semble que des relations intéressantes peuvent êtres établies en observant les taux de rendement passés du marché et ceux des titres K et L :

Année	r_m	r_K	r_L
1	25 %	20 %	35 %
2	30 %	22 %	40 %
3	32 %	25 %	34 %
4	–10 %	–6 %	6 %
5	10 %	7 %	18 %

Par ailleurs, l'analyse des prévisions économiques de l'évolution de l'ensemble des activités durant la prochaine période vous permet d'établir une distribution de probabilités des taux de rendement possibles du marché :

Probabilités	Rendement possible
0,2	–10 %
0,1	12 %
0,3	15 %
0,1	20 %
0,3	35 %

On suppose que le taux exempt de risque soit de 7,5 %.

- **On vous demande :**

a) de calculer les coefficients α et β des titres K et L et d'établir les équations de leurs lignes caractéristiques respectives.

b) d'établir l'équation de la ligne d'équilibre des titres (LET) qui permet de calculer le taux de rendement exigé d'un titre quelconque en fonction de son risque systématique. Représenter graphiquement.

c) d'expliquer selon que le portefeuille d'un investisseur soit situé sur la LET au point r_f, entre r_f et le point M ; au point M et enfin au-delà de M, la composition de ce portefeuille en titres risqués, en prêts ou en emprunts.

d) de déterminer quels sont les taux de rendement exigés par les investisseurs respectivement sur les titres K et L.

e) d'établir si le titre N, dont le bêta = 1,1, satisfait la relation d'équilibre rendement-risque. N se distingue par un taux de rendement du dividende de 10 % et son dividende est passé de 2 $ à 4,318 $ en 10 ans ; utiliser le modèle de Gordon pour calculer le taux de rendement du titre N.

- **Solutions suggérées**

a) Pour déterminer les valeurs des coefficients α et β, dressons le tableau suivant ci-dessous, afin de pouvoir appliquer les relations suivantes pour le titre K par exemple :

$$\alpha_k = \frac{\Sigma r_k \ \Sigma r_m^2 - \Sigma r_m \Sigma r_k r_m}{n\Sigma_m^2 - \left(\Sigma r_m^2\right)}$$

$$\beta_k = \frac{n\Sigma r_k r_m - \Sigma r_k \Sigma r_m}{n\Sigma_m^2 - \left(\Sigma r_m^2\right)}$$

	r_m	r_K	$r_K r_m$	r_L	$r_L r_m$	r^2_m
1	25 %	20 %	500(%)^2	35 %	875(%)^2	625(%)^2
2	30 %	22 %	660	40	1 200	900
3	32 %	25 %	800	34	1 088	1 024
4	–10 %	–6 %	60	6	–60	100
5	10 %	7 %	70	18	180	100
	87	68	2 090	133	3 283	2 749

$$\beta_k = \frac{5(2\,090)-(68)(87)}{5(2\,749)-(87)(87)} = \frac{10\,450-5\,916}{13\,745-7\,569} = \frac{4\,534}{6\,176} = 0{,}73$$

$$\beta_l = \frac{5(3\,283)-(133)(87)}{5(2\,749)-(87)(87)} = \frac{16\,415-11\,571}{6\,176} = \frac{4\,844}{6\,176} = 0{,}78$$

$$\alpha_k = \frac{(68)(2\,749)-(87)(2\,090)}{5(2\,749)-(87)(87)} = \frac{186\,932-181\,830}{6\,176} = 0{,}83$$

$$\alpha_l = \frac{(133)(2\,749)-(87)(3\,283)}{6\,176} = \frac{365\,617-285\,621}{6\,176} = 12{,}95$$

L'équation de la ligne caractéristique de K est :

$$r_{kt} = 0{,}83 + 0{,}73\ r_{mt}$$

L'équation de la ligne caractéristique de L est :

$$r_{lt} = 12{,}95 + 0{,}78\ r_{mt}$$

b) Calculons $E(r_m)$, l'espérance de rendement du marché :

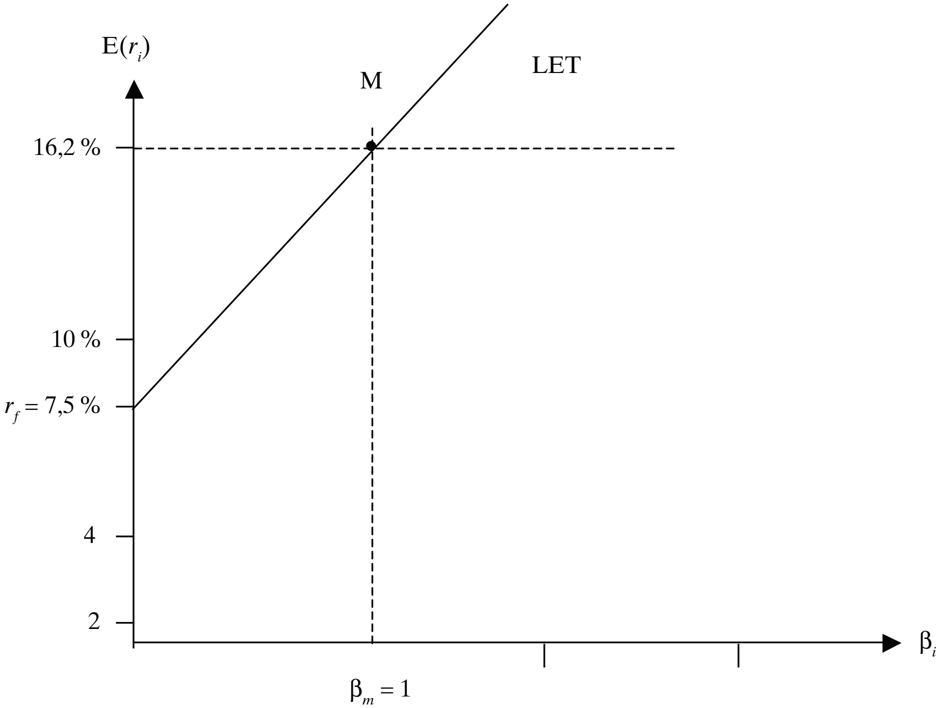
$E(r_m)$ = (0,2)(–10 %) + (0,1)(12 %) + (0,3)(15 %) + (0,1)(20 %) + (0,3)(35 %)
= –2 % + 1,2 % + 4,5 % + 2 % + 10,5 %
= 16,2 %

D'où l'équation de la ligne d'équilibre des titres est la suivante :

$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f]\ \beta_i$

$E(r_i) = 7{,}5 + (16{,}2 - 7{,}5)\ \beta_i$

$E(r_i) = 7{,}5 + 8{,}7\ \beta_i$



c) Si le portefeuille de l'investisseur est situé au point r_f de la ligne d'équilibre des titres (LET), il est exclusivement constitué de bons du Trésor ; l'investisseur prête au gouvernement fédéral toute son épargne. Le portefeuille situé entre r_f et le point M est formé en partie de prêts et en partie du portefeuille M risqué du marché. Le point M représente un portefeuille exclusivement composé du portefeuille risqué du marché. L'investisseur emprunte et investit son épargne ainsi que l'emprunt contracté dans le portefeuille risqué du marché au-delà du point M.

d.1. Taux de rendement exigé sur le titre K :

On a déjà calculé les coefficients β_K et β_L sous a), soit respectivement 0,73 et 0,78.

D'où le taux de rendement exigé par le marché sur le titre K est de :

$$\begin{aligned} E(r_r) &= 7{,}5 + 8{,}7\ \beta_K \\ &= 7{,}5 + (8{,}7 \times 0{,}73) \\ &= 7{,}5 + 6{,}35 \\ &= \underline{13{,}85\,\%} \end{aligned}$$

d.2. Le taux de rendement exigé sur le titre L est de :

$$\begin{aligned} E(r_l) &= 7,5 + 8,7\ \beta_L \\ &= 7,5 + (8,7 \times 0,78) \\ &= 7,5 + 6,79 \\ &= \underline{14,29\ \%} \end{aligned}$$

e) Selon le modèle de Gordon

$r_n = \frac{D_1}{P_0} + g$; on sait que $\frac{D_1}{P_0} = 10\ \%$ est le rendement du dividende ; D_1 est le prochain dividende et P_0 le prix de l'action sur le marché.

On peut calculer g qui est, habituellement, le taux de croissance passé des bénéfices, des dividendes ou de la firme, de la façon suivante :

$$2\ (1+g)^{10} = 4,318$$

$$(1+g)^{10} = \frac{4,318}{2} = 2,159$$

$$1 + g = (2,159)^{1/10}$$

et

$$g = (2,159)^{1/10} - 1 = 1,08 - 1 = 0,08$$
$$= 8\ \%$$

D'où le taux de rendement espéré qu'assurerait la firme N selon la relation de Gordon est de :

$$r_n = 10\ \% + 8\ \% = 18\ \%$$

Calculons le taux de rendement espéré exigé par les investisseurs ou par le marché sur le titre N selon la relation du MEDAF :

$$\begin{aligned} E(r_n) &= 7,5 + 8,7\ (1,1) \\ &= 7,5 + 9,57 = 17,07\ \% \end{aligned}$$

La comparaison du taux de rendement espéré exigé par le marché de 17,07 % au taux de rendement attendu par la firme de 18 % indique que le titre N n'est pas en situation d'équilibre sur le marché. L'équilibre sera rétabli de la façon suivante :

Le taux de rendement de 18 % attendu par la firme N, sur son titre, devrait baisser au niveau du taux de rendement de 17,07 % exigé par le marché pour couvrir de façon satisfaisante un risque systématique bêta de 1,1 qui est en l'occurrence celui du titre N. Les investisseurs achètent le titre N au taux du rendement attendu, élevé et attrayant, de 18 %, avec pour conséquence une augmentation de son prix et donc une baisse de son taux de rendement attendu jusqu'au niveau d'équilibre de 17,07 %, toutes choses égales.

2. LES TITRES 1, 2, 3 ET 4

Le taux de rendement du marché pour l'année prochaine atteindrait 14 % selon des prévisions financières fiables. Le taux d'intérêt sans risque serait de 9,5 %.

Vous possédez quatre titres à propos desquels les informations suivantes sont disponibles :

Titre	Montant investi	Rendement attendu par la firme	Écart type du rendement du titre	Béta
1	30 M$	15 %	0,35	1,2
2	18 M$	14 %	0,27	0,8
3	60 M$	12 %	0,40	1,0
4	12 M$	18 %	0,30	1,5

■ **On demande :**

a) de calculer le taux de rendement exigé sur chacun de ces titres ainsi que celui du portefeuille qui les regrouperait et d'établir si les prix de ces titres sont surévalués ou sous-évalués ;

b) de déterminer la relation ou l'équation de la ligne d'équilibre des titres (LET), de la représenter graphiquement et de calculer le bêta du portefeuille formé par les quatre titres indiqués ci-haut.

■ **Solutions suggérées :**

a) Il faut toujours avoir à l'esprit que, toutes choses égales, à un taux de rendement élevé correspond un prix faible (sous-évaluation) et à un taux de rendement faible correspond un prix élevé (surévaluation). Calculons les taux de rendement exigés par le marché pour les 4 titres considérés.

$$E(r_1) = 9{,}5 + (14 - 9{,}5)\ 1{,}2 = \underline{14{,}9\,\%}$$

Le taux de rendement espéré attendu par la firme 1 étant de 15 %, c'est-à-dire supérieur au taux de rendement de 14,9 % exigé par le marché sur le titre 1, ce dernier est légèrement sous-évalué quant à son prix.

$$E(r_2) = 9{,}5 + (14 - 9{,}5)\ 0{,}8 = \underline{13{,}1\,\%}$$

Le titre 2 est sous-évalué sur le marché puisque la firme s'attend à un rendement de 14 %.

$$E(r_3) = 9{,}5 + (14 - 9{,}5)\ 1 = \underline{14\,\%}$$

Le titre 3 est sous-évalué sur le marché.

$$E(r_4) = 9{,}5 + (14 - 9{,}5)\ 1{,}5 = \underline{16{,}25\,\%}$$

Le titre 4 est sous-évalué sur le marché.

Les titres ont les proportions suivantes dans le portefeuille :

Titre 1 : 0,25 (= 30/120)

Titre 2 : 0,15 (= 18/120)

Titre 3 : 0,50 (= 60/120)

Titre 4 : 0,10 (= 12/120)

D'où, le taux de rendement du portefeuille :

$$E(r_p) = (14{,}9\,\%)(0{,}25) + (13{,}1\,\%)(0{,}15) + (14\,\%)(0{,}50) + (16{,}25\,\%)(0{,}10) = \underline{14{,}3\,\%}$$

b) L'équation de la LET est la suivante : $E(r_j) = 9{,}5\,\% + (14\,\% - 9{,}5\,\%)\ \beta_j$.

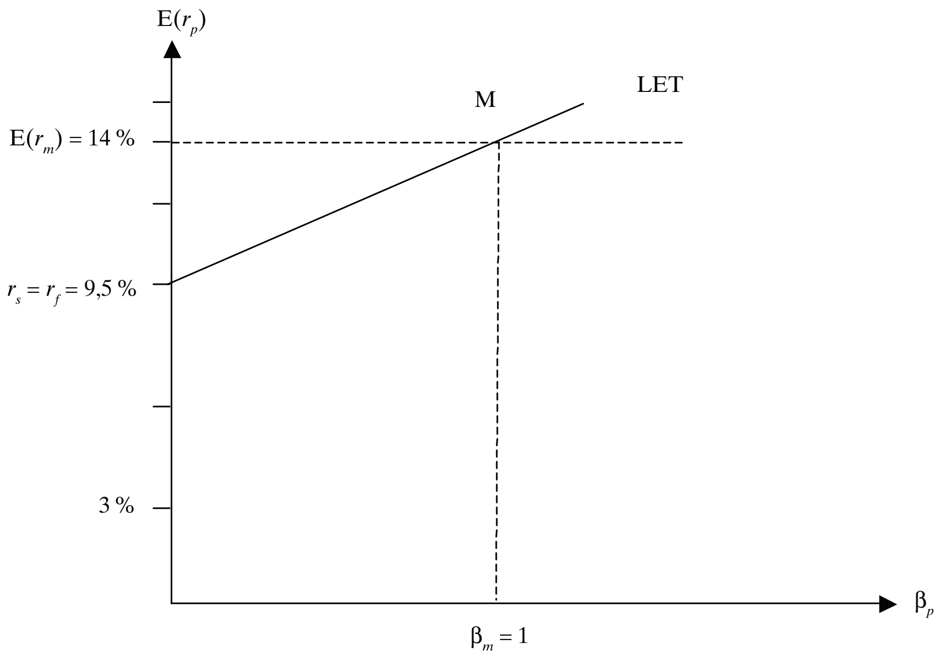
Le calcul du bêta du portefeuille se fait de deux façons :

1) $$\beta_p = 0{,}25(1{,}2) + 0{,}15(0{,}8) + 0{,}50(1) + 0{,}10(1{,}5) = 0{,}30 + 0{,}12 + 0{,}50 + 0{,}15 = 1{,}07$$

2) ou aussi $E(r_p) = r_f + [E(r_m) - r_f]\ \beta_p$

$$14{,}3 = 9{,}5\,\% + [14\,\% - 9{,}5\,\%]\ \beta_p$$

$$\beta_p = 1{,}07$$



3. LE PORTEFEUILLE M

Le taux de rendement des bons du Trésor est de 8 %, celui du portefeuille risqué du marché M, de 12 % et sa variance, de 0,04.

■ On demande :

a) de calculer l'espérance du taux de rendement ainsi que l'écart type d'un portefeuille formé à raison de 10 000 $ en bons du Trésor et de 10 000 $ en portefeuille risqué M.

b) de déterminer l'espérance de rendement d'un portefeuille de 35 000 $ d'investissement dans le portefeuille M dont 15 000 $ sont empruntés et financés à un taux d'intérêt égal au taux sans risque ainsi que son écart type.

c) d'expliquer en quoi consiste le portefeuille risqué M du marché.

■ Solutions suggérées :

a) Le portefeuille est formé à raison de 50 % du titre sans risque à taux de rendement de 8 % et à raison de 50 % du portefeuille M du marché à taux de rendement de 12 %, d'où :

$$E(r_p) = (0{,}50)(8\,\%) + (0{,}50)(12\,\%) = \underline{10\,\%}$$

L'écart type du rendement de ce portefeuille est de :

$$\sigma_p^2 = (0{,}50)^2\,(0{,}04) + 0 + 0 = (0{,}25)(0{,}04) = \underline{0{,}01}$$

$$\sigma_p = (0{,}01)^{1/2} = 0{,}1$$

b) Le portefeuille est formé du portefeuille M à raison de 35 000 $ et d'un emprunt de 15 000 $; d'où la contribution propre de l'investisseur au financement de ce portefeuille est de 20 000 $ et son investissement de 35 000 $ en M est de 1,75 fois ce montant-là, tandis que l'emprunt de 15 000 $ représente 0,75 de 20 000 $.

$$E(r_p) = (1{,}75)(12\,\%) + (-0{,}75)(8\,\%) = 21 - 6 = \underline{15\,\%}$$

L'écart type du rendement de ce portefeuille est de :

$$\sigma_p = (1{,}75)(0{,}04)^{1/2} = (1{,}75)(0{,}2) = \underline{0{,}35}$$

c) Le portefeuille risqué M du marché représente le meilleur équilibre rendement-risque que le marché puisse offrir à l'investisseur désireux d'inclure dans son propre portefeuille des titres risqués.

4. LES BÊTAS 1, 2, 3, 4 ET 5

Considérez, dans un marché en équilibre, les bêtas des actions de cinq sociétés appartenant à des secteurs différents :

$$\beta_1 = -1{,}5 \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = 0{,}5 \qquad \beta_4 = 1 \qquad \beta_5 = 1{,}5$$

Le taux de rendement espéré du portefeuille du marché M est de 16 % et le taux de rendement des bons du Trésor est de 7 %.

- **On demande :**

a) de calculer les taux de rendement espérés des titres 1, 2, 3, 4 et 5.

b) d'expliquer la signification de chacun des cinq bêtas indiqués ci-haut et d'indiquer les secteurs dont les entreprises et les types de titres se distinguent respectivement par ces bêtas.

- **Solutions suggérées :**

a) Il faut d'abord établir l'équation de la ligne d'équilibre des titres pour ensuite calculer les taux de rendement des différents titres considérés.

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f]\ \beta_i$$
$$= 7\,\% + 9\ \beta_i$$

Calcul des taux de rendement des 5 titres considérés :

$E(r_1) = 7\,\% + 9(-1{,}5) = -6{,}5\,\%$

$E(r_2) = 7\,\% + 9(0) = 7\,\%$

$E(r_3) = 7\,\% + 9(0{,}5) = 11{,}5\,\%$

$E(r_4) = 7\,\% + 9(1) = 16\,\%$

$E(r_5) = 7\,\% + 9(1{,}75) = 22{,}75\,\%$

b.1. Quand $\beta = -1{,}5$, il s'agit d'un titre dont les taux de rendement varient en sens contraire de l'ensemble du marché. La variation est plus forte, que ce soit à la hausse ou à la baisse. Si les taux de rendement du marché augmentent de 10 %, ceux du titre en question diminuent de 15 % et vice versa. Le secteur d'exploitation de mines d'or appartient à cette catégorie d'activité industrielle à bêta négatif.

b.2. Quand $\beta = 0$, le titre est non risqué et son rendement varie, en général, indépendamment de celui du marché.

À titre d'exemple, les bons du Trésor.

b.3. Quand $\beta = 0{,}5$, le taux de rendement du titre varie dans le même sens que celui du marché, mais dans des proportions moindres.

À titre d'exemple, Bell Canada.

b.4. Quand $\beta = 1$, le taux de rendement du titre varie dans le même sens et dans les mêmes proportions que celui du marché.

b.5, Quand $\beta = 1{,}75$, le taux de rendement du titre varie dans le même sens que celui du marché et dans une plus grande proportion.

À titre d'exemple, les sociétés d'extraction de matières premières (les minières).

5. LE FONDS COMMUN DE PLACEMENT X

Le fonds commun de placement X comprend quatre titres dont voici certaines données pertinentes :

Titre	Montant investi	Coefficient bêta
1	120 M$	0,6
2	60 M$	1,8
3	36 M$	2,0
4	24 M$	1,5

Le bêta du portefeuille X est établi par la moyenne pondérée des divers investissements.

Le taux de rendement espéré du marché est calculé à partir de la distribution de probabilités suivante :

Probabilité	Taux de rendement du marché
0,15	10 %
0,20	12 %
0,35	13 %
0,30	15 %

Les bons du Trésor offrent un taux de rendement de 8 %.

▪ On demande :

a) d'établir l'équation ou la relation de la ligne d'équilibre des titres (LET), de la représenter graphiquement et de calculer le taux de rendement requis du fonds X pour la prochaine période.

b) Considérons un nouveau titre n° 5 dont le taux de rendement espéré est de 24 % et le bêta est estimé à 2. Croyez-vous que le fonds X devrait acquérir ce titre qui nécessite un investissement de 60 M$?

c) Quel est le taux de rendement qui rendrait le fonds X indifférent quant à l'acquisition de ce nouveau titre ? Si le titre n° 5 n'est pas en situation d'équilibre, comment peut-il rejoindre l'équilibre ?

▪ Solutions suggérées :

a) Il faut établir les proportions d'investissement des différents titres 1, 2, 3, 4 dans l'ensemble du fonds X :

Titre : 1. 120/240 = 0,50 Titre : 3. 36/240 = 0,15

Titre : 2. 60/240 = 0,25 Titre : 4. 24/240 = 0,10

Pour établir l'équation de la ligne d'équilibre des titres, il faudrait calculer $E(r_m)$, c'est-à-dire l'espérance de rendement du marché :

$$E(r_m) = (0{,}15 \times 10\,\%) + (0{,}20 \times 12\,\%) + (0{,}35 \times 13\,\%) + (0{,}30 \times 15\,\%) = \underline{12{,}95\,\%}$$

d'où

$$E(r_x) = 8\,\% + (12{,}95\,\% - 8\,\%) \times \beta_x$$

Pour calculer le taux de rendement requis $E(r_x)$ sur le fonds X, il faut d'abord déterminer β_x :

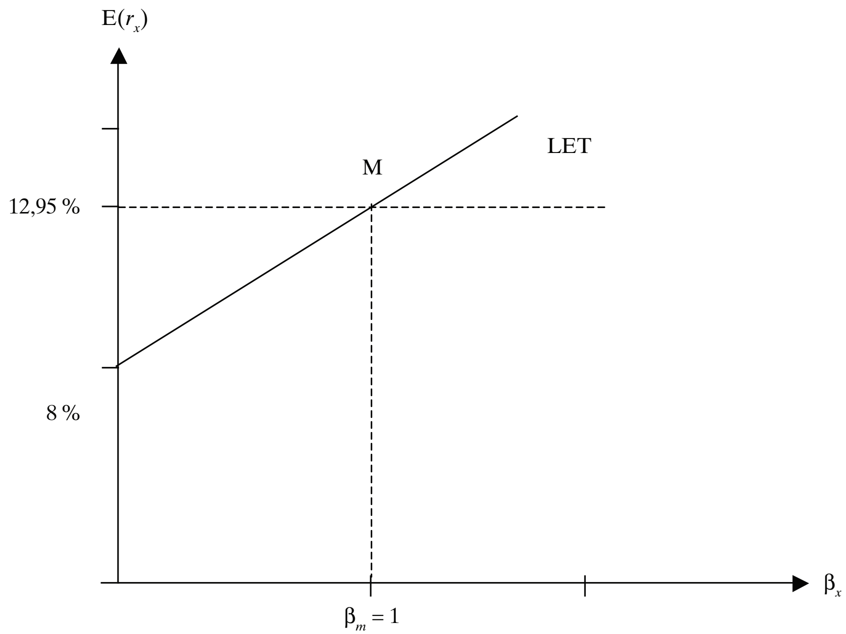
$$\beta_x = (0{,}50 \times 0{,}6) + (0{,}25 \times 1{,}8) + (0{,}15 \times 2{,}0) + (0{,}10 \times 1{,}5) = 1{,}2$$

En utilisant l'équation de la LET, on a $E(r_x)$, soit le taux de rendement espéré exigé du fonds X :

$$\begin{aligned} E(r_x) &= r_f + [E(r_m) - r_f]\,\beta_x \\ &= 8\,\% + (12{,}95\,\% - 8\,\%) \times 1{,}2 \\ &= \underline{13{,}94\,\%} \end{aligned}$$

b.1. $E(r_5) = 8\,\% + (4{,}95\,\%)\ 2 = \underline{17{,}9\,\%}$

Oui, on doit acheter le titre 5, car son taux de rendement est de 24 % lorsque le taux de rendement exigé par le marché sur ce titre est de seulement 17,9 %.



b.2. Le taux de rendement d'indifférence est de 17,9 % pour le titre 5. Le retour à l'équilibre est assuré par l'arbitrage, c'est-à-dire par l'achat du titre 5 par des investisseurs attirés par son taux de rendement élevé de 24 % par rapport à son niveau de risque. Le prix du titre 5 s'élève et son taux de rendement baisse jusqu'à ce que le taux d'équilibre de 17,9 % soit atteint.

6. LA SOCIÉTÉ BEAUTRAND INC.

La société Beautrand inc. a une covariance de son rendement avec celui de la Bourse de Toronto (TSX 300) égale à 0,010. Le taux de rendement espéré du TSX 300 est de 20 % et l'écart type autour de ce taux, de 8 %. Le taux de rendement des bons du Trésor du gouvernement fédéral canadien s'élève à 11 %. Une étude prévisionnelle portant sur le prix de la société Beautrand le situe à 60 $ dans deux ans. On considère que les conditions et les performances de l'économie resteront inchangées durant ces deux ans, de même que les taux de rendement des différents actifs, dont celui des bons du Trésor.

■ **On demande :**

a) de calculer le taux de rendement et le risque d'un portefeuille composé à raison de 75 % du portefeuille du marché et le reste en bons du Trésor fédéral.

b) de déterminer le taux de rendement exigé par le marché pour la société Beautrand.

c) d'établir comment se comporte aujourd'hui sur le marché l'action de la société Beautrand qui est cotée à 42,60 $ (en d'autres termes, est-elle surévaluée ou sous-évaluée ?).

d) de déterminer à quel taux de rendement correspond le prix actuel de 42,60 $ l'action de Beautrand.

e) d'expliquer la relation qui permet de calculer le taux de rendement d'un portefeuille parfaitement diversifié. Représenter cette relation graphiquement.

f) supposons qu'un investisseur, M. Pierre Carrier, veuille former un portefeuille d'une valeur totale de 30 000 $ placés dans le portefeuille risqué du marché. Pierre prélève 12 000 $ sur son épargne et emprunte le reste pour financer cet investissement. Déterminer le taux de rendement espéré du nouveau portefeuille ainsi que son risque en supposant que le taux d'emprunt est celui des bons du Trésor.

g) de calculer le risque du marché ainsi que le taux de rendement exigé sur le portefeuille constitué de la façon suivante par Jacques Dufour, qui forme un portefeuille équipondéré comprenant les titres suivants :

- des actions de la société Beautrand inc. ;
- des actions de la société Kelatux, dont la covariance avec la Bourse de Toronto est de 0,009 ;

– des actions de la société Belmonté, dont la covariance du rendement avec le rendement de la Bourse de Toronto est de 0,012.

■ **Solutions suggérées :**

a) $E\left(r_p\right) = (0,75)\,(20\,\%) + (0,25)\,(11\,\%) = 17,75\,\%$

$$\sigma_p = \left[(0,75)^2\,(8)^2 + (0,25)(0) + 2\,(0,75)(0,25)(r_{m,\mathrm{BT}})(8)(0)\right]^{1/2}$$

$$= \left[(0,75)^2\,(8)^2\right]^{1/2} = 6\,\%$$

Notons que $\sigma_{\mathrm{BT}} = 0$, puisque les bons du Trésor sont des titres sans risque.

b) Il faut d'abord calculer le risque systématique bêta de la société Beautrand afin de pouvoir déterminer le taux de rendement espéré exigé sur ces actions.

$$\beta_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{COV}_{\mathrm{B}m}}{\mathrm{COV}_{mm}} = \frac{\mathrm{COV}_{\mathrm{B}m}}{\sigma_m^2} = \frac{0,01}{(0,08)^2} = \frac{0,01}{0,006\,4} = 1,562\,5$$

Beautrand est un actif plus risqué que le marché. Le taux de rendement espéré exigé est :

$$E(r_{\mathrm{B}}) = r_f + [E(r_m) - r_f]\,\beta_B = 11\,\% + (20\,\% - 11\,\%)\,1,56 = 25,04\,\%$$

c) Le prix d'équilibre de l'action de Beautrand est déterminé selon les exigences de taux de rendement du marché pour cette action, soit 25,04 %.

$$\frac{60\,\$}{(1 + 0,25)^2} = \frac{60\,\$}{1,563\,5} = 38,37\,\$$$

Comme l'action de Beautrand se vend actuellement à 42,60 $ et que son prix d'équilibre est de 38,37 $, on dira que cette action est surévaluée. Il faut donc s'abstenir de l'acheter.

d) Le taux de rendement auquel correspond le prix actuel de 42,60 $ est de :

$$42,60\,\$\ (1+i)^2 = 60\,\$$$

$$(1+i) = \left(\frac{60\,\$}{42,60}\right)^{1/2} \quad \text{et } i = 1,186\,7 - 1 = 18,67\,\%$$

e) La relation de la ligne d'équilibre du marché (LEM), qui permet de calculer le taux de rendement d'un portefeuille parfaitement diversifié en fonction de son écart type, est la suivante :

$$E(r_p) = r_f + \left[\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}\right] x\ \sigma_p$$

On constate que le rendement du portefeuille $E(r_p)$ est fonction de son écart type σ_p pour des valeurs données :

- du taux sans risque des bons du Trésor r_f,
- du taux de rendement espéré ou attendu du marché (Bourse) [$E(r_m)$] et de son écart type (σ_m).

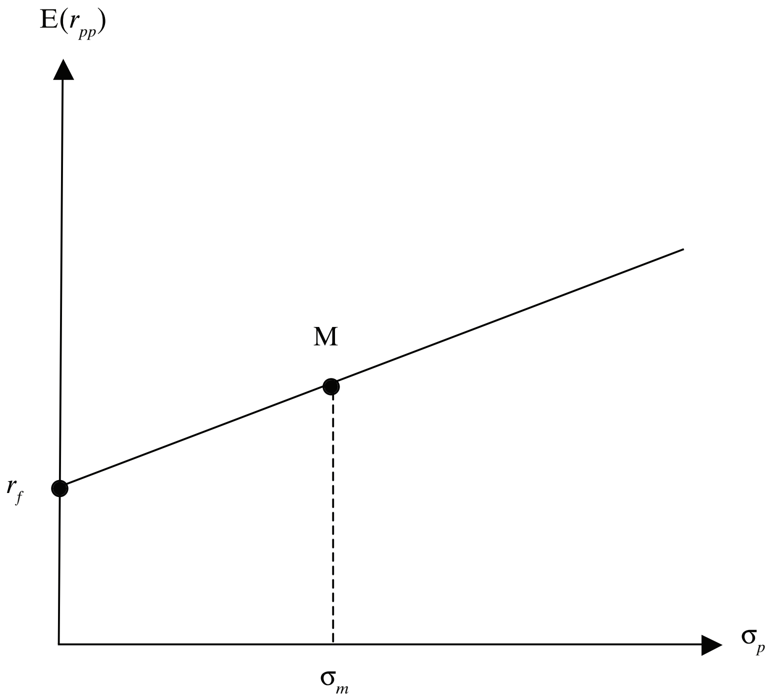
f) $E(r_p) = (2{,}5)(20\,\%) + (-1{,}5)(11\,\%) = 33{,}5\,\%$

$\sigma_p = (2{,}5)(8\,\%) = 20\,\%$

ou aussi :

$$\sigma_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\left(E(r_m) - r_f\right) / \sigma_m} = \frac{33{,}5\,\% - 11\,\%}{(20\,\% - 11\,\%) / 8\,\%} = \frac{22{,}5\,\%}{9\,\% / 8\,\%} = \frac{22{,}5\,\%}{1{,}125} = 20\,\%$$

Représentation graphique d'une ligne d'équilibre du marché (LEM)



g) Le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêta des titres qui le composent :

$$\beta_p = (0,33)\,(\beta_{Bertrand}) + (0,33)\,(\beta_{Kelatus}) + (0,33)\,(\beta_{Belmonté})$$

$$= (0,33)\,(1,5625) + (0,33)\left(\frac{0,009}{0,006\ 4}\right) + (0,33)\left(\frac{0,012}{0,006\ 4}\right)$$

$$= 1,598$$

$$E(r_p) = r_f + \left[E(r_m) - r_f\right]\beta_p$$

$$= 11\,\% + (20\,\% - 11\,\%)\ 1,598$$

$$= 25,38\,\%$$

7. LES PROJETS X ET Y

Considérons deux projets d'investissement X et Y dont les distributions de probabilités des valeurs actuelles nettes sont les suivantes, compte tenu de l'évolution probable de la situation économique :

Probabilité	VAN_X	VAN_Y
0,4	3 000 $	1 000 $
0,2	2 000	2 000
0,4	2 500	4 000

- **On demande :**

a) de calculer l'espérance de la valeur actuelle nette pour chacun des deux projets X et Y ainsi que l'écart type autour de cette valeur espérée.

b) de déterminer le projet le plus risqué d'après le coefficient de variation.

c) d'établir la covariance des valeurs actuelles nettes des projets X et Y et de commenter.

d) de calculer le coefficient de corrélation entre les valeurs actuelles nettes de X et Y et de commenter.

- **Solutions suggérées :**

a) VAN

$$E\left(VAN_x\right) = (3\ 000)(0,4) + (2\ 000)(0,2) + (2\ 500)(0,4) = 2\ 600\ \$$$

$$E\left(VAN_y\right) = (1\ 000)(0,4) + (2\ 000)(0,2) + (4\ 000)(0,4) = 2\ 400\ \$$$

$$\sigma\left[E\left(VAN_x\right)\right] = \sqrt{\left(3\ 000 - 2\ 600\right)^2(0,4) + \left(2\ 000 - 2\ 600\right)^2(0,2) + \left(2\ 500 - 2\ 600\right)^2(0,4)}$$

$$= \sqrt{64\ 000 + 72\ 000 + 4\ 000} = \sqrt{140\ 000} = 374,16\ \$$$

$$\sigma\left[E\left(VAN_y\right)\right] = \sqrt{\left(1\ 000 - 2\ 400\right)^2(0,4) + \left(2\ 000 - 2\ 400\right)^2(0,2) + \left(4\ 000 - 2\ 400\right)^2(0,4)}$$

$$= \sqrt{784\ 000 + 32\ 000 + 1\ 024\ 000} = \sqrt{1\ 840\ 000} = 1\ 356,46\ \$$$

b) Le coefficient de variation est une mesure relative du risque qui s'obtient par le rapport de l'écart type à la moyenne de la distribution de probabilité :

$$CV_x = \frac{\sigma\left[E\left(VAN_x\right)\right]}{E\left(VAN_x\right)} = \frac{374,16}{2\,600} = 0,144$$

$$CV_y = \frac{1\,356,46}{2\,400} = 0,565$$

Le projet Y est plus risqué que le projet X, car la variabilité des résultats ou de la VAN, en l'occurrence, est plus élevée par dollar de VAN.

c) La covariance des rendements ou des VAN des projets X et Y se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\left(3\,000-2\,600\right)\left(1\,000-2\,400\right)(0,4) &= -224\,000\ \$\\
\left(2\,000-2\,600\right)\left(2\,000-2\,400\right)(0,2) &= 48\,000\ \$\\
\left(2\,500-2\,600\right)\left(4\,000-2\,400\right)(0,4) &= -64\,000\ \$\\
COV_{xy} &= -240\,000\ \$
\end{aligned}$$

Le signe négatif de la covariance indique que les projets X et Y ont des taux de rendement qui évoluent de façon inverse dans le temps par rapport à leurs moyennes respectives. Pour préciser dans quelle proportion ou avec quelle force cette évolution s'effectue, il faut calculer le coefficient de corrélation.

d) On sait que :

$$COV_{xy} = (\rho_{xy})(\sigma_x)(\sigma_y)$$

et

$$\rho_{xy} = \frac{COV_{(xy)}}{(\sigma_x)(\sigma_y)} = \frac{-240\,000}{(374,16)\,(1\,356,46)}$$

$$= \frac{-240\,000}{507\,533} = -0,47$$

Le coefficient de corrélation varie entre –1 et +1, d'où un coefficient de –0,47 indique une relation relativement forte d'évolution en sens contraire des taux de rendement de X et de Y. Si le coefficient de corrélation était positif, les taux de rendement évolueraient dans le même sens, indiquant l'existence d'une relation donnée. Si le coefficient de corrélation était nul, il n'y aurait aucune relation entre les deux projets ; c'est le cas de l'indépendance totale.

CHAPITRE

3

Les instruments financiers modernes de protection contre le risque de taux d'intérêt transigés en Bourse

Les produits dérivés sont des instruments financiers modernes destinés à neutraliser ou à modifier l'exposition au risque de taux d'intérêt. Dans ce chapitre, nous traitons les produits dérivés transigés sur des bourses organisées. À titre d'exemple, nous abordons le marché à terme de taux d'intérêt dont les contrats sont normalisés. Ces contrats tirent leur valeur d'un titre sous-jacent faisant l'objet de transactions sur un marché au comptant. Les contrats à terme négociables en Bourse sont, dans leur écrasante majorité, liquidés ou annulés avant l'échéance une fois que l'objectif de couverture, établi par le trésorier d'entreprise ou par l'investisseur, est atteint.

Les produits dérivés ont modifié les méthodes de gestion financière du risque de portefeuille de titres en accordant aux gestionnaires plus de latitude et plus de souplesse afin de protéger les résultats de leurs activités. Ces gestionnaires pourront ainsi modifier rapidement et à un coût faible les caractéristiques de risque et les relations entre l'actif et le passif de même que la sensibilité d'un portefeuille d'obligations, par exemple, aux variations de taux d'intérêt.

La contribution des produits dérivés à la gestion de la trésorerie des entreprises et à celle des portefeuilles consiste à assurer non seulement une meilleure protection contre le risque, mais aussi de meilleures combinaisons de risque et de rendement qui n'étaient pas disponibles sur le marché ou qui, lorsqu'elles existaient, étaient fort onéreuses.

3.1. POSITION DU PROBLÈME

Les trésoriers d'entreprises commerciales et industrielles, les investisseurs individuels et les institutions financières font face au risque du marché quant aux revenus qu'ils perçoivent et à leur fonds propres. La protection du revenu net et de la valeur nette peut prendre plusieurs formes, soit par la couverture ou *hedging*, soit par un procédé qui s'apparente à l'assurance, ou encore par la diversification. La protection contre le risque de taux d'intérêt sera d'autant plus efficace que ses caractéristiques sont bien établies, c'est-à-dire la nature de l'exposition à ce risque bien identifiée et son ampleur mesurée de façon précise, le tout couronné par l'utilisation des instruments financiers de protection les plus appropriés.

Le transfert du risque à une autre entité s'opère par le moyen de la couverture procurée par le marché à terme, qui consiste à protéger une position donnée de l'investisseur sur le marché au comptant contre une perte éventuelle tout en renonçant à la possibilité de réaliser des gains. Cette caractéristique importante distingue les marchés à terme de taux d'intérêt du marché des options. En adoptant sur le marché à terme des taux d'intérêt une position contraire à celle déjà détenue sur le marché au comptant, on neutralise les pertes subies sur ce dernier à la suite de variations défavorables de taux d'intérêt ou de prix tout en annulant l'espoir de plus-values correspondant à un contexte favorable de changement de taux d'intérêt ou de prix.

Le procédé de l'assurance illustré par un contrat d'option consiste à verser une prime pour se protéger contre une perte éventuelle lorsque se concrétise le risque en exerçant l'option. L'investisseur bénéficie de gains, si le risque ne se manifeste pas, en n'exerçant pas l'option. La possibilité de réaliser des gains distingue le contrat d'option de celui des marchés à terme de taux d'intérêt, où l'investisseur abandonne toute possibilité de profits.

L'objectif poursuivi dans ce chapitre consiste à expliquer et à comprendre les conséquences des différentes composantes du risque du marché sur le résultat net et sur la valeur nette, à savoir :

- le risque de taux d'intérêt ;
- le risque de change ;
- le risque-prix ou risque de négociation.

Les caractéristiques des instruments de mesure du risque sont analysées par la relation de l'écart de sensibilité et le concept de la durée. La mesure de la volatilité joue un rôle central dans la détermination du genre de produit dérivé susceptible d'assurer la meilleure gestion possible du risque de trésorerie ou de marché.

3.2. L'OBJECTIF ET LA CARACTÉRISTIQUE FONDAMENTALE DE LA COUVERTURE CONTRE LE RISQUE

Le gestionnaire doit être en mesure de reconnaître les différentes catégories de risque de trésorerie, afin d'utiliser la stratégie de couverture la plus efficace, y compris le choix du produit dérivé le plus approprié. Le gestionnaire doit savoir mesurer le risque, car c'est le degré ou l'importance de ce dernier qui justifie le recours à la couverture ou à son abandon. La gestion du risque de trésorerie présente des coûts et des avantages qu'il faut établir de façon précise avant toute décision de gestion dans ce domaine.

Les institutions financières et les bourses de marchés à terme et d'options de taux d'intérêt permettent aux entreprises et à tout autre agent économique de gérer le risque aussi bien sur le plan intérieur que sur le plan international.

L'objectif poursuivi par la gestion du risque de taux d'intérêt consiste :

- à protéger un résultat tel que le revenu net d'intérêt d'une institution financière ;
- à protéger la valeur nette ou le capital d'une entreprise ;
- à déterminer et à se garantir dès aujourd'hui le prix ou le taux d'intérêt qu'un investisseur voudrait spécifier pour une transaction future qu'il désire conclure dans un ou deux ans ou dans toute autre période future. On peut, par exemple, fixer d'avance le revenu d'un placement.

La couverture accorde une protection d'autant plus grande que la corrélation est forte entre l'évolution des prix des produits dérivés et celle des prix des instruments transigés au comptant ou pour toute autre transaction au comptant.

Les prix à terme des contrats à terme des obligations fédérales canadiennes évoluent de façon très étroite avec les prix des obligations au comptant du gouvernement fédéral. Les prix à terme des acceptations bancaires affichent une corrélation très forte avec ceux des bons du Trésor fédéral, quoique à un degré légèrement inférieur. Il s'agit en effet dans ce dernier cas d'une couverture dite croisée, car les instruments à terme (les contrats sur acceptations bancaires à terme) et les instruments au comptant (les bons du Trésor fédéral) ne sont pas de même nature. Par contre, les contrats à terme sur les obligations du gouvernement fédéral et les obligations au comptant des obligations du gouvernement fédéral sont de même nature.

Le principe fondamental de la couverture à l'aide du marché des produits dérivés consiste à y adopter une position contraire à celle que l'investisseur détient déjà sur le marché au comptant, de manière à neutraliser le risque auquel il s'expose sur ce dernier marché. Les flux monétaires du marché à terme de taux d'intérêt annulent, dans le cas d'une couverture parfaite, les flux monétaires défavorables du marché au comptant, et protègent de la sorte le capital ou le portefeuille d'obligations détenu sur ce marché.

3.3. QUELQUES EXEMPLES DE COUVERTURE PAR LES MARCHÉS À TERME DE TAUX D'INTÉRÊT

3.3.1. Les opérations de couverture par anticipation (*long hedge*)

L'investisseur Paul reçoit dans trois mois, soit le 30 septembre, 4 M$, et il ne détient aucune autre position sur le marché au comptant, c'est-à-dire qu'il ne possède pas dans son propre portefeuille (position au comptant) d'obligations du gouvernement fédéral canadien, par exemple. L'investisseur en question entend placer le montant de 4 M$ à recevoir le 30 septembre, dans des obligations du gouvernement fédéral, mais il redoute entre-temps une baisse des taux d'intérêt qui lui serait défavorable. En effet, une baisse des taux d'intérêt entraînerait une hausse du prix des obligations fédérales en septembre. Dans ce cas, l'investisseur Paul devra acheter ces obligations lors de la réception du montant de 4 M$ à un prix plus élevé que celui d'aujourd'hui ou à un taux d'intérêt plus faible. L'analyse de la couverture adéquate est faite, pour fins de simplification de calculs, en ignorant les coûts de transaction du contrat à terme ainsi que le coût d'opportunité de la marge que l'investisseur doit déposer pour ce genre de transaction. On fait aussi abstraction des ratios de couverture, des coefficients de corrélation des variations des prix au comptant et des prix à terme, des valeurs marchandes et des échéances respectives des instruments considérés.

La couverture consistera en l'achat de 40 contrats à terme d'une valeur nominale de 100 000 $ chacun (contrats CGB) au 30 juin. Analysons la situation en date du 30 septembre à la lumière des données fournies dans le tableau suivant :

Prix par 100 $ de valeur nominale

	Marché au comptant	Marché à terme
30 juin	75,5	76,6
30 septembre	83,4	85,0
Variation	7,9	8,4

L'investisseur Paul prend les mesures suivantes le 30 septembre :

1. Il vend ses 40 contrats à terme CGB, afin de dénouer sa position sur le marché à terme, en réalisant un gain de :

   $$(85\,\$ - 76{,}6\,\$)\ (40\,000\,\$) =$$
   $$(8{,}4\,\$)\ (40\,000\,\$) = \underline{\underline{336\,000}}\,\$$$

   Notons que le gain est de 8,4 $ par 100 $, d'où la nécessité de diviser la valeur nominale de 4 M$ par 100 (= 40 000 $).

2. Il reçoit les entrées de fonds attendues depuis 3 mois d'un montant de 4 M$ et achète au comptant 40 contrats d'obligations du gouvernement fédéral, à raison de 83,4 $ par 100 $ de valeur nominale, en réalisant une perte (par rapport au prix de 75,5 $ prévalant le 30 juin) de :

   $$(83{,}4 - 75{,}5)\ (40\,000\,\$) = \underline{\underline{316\,000}}\,\$$$

L'investisseur Paul s'est couvert contre le risque de taux d'intérêt (dans ce cas précis une baisse de taux ou une augmentation de prix). Il réalise un gain net de 20 000 $, mais il aurait pu tout aussi bien faire une perte nette limitée. De toute façon, quel que soit le résultat net, soit une perte nette ou un gain net, il est relativement faible comparativement à la perte de 316 000 $ que l'investisseur aurait subie s'il n'avait pas protégé par anticipation une position au comptant future. C'est la corrélation très forte entre l'évolution des prix au comptant et celle des prix à terme qui explique un gain ou une perte nette faible dans le cas d'une protection par les produits dérivés comme ceux des marchés à terme de taux d'intérêt.

3.3.2. Les opérations de protection à découvert (*short hedge*)

L'investisseur détient une position au comptant, à savoir qu'il possède un portefeuille d'obligations du gouvernement fédéral d'une valeur nominale de 10 M$. Il désire, pour l'instant, garder ses obligations, tout en étant conscient que son portefeuille est exposé au risque de taux d'intérêt représenté par une hausse des taux d'intérêt ou une baisse des prix.

L'investisseur choisit de se protéger pour deux mois, soit du 1er mars 2006 au 1er mai 2006, en vendant 100 contrats à terme d'obligations CGB soit 10 M$/100 000 $, le 1er mars 2006. L'investisseur doit dénouer sa position le 1er mai 2006 et vendre ses obligations au comptant. Il constate que les taux d'intérêt ont effectivement augmenté. Il effectue le 1er mai les deux opérations suivantes, à la lumière du tableau ci-dessous dressé le 1er mai 2006 :

Prix par 100 $ de valeur nominale

	Marché au comptant	Marché à terme
1er mars 2006	82,40	80,20
1er mai 2006	79,10	77,20
Variation	–3,30	–3,00

L'investisseur effectue les deux opérations suivantes le 1er mai 2006 :

1re opération : L'investisseur achète 100 contrats CGB sur le marché à terme de taux d'intérêt afin de dénouer sa position en réalisant un gain de :

$$(80{,}20 - 77{,}20)\ (100\,000\,\$) = \underline{\underline{300\,000}}\,\$$$

2e opération : L'investisseur vend les obligations détenues au comptant et enregistre une perte par rapport au prix du marché du 1er mars 2006 :

$$(82{,}40 - 79{,}10)\ (100\,000\,\$) = \underline{\underline{330\,000}}\,\$$$

Les deux exemples précédents de couverture par anticipation et de protection à découvert indiquent une couverture légèrement imparfaite (une perte nette de 30 000 $) par rapport aux pertes potentielles d'exposition au risque de taux d'intérêt.

La couverture n'est pas parfaite, que l'on enregistre un gain net de 20 000 $ dans l'exemple sous 16.3.1 ou une perte nette de 30 000 $ dans l'exemple sous 16.3.2, car la base s'est élargie dans le premier cas et s'est rétrécie dans le second. La base d'un contrat à terme est la différence entre le prix au comptant et le prix à terme à une date donnée. L'exemple donné ci-haut sur la protection à découvert indique que la base du contrat à terme se chiffrait, le 1er mars 2006, à 82,40 $ – 80,20 $ = +2,20 $.

Au 1er mai 2006, la base de ce contrat s'élevait à 79,10 $ – 77,20 $ = 1,90 $.

La base s'est effectivement rétrécie de 0,30 $ (= 2,20 $ – 1,90 $) entre les dates du 1er mars et du 1er mai 2006, avec pour conséquence une protection imparfaite. La couverture eût été parfaite (aucune perte nette) si la base était restée la même aux deux dates spécifiées ci-dessus, c'est-à-dire inchangée au 1er mai 2006 comparativement au 1er mars. La base change lorsque les prix sur le marché au comptant et sur le marché à terme ne varient pas de la même façon entre deux dates. La variation de la base représente le risque de base.

Notons que les variations de la base sont en général moins prononcées que les variations des prix sur les marchés. Les variations de la base existent même si la corrélation entre prix au comptant et prix à terme est très forte en raison de variations de l'offre et de la demande (demande secondaire forte d'obligations canadiennes par les institutions financières japonaises, par exemple) ou encore en raison de distorsions sur le marché. Notons que dans de telles conditions d'anomalies de marché, les opérations de couverture peuvent neutraliser les risques du marché, à l'exclusion du risque de base.

3.3.3. La protection contre le risque de taux d'intérêt à l'aide d'une couverture croisée

Dans le cas d'une couverture croisée, les instruments de couverture utilisés sur le marché à terme comme, par exemple, les contrats à terme sur les acceptations bancaires (BAX) d'une échéance de trois mois, sont de nature différente de celle des instruments financiers formant la position au comptant comme, par exemple, les bons du Trésor du gouvernement fédéral. On utilise une couverture croisée, car il n'existe pas de contrats à terme sur les bons du Trésor canadiens pour se protéger par anticipation contre le risque de taux d'intérêt. En effet, un investisseur redoute une baisse des taux d'intérêt lorsqu'il s'attend à recevoir une certaine somme d'argent dans les prochains mois, avec pour objectif le placement de ces sommes dans des bons du Trésor. Des exemples sont utilisés ultérieurement pour illustrer ce genre de situation.

3.3.4. Remarque importante

Notons que les produits dérivés tels que les contrats à terme de taux d'intérêt sont utilisés aussi bien pour les fins de spéculation que pour les fins de protection contre le risque de taux d'intérêt. L'objectif consiste, dans ce dernier cas, à couvrir une position au comptant ou à stabiliser une marge bénéficiaire. La stratégie est celle de l'adoption d'une position sur le marché à terme opposée à celle qui existe sur le marché au comptant. Si le risque de taux d'intérêt se concrétise, le profit obtenu sur le marché à terme annulera en grande partie, sinon totalement, la perte subie sur le marché au comptant. Le spéculateur, par contre, utilise le marché à terme des taux d'intérêt afin d'accentuer son exposition au risque de taux d'intérêt dans le but de maximiser son profit ou son taux de rendement en fonction de ses prévisions de l'évolution des taux d'intérêt. Si les prévisions du spéculateur se concrétisent, il multiplie ses profits. Par contre, s'il se trompe quant aux variations futures des taux d'intérêt, il multiplie ses pertes. La multiplication des profits ou des pertes s'explique par le fait que le spéculateur adopte, sur le marché à terme, une position similaire à celle qu'il détient déjà sur le marché au comptant. Il en résulte que les flux monétaires obtenus sur les deux marchés au comptant et à terme varient dans le même sens, ce qui accroît d'autant plus les résultats positifs que les résultats négatifs selon que l'évolution des taux d'intérêt est respectivement favorable ou défavorable au spéculateur.

3.4. LES DIFFÉRENTES CATÉGORIES DE RISQUE DE TRÉSORERIE

Il a déjà été précisé que le risque de trésorerie comprenait le risque de taux d'intérêt, le risque de change et le risque-prix.

3.4.1. Le risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt résulte d'une variation inattendue du taux d'intérêt et de ses conséquences défavorables sur le bénéfice net et sur la valeur nette d'une société, car il affecte simultanément la valeur de ses actifs et celle de ses passifs.

3.4.2. Le risque de capital ou risque-prix

Certains gestionnaires mettent en évidence le risque de résultat ou risque de bénéfice net provenant du risque de taux d'intérêt, d'autres privilégient l'analyse du risque de capital ou risque-prix, tandis que les institutions financières analysent, calculent et publient l'impact du risque de taux d'intérêt à la fois sur le résultat net et sur la valeur nette.

Le risque-prix s'explique, par exemple, par les fluctuations de la valeur d'une obligation (ou, de façon plus générale, d'un instrument financier à revenu fixe) à la suite de variations du taux d'intérêt.

Supposons qu'un investisseur possède aujourd'hui un million de dollars qu'il projette de faire fructifier pendant une période de trois ans à l'issue de laquelle les sommes de principal et d'intérêt, accumulées à l'abri du risque du taux d'intérêt, seront affectées à l'agrandissement de son usine. L'objectif de l'investisseur est de protéger la valeur du montant final, au bout de trois ans, calculé dès aujourd'hui en fonction du taux de rendement exigé par le marché sur cette obligation.

La meilleure stratégie pour obtenir un montant final prédéterminé, au bout de trois ans, qui soit donc connu à l'avance, et ce, dès aujourd'hui, consiste à acquérir une obligation d'une durée de trois ans (dans un tel cas, l'échéance de l'obligation est supérieure à trois ans, sauf dans le cas particulier d'une obligation à coupon zéro). L'analyse du concept de la durée est effectuée à la section 16.5, qui traite de la mesure du risque. Cette stratégie est supérieure à celle d'acquisition de bons du Trésor, d'une échéance de trois mois, dont le taux est renouvelé et probablement modifié chaque trimestre jusqu'à la fin de l'horizon de trois ans. Ce dernier placement de l'investisseur est exposé au risque-revenu, car le taux d'intérêt peut changer à chaque échéance de trois mois.

La stratégie Horizon = Durée présente un avantage supplémentaire : elle est aussi supérieure à celle qui consiste à placer des fonds dans une obligation du gouvernement fédéral, d'une échéance de trois ans, exposée aussi au risque-revenu en raison de l'incertitude qui caractérise le taux de réinvestissement des coupons. La stratégie Horizon = Durée est garante d'une meilleure protection contre le risque-prix résultant d'une variation défavorable du taux d'intérêt comparativement à celle qui consisterait, par exemple, à acquérir une obligation de six ans d'échéance afin de la revendre dans trois ans, à la fin de la période d'investissement planifié. Le risque-prix correspond à la probabilité de perte en capital, d'autant plus élevée que l'augmentation du taux de rendement exigé est importante par rapport au taux de rendement promis le jour de son acquisition.

3.4.3. Le risque de change

Le risque de change découle de la variabilité du taux de change du dollar canadien pour un exportateur canadien qui a vendu du matériel à un client français pour 2 millions d'euros (règlement dans trois mois) au moment où le taux de change était de :

1 euro = 1,50 $CDA : soit l'équivalent de (2 000 000 euros)(1,50) = 3 000 000 $,
montant à recevoir par l'exportateur canadien selon le taux de :
1 euro = 1,50 $CDA, dans trois mois si le taux de change demeure inchangé.

Supposons que le dollar canadien s'apprécie d'ici le règlement du montant de 2 millions d'euros dans trois mois de la façon suivante :

1 euro = 1,40 $CDA

On constate le résultat suivant : (2 millions d'euros) (1,50 – 1,40) = 200 000 $: soit une perte de change de 200 000 $ que subit l'exportateur canadien.

3.4.4. Le risque-prix ou risque de négociation des marchandises

La valeur des opérations d'exploitation d'une entreprise peut être affectée de façon défavorable par le risque du prix des marchandises, de façon directe (les variations de prix des intrants de la production de l'entreprise) ou indirecte (l'augmentation du prix de l'essence pour une société qui transporte et livre les produits de l'entreprise). Les conséquences du risque-prix sont d'accroître les coûts d'exploitation.

3.5. LES INSTRUMENTS DE MESURE DU RISQUE

3.5.1. La durée

3.5.1.1. Calcul de la durée

L'investisseur qui désire établir le taux de variation du prix d'un actif donné, comme l'obligation, à la suite de variations de taux d'intérêt, peut recourir à la durée.

La durée mesure la vie moyenne d'une obligation. Elle mesure le temps nécessaire pour qu'un investisseur accumule une somme d'argent donnée dans *n* années en plaçant aujourd'hui la valeur actuelle de ce montant en fonction du taux de rendement du marché.

On calcule la durée d'une obligation en faisant la somme pondérée des échéances des différents flux monétaires (soit les intérêts et le principal). La pondération de chacune de ces échéances est la valeur actuelle du flux monétaire correspondant à chaque échéance en proportion du prix de l'obligation. La formule suivante est celle de la durée :

$$\mathrm{DUR} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{FM}_t}{(1+r)^t}(t)}{\sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{FM}_t}{(1+r)^t}} \tag{16.1}$$

où :

FM_t = montant d'intérêt perçu au semestre t ou principal reçu à l'échéance ;

n = nombre de périodes considérées ;

r = taux de rendement à l'échéance de l'obligation ;

t = échéance d'un flux monétaire donné.

EXEMPLE

Calculer la durée de l'obligation A de deux ans d'échéance dont le taux de coupon est de 8 %, la valeur nominale de 1 000 $ et le taux de rendement exigé par le marché de 12 %. On fera, pour les fins de simplification, le calcul sur une base annuelle plutôt que semestrielle.

$$\text{DUR} = \frac{\frac{80}{1{,}12}(1)}{P_o} + \frac{\left(\frac{1\,080}{(1{,}12)^2}\right)(2)}{P_o}$$

$$= \frac{\frac{80}{1{,}12}(1) + \frac{1\,080}{(1{,}12)^2}(2)}{\frac{80}{1{,}12} + \frac{1\,080}{(1{,}12)^2}} = \frac{71{,}42 + 1\,721{,}94}{71{,}42 + 860{,}97}$$

$$= \frac{1\,793{,}36}{932{,}39} = 1{,}92 \text{ année}$$

L'obligation A d'une échéance de deux ans a une durée de 1,92 année. La durée est toujours inférieure à l'échéance, sauf pour les obligations à coupon zéro ou les titres à court terme vendus à escompte comme les bons du Trésor de six mois d'échéance, par exemple, où la durée est égale à l'échéance.

3.5.1.2. L'utilisation de la durée

La relation suivante indique que le taux de variation du prix d'une obligation varie, de façon approximative, proportionnellement à sa durée quand les taux d'intérêt varient :

$$\frac{\Delta P}{P} = -\left(\frac{D}{1+r}\right)(\Delta r) \tag{16.2}$$

où :

P = valeur marchande de l'obligation ;

D = durée de l'obligation ;

ΔP = variation du prix de l'obligation en dollars à la suite d'une variation donnée du taux d'intérêt ;

Δr = variation du taux d'intérêt ;

$\frac{\Delta P}{P}$ = taux de variation du prix ou sa fluctuation ou volatilité.

EXEMPLE

Calculer le taux de variation en pourcentage, et ensuite en dollars de l'obligation A étudiée ci-haut dans le cas où les taux d'intérêt du marché, d'une part, augmentent à 14 % et, d'autre part, baissent à 9 %. Faire les mêmes calculs avec une durée de 4,5 années.

1. Cas où les taux augmentent de 12 à 14 %, donc de 2 %. Nous pouvons calculer rapidement, de façon approximative, le prix de l'obligation considérée ci-haut de durée égale à 1,92 année, soit de 932,39 $ au taux d'intérêt du marché de 12 %, et ensuite déterminer la variation de ce prix à la suite de la variation de 2 % du taux d'intérêt. D'où :

$$\frac{\Delta P}{P} = \left(\frac{-1,92}{1,12}\right) \times (2\,\%) = \underline{-3,428\,\%}$$

$$\text{et } \Delta P = (932,39\,\$)\,(-3,428\,\%) = \underline{-31,96\,\$}$$

Le taux de variation du prix est de –3,428 % et le prix baisse d'un montant de 31,96 $.

2. Les taux baissent de 12 % à 9 %, c'est-à-dire de 3 %.

$$\frac{\Delta P}{P} = \left(\frac{-1,92}{1,12}\right) \times (-3\,\%) = (-1,714)\,(-3\,\%) = \underline{5,14\,\%}$$

$$\Delta P = (932,39\,\$)\,(+5,14\,\%) = \underline{47,92\,\$}$$

Le taux de variation du prix est de 5,14 % et le prix de l'obligation augmente de 47,92 $.

3. Une durée de 2,5 années et des taux d'intérêt qui augmentent de 12 % à 14 % donnent le résultat suivant :

$$\frac{\Delta P}{P} = \left(\frac{-2,5}{1,12}\right) \times (2\,\%) = \underline{-4,464\,3\,\%}$$

$$\text{et} \quad \Delta P = (932,39\,\$)\,(-4,464\,3\,\%) = \underline{-41,625\,\$}$$

4. Une durée de 2,5 années et des taux d'intérêt qui baissent de 12 à 9 % donnent les résultats suivants :

$$\frac{\Delta P}{P} = \left(\frac{-2,5}{1,12}\right) \times (-3\,\%) = \underline{+6,696\,\%}$$

$$\text{et} \quad \Delta P = (932,39\,\$)\,\,(6,696\,\%) = \underline{+62,43\,\$}$$

On constate que plus la durée est élevée, toutes choses égales, plus les fluctuations de prix ou la volatilité, c'est-à-dire le risque de l'obligation, sont grandes. la durée renseigne donc sur le risque d'une obligation.

Remarque :

Notons que lorsque les taux d'intérêt du marché varient, la durée de l'obligation change. Cependant, il n'en n'a pas été tenu compte ci-haut afin de simplifier les calculs.

3.5.1.3. La couverture d'une exposition au risque de taux d'intérêt par l'utilisation de la durée

La détermination du risque de la position adoptée sur le marché au comptant est établie à l'aide de la durée, qui permet de calculer la variation du prix d'une obligation à la suite d'un changement donné du taux d'intérêt. Considérons une obligation du gouvernement fédéral, détenue sur le marché au comptant, d'une durée de 7 années et dont le prix égale 106 $ par 100 $ de valeur nominale, et le taux de rendement du marché égal à 6 %.

EXEMPLE

Supposons qu'une institution financière détienne 30 M$ de valeur nominale de cette obligation du gouvernement fédéral, dont la valeur marchande est de 32 M$. Supposons que cette institution financière prévoie correctement l'évolution des taux d'intérêt et qu'elle s'attende à une augmentation de 100 points de base d'ici trois mois. La variation prévue de la valeur marchande de la position au comptant est, conformément à la relation (16.2), approximativement de:

$$\Delta P \text{ en } \$ = (-D)(P)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)$$

$$D\Delta \text{ en } \$ = (-7)\ (32)\left(\frac{1\,\%}{1{,}06}\right)$$

$$= -2\,113\,207\,\$ \text{ ou} -2{,}11 \text{ M\$ approximativement}$$

L'institution financière en question va tenter de neutraliser, par le recours au marché à terme, la perte de 2,11 M$ qu'elle prévoit subir sur le marché au comptant,

$$\left[= \left(\frac{2\,113\,207\,\$}{30\,000\,000\,\$}\right)(100)\right] = 7{,}04\ \$$$

soit 7,04 $ par 100 $ de valeur nominale ou 7 044 $ par contrat à terme. La valeur marchande du contrat à terme (dont la valeur nominale est de 100 000 $) baisserait, dans le cas d'une augmentation de 100 PB des taux d'intérêt, de 106 000 $ à 98 956 $ (= 106 000 $ – 7 044 $).

Elle va couvrir son exposition au risque de taux d'intérêt en adoptant une position à découvert sur le marché à terme, contraire à celle détenue sur le marché au comptant.

Il s'agit de vendre 300 contrats à terme de valeur nominale de 100 000 $ chacun. En effet:

$$\frac{2\,113\,207\,\$}{98\,956\,\$ - 106\,000\,\$} = -300 \text{ contrats à terme de taux d'intérêt}$$

Le signe négatif indique bien que la couverture adéquate consiste à vendre 100 contrats à terme.

3.5.2. L'analyse de l'écart de sensibilité aux variations des taux d'intérêt

L'écart de sensibilité mesure l'impact du risque de taux d'intérêt sur les résultats financiers de l'entreprise. L'écart est calculé par la différence entre les actifs à taux variables et les passifs à taux variables sur un horizon donné, de un an par exemple.

On considère comme actifs ou passifs à taux variables, c'est-à-dire sensibles aux taux d'intérêt, ceux dont les taux d'intérêt sont renégociés ou renouvelés durant l'horizon choisi de un an dans notre exemple. L'écart de sensibilité devient :

$$\text{ÉCART} = \text{Actifs sensibles aux taux d'intérêt} - \text{Passifs sensibles aux taux d'intérêt}$$

$$\text{ÉCART} = \text{AST} - \text{PST} \qquad (16.3)$$

EXEMPLE

Une banque dont les actifs sensibles aux taux d'intérêt s'élèvent à 12,65 G\$ et dont les passifs sensibles aux taux d'intérêt se chiffrent à 10,15 G\$, en considérant un horizon d'un an, a un écart de sensibilité de :

$$\text{ÉCART} = 12{,}65 - 10{,}15 = +2{,}5 \text{ G\$}$$

L'impact d'une augmentation des taux d'intérêt de 2 %, par exemple, à l'actif et au passif sur toute une année, sur le revenu net d'intérêt de cette banque (revenus créditeurs nets), est calculé de la façon suivante :

$$\Delta \text{RNI} = (\text{ÉCART})\ (\Delta r) \qquad (16.4)$$

où :

ΔRNI = changement du revenu net d'intérêt en dollars ;

Δr = variation du taux d'intérêt ;

ΔRNI = (+2,5) (+2 %) = +0,05 G\$ ou + 50 millions de \$.

Il importe de noter que l'on a supposé que les taux d'intérêt augmentaient de 2 % aussi bien sur les actifs que sur les passifs sensibles aux taux d'intérêt durant l'année en question.

On constate que le revenu net d'intérêt s'accroît si l'écart de sensibilité est positif et que les taux d'intérêt augmentent, car cette banque a 2,5 G\$ de plus d'actifs sensibles aux taux d'intérêt que de passifs sensibles aux taux d'intérêt. Les intérêts gagnés à l'actif augmentent d'un montant supérieur à l'accroissement des intérêts chargés au passif lorsque l'écart est positif et que les taux d'intérêt augmentent.

Le tableau suivant indique la relation et le signe entre le revenu net d'intérêt d'une part, et l'écart et une variation donnée du taux d'intérêt d'autre part, pour différentes possibilités d'écart de sensibilité et de taux d'intérêt :

(Écart)	·	(Variation du taux d'intérêt)	=	(Variation du revenu net d'intérêt)
(+)	·	(+)	=	(+)
(+)	·	(–)	=	(–)
(–)	·	(+)	=	(–)
(–)	·	(–)	=	(+)

RÉSUMÉ

Les produits dérivés que sont les options et les contrats à terme des taux d'intérêt permettent la modification de l'exposition au risque d'un actif. Ces instruments financiers modernes sont transigés en Bourse. Ils ont considérablement augmenté la flexibilité en matière de gestion du risque de portefeuille de titres, car la modification du risque se fait rapidement et à un coût modeste. Les gestionnaires d'une institution financière ou d'une entreprise industrielle ou commerciale doivent comprendre les conséquences des différentes composantes du risque du marché sur le résultat net et sur la valeur nette, à savoir :

- le risque de taux d'intérêt ;
- le risque de change ;
- le risque-prix des actions ou le risque de négociation des marchandises.

Tout investisseur devrait pouvoir reconnaître et mesurer les différentes catégories de risque de trésorerie afin de recourir, en connaissance de cause, à la stratégie de couverture la plus efficace.

Le gestionnaire ou l'investisseur qui utilise les produits dérivés poursuit les objectifs de protection de revenu net, de protection de la valeur nette ou du capital d'une entreprise ou désire aussi s'assurer, dès aujourd'hui, du prix ou du taux d'intérêt concernant une transaction future.

Les instruments de mesure du risque de taux d'intérêt sont nombreux. On peut citer la durée qui mesure la vie moyenne d'un instrument financier ou le temps nécessaire pour qu'un investisseur accumule une somme d'argent donnée dans *n* années en fonction du taux d'intérêt du marché. Par ailleurs, l'analyse de l'écart de sensibilité au taux d'intérêt permet de mesurer les conséquences du risque de taux d'intérêt sur les résultats de l'entreprise.

QUESTIONS

1. Pourquoi les trésoriers d'entreprises doivent-ils recourir aux produits dérivés ? Quel est l'objectif poursuivi ?
2. En quoi consiste une opération de couverture par anticipation ?
3. Décrire une opération de protection à découvert.
4. Expliquer les caractéristiques du risque de taux d'intérêt et du risque-prix.
5. Expliquer le concept de durée ainsi que son utilité pour couvrir une exposition au risque de taux d'intérêt.
6. Décrire l'écart de sensibilité au taux d'intérêt ainsi que l'importance qu'il représente dans la détermination de la variation du revenu net d'intérêt.

PROBLÈMES

1. LA DURÉE

La durée se distingue par le calcul de la variation approximative du prix d'une obligation consécutive à une modification donnée des taux d'intérêt. Considérons une institution financière qui détient pour 10 M$ de valeur nominale d'une obligation du gouvernement fédéral. La durée de cette obligation est de 5,4 années et son prix de 102, et le taux de rendement du marché, pour cette obligation est de 5,6 %. La valeur marchande de ces obligations est de 10,2 M$. Supposons que l'institution financière en question s'attende, avec une très forte probabilité, à une augmentation de 50 points de base des taux d'intérêt.

- **On demande** d'établir la stratégie que doit adopter cette institution financière en utilisant le marché à terme des taux d'intérêt, en précisant :

  a) la variation prévue de la valeur marchande de la position au comptant en obligations du gouvernement fédéral détenues par l'investisseur, pour un changement de 50 PB des taux d'intérêt;

b) le nombre de contrats à terme de taux d'intérêt requis pour couvrir l'exposition de l'institution financière au risque de taux d'intérêt.

■ **Solutions suggérées :**

a) La valeur du portefeuille d'obligations que possède l'institution financière changera, pour une variation de +50 points de base, de :

$$\begin{aligned}\Delta P \text{ en } \$ &= (-D)(P)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)\\ &= (-5,4)(10,2 \text{ M\$})\left(\frac{0,5\,\%}{1,056}\right)\\ &= -260\,800\,\$ = -0,2608 \text{ M\$}\end{aligned}$$

b) La perte d'un montant de 0,2608 M$ pour 10 M$ de valeur nominale correspond à 2 608 $ par 100 $ de valeur nominale ou 2 608 $ par contrat à terme de taux d'intérêt sur les obligations du gouvernement fédéral (dont la valeur nominale est de 100 000 $). La valeur marchande du contrat à terme passerait, dans le cas d'une hausse de taux d'intérêt de 50 PB, de 102 000 $ à 99 392 $. La couverture d'une position au comptant, comme celle que nous traitons dans ce problème, se fait à l'aide d'une opération de protection à découvert (*short hedge*) sur le marché à terme, dont la nature est contraire à la position que l'institution financière a sur le marché au comptant. La stratégie à suivre consiste à vendre le nombre suivant de contrats à terme :

$$\frac{260\,800\,\$}{99\,392\,\$ - 102\,000\,\$} = -100 \text{ contrats à terme de taux d'intérêt.}$$

Le signe négatif qui précède le nombre de contrats à terme signifie que la couverture qui convient au risque auquel est exposée l'institution financière est celle d'une vente de 100 contrats à terme.

2. LA BANQUE X

La Banque X présente le bilan simplifié de fin de période, en valeurs marchandes, qui suit :

(en G$)

Actif	**Passif**
A= 150	L = 135 E = 15
150	150

où :

A = actif ;
L = passif ;
E = *equity* ou fonds propres.

Supposons que les taux d'intérêt augmentent de 10 à 12 %. La durée de l'actif est de 6 ans et celle du passif, de 4 ans.

- **On demande :**

a) de calculer la variation des fonds propres en dollars et leur niveau après le changement de taux d'intérêt ;

b) de déterminer la variation de l'actif ainsi que le montant de l'actif total après le changement de taux d'intérêt ;

c) de calculer le niveau du passif à la suite des variations des taux d'intérêt et d'établir le nouveau bilan ;

d) de calculer le ratio de suffisance de capital (CA) avant et après le changement de taux d'intérêt ;

e) d'expliquer si la banque est devenue insolvable après le changement de taux d'intérêt ;

f) d'indiquer les stratégies susceptibles de neutraliser l'effet défavorable des variations de taux d'intérêt sur la valeur nette ou fonds propres ;

g) d'établir de quelle façon l'écart de sensibilité et la durée mesurent le risque de taux d'intérêt.

- **Solutions suggérées :**

a) La détermination de la variation des fonds propres (ΔE) et de leur niveau après le changement des taux d'intérêt.

$$\begin{aligned} \Delta E &= -[E_D]\,\frac{(\Delta_r)}{(1+r)}\,(A) \\ &= -[6-3,6]\left(\frac{2\,\%}{1,10}\right)(150) \\ &= -\,6,545\,4 \text{ G\$} \end{aligned}$$

Le montant des fonds propres s'élève, après l'augmentation des taux d'intérêt, à :

$$\begin{aligned} E &= 15 - 6,545\,4 \\ &= 8,454\,5 \text{ G\$} \end{aligned}$$

b) Le calcul de la variation de l'actif (ΔA) et de son niveau après l'augmentation des taux d'intérêt.

$$\begin{aligned} A &= \left(-D_A\right)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)(A) \\ &= (-6)\left(\frac{2\,\%}{1,10}\right)(150) \\ &= -16,363\,6 \text{ G\$} \end{aligned}$$

L'actif total devient, après l'augmentation des taux d'intérêt, égal à :

$$A = 150 - 16,363\,6 = 133,636\,3 \text{ G\$}$$

c) Le nouveau montant du passif et nouveau bilan après le changement des taux d'intérêt.

$$\begin{aligned} \text{Passif ou } L &= A - E \\ &= 133,636\,3 - 8,454\,5 \\ &= 125,181\,8 \text{ G\$} \end{aligned}$$

Bilan après la variation des taux d'intérêt (en G$) :

A= 133,636 3	L = 125,181 8 E = 8,454 5
133,636 3 $	133,636 3 $

d) Suffisance de capital (CA).

- Avant l'augmentation des taux d'intérêt :

$$CA = \frac{15}{150} = 10\,\%$$

- Après l'augmentation des taux d'intérêt :

$$\begin{aligned} CA &= \frac{8,454\,5}{133,636\,3} \\ &= 6,33\,\$ \end{aligned}$$

e) La Banque X est toujours solvable.

f) L'écart de durée (E_D) devrait tendre vers zéro de façon substantielle ou y être égal par les stratégies suivantes :

- réduire la durée de l'actif en abrégeant l'échéance des prêts accordés ;

– augmenter la durée du passif en allongeant l'échéance des dépôts, des certificats de dépôts et autres emprunts ;

– augmenter le ratio d'endettement.

g) La mesure du risque de taux d'intérêt se fait de la façon suivante :

– par l'écart de la sensibilité :
  - qui utilise des valeurs aux livres,
  - qui mesure l'impact du risque de taux d'intérêt sur la rentabilité,
  - qui se limite à utiliser les actifs à taux sensibles et les passifs à taux sensibles et non la totalité du bilan.

– par la « durée » :
  - qui utilise des valeurs marchandes,
  - qui mesure l'impact du risque de taux d'intérêt sur la valeur nette de la banque,
  - qui considère et traite la totalité du bilan.

3. L'INVESTISSEUR PAUL

L'investisseur Paul possède, fin septembre 200X, un portefeuille d'obligations de 25 M$ qu'il ne peut vendre que dans deux mois. Il désire protéger son portefeuille contre le risque de taux d'intérêt d'ici le 30 novembre 200X. On vous fournit, dans le tableau suivant, les cotes du marché au comptant et du marché à terme de taux d'intérêt par 100 $ de valeur nominale :

	Marché au comptant	Marché à terme
30 septembre 200X	80	78
30 novembre 200X	76	73,7
Variation	4	4,3

■ **On demande :**

a) d'indiquer l'évolution des taux d'intérêt entre le 30 septembre et le 30 novembre 200X ;

b) de préciser la stratégie que l'investisseur doit adopter sur le marché à terme afin de couvrir adéquatement son portefeuille d'obligations ;

c) d'expliquer et de calculer les résultats obtenus sur le marché au comptant et sur le marché à terme ;

d) d'expliquer le résultat net obtenu par l'investisseur ainsi que la raison de l'imperfection de la couverture effectuée par l'investisseur Paul.

■ **Solutions suggérées :**

a) Les taux ont augmenté, entraînant une baisse des prix des obligations gouvernementales.

b) La stratégie suivante sera adoptée :

La vente à découvert sur les marchés à terme de taux d'intérêt, soit :

$$\frac{25\,000\,000\,\$}{100\,000\,\$} = 250 \text{ contrats à terme}$$

c) Les résultats obtenus :

c.1 Sur le marché au comptant :

$$\text{Perte} = (76\,\$ - 80\,\$)\ (250\,000\,\$) = 1\,000\,000\,\$$$

c.2 Sur le marché à terme de taux d'intérêt :

$$\text{Gain} = (78\,\$ - 73{,}70\,\$)\ (250\,000\,\$) = 1\,075\,000\,\$$$

d) La protection est imparfaite en raison du risque de base. Ce dernier résulte d'une différence de variations de prix d'un marché à l'autre.

4. LE FONDS DE PENSION LE DYNAMIQUE

Le fonds de pension Le Dynamique s'attend aujourd'hui le 20 janvier à une entrée de fonds de 30 M$ pour le 25 mars. L'objectif de cette institution financière est de placer ces fonds dans des obligations gouvernementales fédérales ; cependant, elle redoute de subir de façon défavorable le risque de taux d'intérêt entre le 20 janvier et le 25 mars et désire protéger le rendement de ses obligations au niveau d'aujourd'hui. Le tableau suivant fournit des informations sur l'évolution du marché au comptant et du marché à terme des taux d'intérêt entre les deux dates mentionnées ci-haut par 100 $ de valeur nominale :

	Marché au comptant	**Marché à terme**
20 janvier 200X	85	86
25 mars 200X	91,5	91
Variation	6,5	6

■ **On demande :**

a) de préciser, à la lumière du tableau ci-haut, l'évolution des taux d'intérêt entre le 20 janvier et le 25 mars 200X ;

b) d'expliquer la stratégie que le fonds de pension doit suivre pour stabiliser le taux de rendement sur obligations conformément au taux d'intérêt actuel et de déterminer par conséquent les transactions qu'il doit effectuer sur le marché à terme le 20 janvier;

c) d'expliquer les opérations que le fonds de pension exécutera le 25 mars sur les marchés au comptant et à terme ainsi que les résultats respectifs obtenus de même que le résultat net;

d) de déterminer le nombre de contrats à terme qui aurait dû être transigé le 20 janvier afin de se retrouver avec une couverture parfaite. Expliquer pourquoi le nombre de contrats à terme achetés en janvier aurait dû être ajusté pour obtenir une protection parfaite;

e) d'expliquer, dans le cas où les taux d'intérêt auraient évolué favorablement, si le fonds de pension aurait dû regretter d'avoir utilisé la couverture procurée par le marché à terme.

■ **Solutions suggérées:**

a) L'augmentation des prix des obligations gouvernementales indique une baisse de leur taux de rendement, c'est-à-dire une baisse des taux d'intérêt sur le marché.

b) Une stratégie de couverture par anticipation permet de neutraliser le risque de taux d'intérêt. Il s'agit d'acheter 300 contrats à terme de taux d'intérêt le 20 janvier:

$$\frac{30\ 000\ 000\,\$}{100\ 000\,\$} = 300 \text{ contrats à terme}$$

c) Les résultats obtenus le 25 mars:

c.1 Sur le marché au comptant:

Perte = (85 $ –91,50 $) (300 000 $)
= 1 950 000 $

c.2 Sur le marché à terme de taux d'intérêt:

Gain = (91 $ – 86 $) (300 000 $)
= 1 500 000 $

c.3 Perte nette:

= 1 950 000 $ – 1 500 000 $
= 450 000 $

d) Nombre de contrats requis pour une protection optimale :

$$(N\,F)(\Delta F) = (N\,S)(\Delta S)$$
$$N\,F = \frac{(N\,S)(\Delta S)}{\Delta F}$$
$$N\,F = \left[(300)(6{,}5)\right]/5$$
$$= 390 \text{ contrats}$$

En effet :

Gain = (390 000 $) (91 $ – 86 $)
= 1 950 000 $

La perte d'un montant de 1 950 000 $ sur le marché au comptant est ainsi totalement annulée.

e) L'objectif du fonds de pension « Le Dynamique » est de se protéger contre le risque de taux d'intérêt et non de spéculer. Il ne doit donc pas regretter de recourir à la couverture du marché à terme si l'évolution des taux d'intérêt devait, par la suite, lui être favorable.

5. LE FONDS COMMUN DE PLACEMENTS L'EXCELLENCE

Le fonds commun de placements L'Excellence possède des obligations dont la valeur nominale est de 20 M$. Ce fonds veut protéger son portefeuille d'obligations entre aujourd'hui le 20 juin et le 30 juillet 200X contre des variations imprévues de taux d'intérêt. Son courtier lui recommande d'utiliser le marché des options sur contrats à terme de taux d'intérêt et lui fournit les chiffres suivants pour l'aider dans sa décision de couverture :

	22 juin 200X	**31 juillet 200X**
Obligations 200Y	97,00 $	94,50 $
Prix de l'option de vente sur 200Y	260,00 $	630,00 $
Portefeuille à couvrir	20 000 000,00 $	

L'option de vente est créée sur une obligation de valeur nominale de 25 000 $ avec un taux de coupon de 7 % d'échéance 200Y.

- **On demande :**

a) d'expliquer la stratégie de protection contre le risque de taux d'intérêt que devrait adopter l'investisseur en utilisant le marché des options et de déterminer le nombre d'options nécessaires à cette protection ainsi que le coût d'achat de ces options ;

b) de déterminer les résultats obtenus par l'investisseur sur son portefeuille d'obligations et sur le marché des options le 30 juillet 200X, et de donner votre appréciation sur le résultat final de l'opération de couverture ;

c) de proposer les mesures susceptibles d'assurer une meilleure protection que celle fournie sous b) ;

■ **Solutions suggérées :**

a) Le risque de taux d'intérêt pour le fonds commun de placements L'Excellence est celui d'une augmentation des taux d'intérêt ou d'une baisse des prix. La stratégie à suivre est celle de l'achat d'options de vente sur des contrats à terme de taux d'intérêt, soit :

$$\frac{20\,000\,000\,\$}{25\,000\,\$} = \text{800 contrats d'options de vente achetés sur des contrats à terme de taux d'intérêt.}$$

b) Les résultats obtenus au 30 juillet :

b.1 Sur le marché des options :

$$\text{Gain} = (630\,\$ - 260\,\$)\left(\frac{20\,000\,000\,\$}{25\,000\,\$}\right)$$

$$= 296\,000\,\$$$

b.2 Sur le marché au comptant :

$$\text{Perte} = (97\,\$ - 94{,}50\,\$)\ (200\,000\,\$)$$
$$= 500\,000\,\$$$

b.3 Perte nette :

$$= 500\,000\,\$ - 296\,000\,\$$$
$$= 204\,000\,\$$$

Une perte nette relativement élevée requiert l'amélioration de la stratégie de couverture adoptée.

c) Mesures additionnelles requises pour une meilleure protection contre le risque de taux d'intérêt, à l'aide du ratio de couverture.

Le ratio de couverture est égal à :

$$\frac{630 / 25\,000\,\$ / 100}{260 / 25\,000\,\$ / 100} = \frac{2{,}52}{1{,}04}$$
$$= 1{,}69$$

D’où la protection optimale contre le risque de taux d’intérêt consiste à acheter un plus grand nombre d’options de vente sur contrats à terme de taux d’intérêt pour un total de :

(800) (1,69) = 1 352 de contrats d’options de vente à acheter.

En effet :

Gain = (630 $ – 260 $) (1 352)
= 500 240 $

Ce dernier montant neutralise la perte de 500 000 $ encourue sur le marché au comptant.

CHAPITRE 4

Les instruments financiers modernes hors cote de protection contre le risque de taux d'intérêt

Le chapitre précédent a traité des contrats à terme financiers négociés en Bourse. D'autres marchés de protection contre l'exposition au risque de taux d'intérêt sont hors cote, c'est-à-dire qu'ils font l'objet de transactions ailleurs que sur les marchés organisés que sont les Bourses. Quatre types d'instruments financiers font l'objet de ce chapitre, à savoir :

- les contrats *swaps* ou d'échange de taux d'intérêt ;
- les contrats à terme de taux d'intérêt de gré à gré ;
- les plafonds ou *caps* de taux d'intérêt ;
- les *swaptions* ou options sur les contrats de *swaps* de taux d'intérêt.

4.1. LA COUVERTURE PAR LES *SWAPS* OU ÉCHANGES DE TAUX D'INTÉRÊT SUR LES MARCHÉS HORS COTE

4.1.1. L'économie du *swap*

Un contrat de *swap* ou d'échange de taux d'intérêt consiste en un échange de versements de taux d'intérêt entre deux entités. Chaque partie demeure totalement responsable du principal et du service de la dette correspondante. Une partie B prend en charge le versement d'un taux fixe en cédant l'obligation du versement d'un taux variable à la partie A. Cette dernière s'engage à assurer, dans le cadre du contrat *swap*, le versement à taux variable et cède l'obligation du versement à taux fixe à la partie A.

Un *swap* de taux d'intérêt modifie la nature du bilan en changeant les caractéristiques des flux monétaires d'intérêt sur dettes, afin d'assurer un meilleur appariement entre actifs et passifs.

Les avantages que retirent les deux parties contractantes (deux entreprises ou une entreprise et une banque) sont nombreux :

- une réduction du coût du financement ;
- une protection contre l'exposition au risque de taux d'intérêt ;
- un accès plus facile aux marchés nationaux et internationaux de capitaux ;
- la réduction ou l'extension d'échéances de dette ;
- la modification du risque d'une transaction ;
- l'amélioration du taux de rendement ;
- la modification de la sensibilité des actifs au taux d'intérêt ;
- la gestion des actifs et des passifs ;
- l'assurance de coûts de financement stables pour l'avenir.

Pour les investisseurs institutionnels comme les sociétés d'assurance, les fiducies et les fonds de pension, le *swap* de taux d'intérêt est un moyen rapide de modifier la nature des actifs et des passifs, à l'aide d'échanges d'obligations financières entre les deux parties contractantes, sans que le bilan en tant que tel soit modifié dans aucune de ses parties.

Un contrat d'échange de taux d'intérêt peut s'étendre sur 15 ans. C'est un ensemble de contrats à terme qui présentent des avantages souvent supérieurs à ceux des options et des contrats à terme transigés en Bourse et de ceux négociés de gré à gré analysés dans la section suivante. En effet :

- Les échéances d'un *swap* de taux d'intérêt sont plus longues.
- Les transactions de *swap* de taux d'intérêt sont plus efficaces, car une seule transaction sur *swap* donne les mêmes résultats qu'un ensemble de transactions sur contrat à terme, par exemple.
- Les contrats de *swap* de taux d'intérêt sont plus liquides et se caractérisent par une plus grande flexibilité qu'un ensemble de contrats à terme de taux d'intérêt de gré à gré, même si ces derniers peuvent produire les mêmes caractéristiques de risque-rendement.

L'analyse de l'exposition au risque de taux d'intérêt du bilan simplifié d'une banque commerciale X permet de décrire la nature d'un contrat de *swap* de taux d'intérêt.

Bilan simplifié – Banque X, fin 200X (en M$)

Actif à taux variables (ATV)	50 $	Passif à taux variables (PTV)	75 $
Actif à taux fixes (ATF)	145	Passif à taux fixes (PTF)	100
		Fonds propres	20
Actif total	195 $	Passif et fonds propres	195 $

La banque X a un écart de sensibilité négatif de :

$$\text{ÉCART} = 50 - 75 = -25 \text{ M\$}$$

Elle est donc exposée au risque d'augmentation de taux d'intérêt qui a pour conséquence, lorsqu'il se concrétise par une même augmentation du taux d'intérêt à l'actif et au passif à taux variables, d'entraîner un accroissement des coûts de financement du passif à taux variables supérieur à l'accroissement des revenus à taux variables à l'actif. Un contrat de taux d'intérêt entre la banque X et une société d'assurance Y, par exemple, est établi afin de neutraliser les conséquences défavorables sur la rentabilité dues à un écart négatif dans le cas d'une augmentation des taux d'intérêt.

L'écart de 25 M$ est le capital dit notionnel de référence du contrat de *swap* de taux d'intérêt :

- La banque X versera un taux d'intérêt fixe sur ce capital notionnel de 25 M$ à la société d'assurance Y.
- La banque X recevra un taux d'intérêt variable sur ce capital notionnel de 25 M$ de la part de la société d'assurance Y.

La banque X a ainsi créé, sans aucune modification du bilan, à l'aide de ce *swap* de taux d'intérêt, une sorte d'actif fictif à taux variable de 25 M$ destiné à neutraliser l'écart négatif initial du même montant.

La banque X s'est créé, en contrepartie, un passif fictif de 25 M$ de longue échéance.

La situation nouvelle créée par le *swap* de taux d'intérêt entraîne une modification fictive du profil du bilan de la banque X. Les caractéristiques du bilan sont modifiées :

- comme si l'actif à taux variable avait augmenté de 25 M$;
- comme si le passif à taux fixe avait augmenté de 25 M$.

Le bilan de la banque X se caractérise par la situation fictive suivante :

Situation fictive du bilan de la banque X, fin 200X

ATV	75 M$	PTV	75 M$
ATF	145 M$	PTF	125 M$
		Fonds propres	20 M$
	220 M$		220 M$

Le *swap* de taux d'intérêt ne constitue pas une activité du bilan. Il ne figure pas au bilan en tant que tel. Il est classé parmi les activités hors bilan.

4.1.2. Un exemple simplifié de *swap* de taux d'intérêt

Considérons les bilans de deux sociétés, A et B, dont les expositions au risque de taux d'intérêt sont de sens opposés. Précisons que la société B a une cote de crédit BB, tandis que celle de la société A est de AA.

Structures simplifiées des bilans des deux sociétés A et B fin 200X

AST : 100 M$ (actif sensible aux taux)	100 M$ obligations à 5 ans à 10,8 %	AIT : 100 M$ (actif insensible aux taux)	Dette à court terme : 100 M$ LIBOR + 75 PB

Les deux sociétés A et B font face au risque de taux d'intérêt, et ce, dans le cas où les taux d'intérêt baissent de façon imprévue pour la société A, résultant en une baisse des revenus de l'actif, et dans le cas où les taux augmentent de façon imprévue pour la société B, avec pour conséquence une augmentation des coûts de financement.

La banque Banco prépare un accord de *swap* qui porte sur un montant de 100 M$ et dont les clauses principales sont les suivantes :

1. La société B, qui recherchait un financement à taux fixe pour éliminer son risque de taux d'intérêt, verse à la banque 11 % comme taux fixe annuel sur cinq ans. Un financement par émission d'obligations sur les marchés financiers lui aurait coûté 12 % étant donné sa cote de crédit insuffisante (BB).
2. La société A verse à la banque le taux d'intérêt à court terme LIBOR au lieu de payer le LIBOR + 25 PB si elle s'adressait directement au marché monétaire pour éliminer son risque de taux d'intérêt.
3. La banque verse un taux d'intérêt annuel fixe de 10,9 % à la société A et le LIBOR à la société B ; elle garde donc par-devers elle 0,01 % ou 10 points de base comme commission de rémunération.

Les conséquences de l'accord *swap* de taux d'intérêt sont les suivantes :

1. Pour la société B :

– Elle verse 11 % de taux fixe (au lieu de 12 % si elle devait émettre des obligations à long terme sur le marché) et économise ainsi : 12 % – 11 % = 1 %	100 PB
– Elle verse le LIBOR + 75 PB mais ne reçoit que LIBOR de la part de la société A, donc un désavantage de :	– 75 PB
Économie totale :	+ 25 PB

2. Pour la société A :

– Elle verse 10,8 % sur son obligation à long terme de 5 ans et reçoit 10,9 % de la banque. Elle réalise donc un gain de :	+ 10 PB
– Elle verse seulement le LIBOR lorsqu'elle aurait dû verser le LIBOR + 25 PB sur le marché monétaire pour se protéger contre le risque de taux d'intérêt, donc un gain de :	+ 25 PB
Économie totale :	35 PB

3. La banque reçoit une rémunération de 11 % – 10,9 % = 0,1 % ou 10 PB — 10 PB

L'économie totale réalisée est de :

25 + 35 + 10 = 70 PB annuellement,
soit (100 M$) (0,7 %) = 0,7 M$ ou 700 000 $ par année.

dont :

1. 250 000 $ économisés par B, (= 100 M$) (0,25 %)
2. 350 000 $ économisés par A, (= 100 M$) (0,35 %)
3. et une commission de 100 000 $ pour la banque, (= 100 M$) (0,1 %)

Le *swap* de taux d'intérêt présente ainsi deux avantages considérables, à savoir :

1. la protection contre le risque de taux d'intérêt,
2. des réductions ou économies de coût de financement appréciables aux parties contractantes.

Notons que l'économie totale de 0,7 %, réalisée par l'accord de *swap*, est calculée par l'écart entre la différence des taux longs (12 % – 10,8 %) et la différence des taux courts :

$$(12\,\% - 10{,}8\,\%) - [(\text{LIBOR} + 0{,}75) - (\text{LIBOR} + 0{,}25)] =$$
$$12\,\% - 10{,}8\,\% - 0{,}75 + 0{,}25 = 1{,}2\,\% - 0{,}50\,\% = 0{,}7\,\% \text{ ou } 70 \text{ PB}$$

4.2. LES CONTRATS À TERME DE TAUX D'INTÉRÊT DE GRÉ À GRÉ (*FORWARD RATE AGREEMENTS* OU FRA)

4.2.1. Objectif

Il s'agit de protéger une partie signataire du FRA contre une augmentation des taux d'intérêt et l'autre partie contre une baisse des taux d'intérêt. L'emprunteur achète un FRA pour se prémunir contre une hausse des taux d'intérêt, tandis que le prêteur vend un FRA pour se couvrir contre une baisse des taux d'intérêt.

Un contrat FRA stabilise le coût de financement de l'emprunteur de même qu'il stabilise le taux de rendement d'un gestionnaire de portefeuille qui dispose de liquidités excessives pour une certaine période.

Un contrat à terme de gré à gré est un contrat non négociable auquel il ne peut être mis un terme avant l'échéance. Le coût de l'emprunt d'une entreprise qui acquiert le FRA est fixé pour une période déterminée. Ce coût ne peut être modifié pour faire bénéficier l'entreprise d'une éventuelle baisse de taux.

Un FRA ne stipule pas d'échange de capital ou de montant notionnel. Ce dernier sert de référence pour la couverture et pour le calcul des versements éventuels des différences de taux d'intérêt.

Le FRA se distingue par des échéances d'un mois, trois mois, six mois et un an. L'échéance est le temps couvert par le contrat et se situe entre deux dates futures. Le règlement s'effectue, en général, au début de la période couverte par le contrat nécessitant la détermination de la valeur actuelle du montant du règlement.

Le montant du règlement de différence de taux d'intérêt varie donc quelque peu avec la date du règlement. Si le règlement s'effectue à la fin de la période couverte par le FRA, c'est le montant de différence d'intérêt en tant que tel qui est versé. Par contre, si le règlement intervient en début de période, c'est la valeur actuelle de la différence d'intérêt qui fait l'objet du règlement.

Notons que si la différence de taux d'intérêt est négative, l'acquéreur du FRA doit verser le montant de différence d'intérêt au vendeur du FRA. Par ailleurs, si cette différence est positive, c'est le vendeur du FRA qui doit la verser à l'acheteur du FRA.

4.2.2. Les conditions d'un FRA entre une entreprise (acheteuse du FRA) et une banque (vendeuse du FRA)

1. Supposons qu'au moment du règlement du contrat, le taux de rendement ou d'intérêt du marché (r_m) excède le taux maximal (r_{maxi}) ou taux plafond fixé par contrat :

   $$r_m > r_{maxi}$$

   Le FRA stipule que la banque versera à l'entreprise le montant correspondant à l'excédent d'intérêt.

2. Si par contre :

   $$r_m < r_{maxi}$$

   c'est l'entreprise qui doit rembourser la différence d'intérêt.

   La détermination du montant d'intérêt à payer ou à recevoir est égale à :

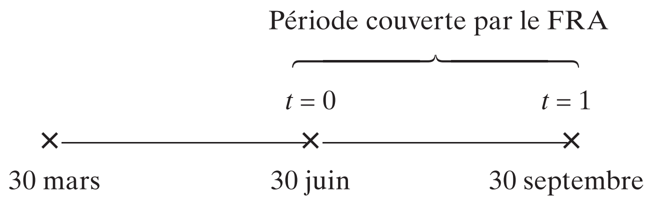
   $$\frac{\left(r_m - r_{maxi}\right)\ \left(n/365\right)\ \mathrm{VN}}{1+\left[r_m\left(n/365\right)\right]}$$

où :

- VN = valeur nominale ou notionnelle du FRA ;
- le numérateur = soit le montant d'intérêt que l'entreprise recevrait si les taux d'intérêt excédaient le taux plafond, soit le montant d'intérêt que l'entreprise verserait si les taux d'intérêt se situaient en dessous du taux plafond au début de la période couverte par l'accord FRA. Le montant d'intérêt en question doit être actualisé selon le nombre de jours sur lequel s'étend la période du FRA.

4.2.3. Exemple

L'entreprise signe aujourd'hui 30 mars un FRA de 11 %, s'assurant ainsi d'un plafond en matière de coût de financement d'un emprunt de 20 M$ contracté pour la période qui s'étend du 30 juin au 30 septembre.



Les termes du FRA précisent qu'à la date du 30 juin :

a) soit la banque versera à son client toute différence d'intérêt correspondant à l'écart entre le taux au comptant supérieur à 11 % et 11 %, qui est le taux maximal, ou plafond de coût de financement ;

b) soit l'entreprise (le client) versera à la banque toute différence entre le taux plafond de 11 % et le taux au comptant, s'il est inférieur à 11 %.

Considérons deux situations différentes de taux d'intérêt au comptant le 30 juin prochain :

a) Le taux du marché est de 12,5 %, soit 1,50 % de plus que le taux plafond de 11 %.

Rappelons que la valeur nominale du FRA, c'est-à-dire du contrat à terme de taux d'intérêt de gré à gré, est de 20 M$.

Il est évident que l'entreprise bénéficie, dans ce cas, de la différence de 1,5 % entre le taux au comptant et le taux du contrat à terme et qu'elle reçoit, par conséquent, le montant suivant :

$$= \frac{(0{,}125 - 0{,}11) \times \frac{91}{365} \times 20\,000\,000}{1 + \left[0{,}125 \times \frac{91}{365}\right]}$$

$$= \frac{74\,794{,}52\,\$}{1{,}031\,164\,3} = 72\,534{,}05\,\$ \text{ en valeur actuelle au 30 juin.}$$

b) Le taux du marché est de 9 %, soit inférieur de 2 % au taux plafond de 11 %.

L'entreprise verse à la banque le montant suivant :

$$= \frac{(0{,}09 - 0{,}11) \times \frac{91}{365} \times 20\,000\,000}{1 + \left[0{,}09 \times \frac{91}{365}\right]}$$

$$= \frac{-99\,726{,}03}{1{,}022\,438\,3} = -97\,537{,}45\,\$ \text{ en valeur actuelle au 30 juin.}$$

4.2.4. Remarque

L'entreprise aurait pu vendre des contrats à terme BAX sur acceptations bancaires plutôt que de contracter un FRA avec une banque. L'entreprise se serait engagée dans une opération de couverture par anticipation conclue en date du 30 mars pour les fins de l'opération d'emprunt, prévue entre le 30 juin et le 30 septembre. Les contrats BAX présentent plusieurs avantages dont celui d'être négociables, mais aussi l'inconvénient d'être normalisés. Par contre, les FRA sont préparés et taillés sur mesure mais ne sont pas négociables, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent généralement être revendus avant l'échéance. Notons que l'objectif de l'entreprise, en contractant un FRA, consiste à stabiliser son coût de financement conformément à une couverture complète du risque de taux d'intérêt pour une courte période de temps, comme trois mois par exemple.

On peut aussi utiliser une série de FRA de trois mois chacun pour s'assurer une couverture plus longue d'une année ou plus au-delà de la période actuelle. Un ensemble de FRA constitue une couverture qui s'apparente à celle d'un *swap* de taux d'intérêt.

4.3. LES *CAPS* OU PLAFONDS DE TAUX D'INTÉRÊT

Le *cap* est une option d'achat qui peut être utilisée par l'acquéreur pour fixer une valeur maximale à un taux d'emprunt à taux variable. Le coût de financement est ainsi plafonné au taux d'intérêt d'exercice fixé par contrat. Le vendeur du *cap*, une institution financière par exemple, accepte de fixer une limite supérieure au taux variable facturé sur le prêt accordé et reçoit en contrepartie la prime du *cap*.

Le taux de référence du marché est le LIBOR et le taux préférentiel aux États-Unis et le taux des acceptations bancaires (BA) et le taux préférentiel au Canada. L'entreprise qui détient le *cap* exerce son option d'achat si le taux de référence excède le taux d'intérêt d'exercice afin que son coût de financement soit ramené ou ajusté au *cap*.

Le contrat d'un *cap* comprend les rubriques suivantes :

- le taux d'intérêt d'exercice : 7 % par exemple ;
- l'échéance du contrat : 5 ans ;
- le taux de référence : LIBOR semestriel ;
- la fréquence de renégociation du taux d'intérêt (trimestriellement ou semestriellement) ;
- la prime du *cap* ;
- la structure de l'actif ou du passif faisant l'objet de la couverture : capital remboursé à l'échéance ou réglé sous une forme amortie à intervalles réguliers ;
- la date initiale de mise en vigueur du contrat : soit 3 mois ou 6 mois après la signature de l'accord au temps $t = 0$.

Si l'échéance du contrat *cap* est de cinq ans et que les taux sont renégociés chaque trimestre, il y aura 19 *caplets* ou 19 périodes ou trimestres sur lesquels s'étendent ces options d'achat. Le premier *caplet* s'étend sur trois mois et débute dans trois mois après la date de signature du contrat.

EXEMPLE

La société Brabant inc. achète, le 1er avril, un *cap* dont le taux d'exercice est égal à 9 %, l'échéance étant d'un an, la date de renégociation du taux d'intérêt s'effectuant chaque trimestre et la prime à payer s'élevant à 0,15 %. Le plafond effectif de taux d'intérêt pour Brabant, y compris la prime de l'option de *cap*, devient :

$$9 + 0{,}15\,\% = 9{,}15\,\%$$

Supposons que le montant emprunté par Brabant inc. soit de 2 000 000 $ à 7,5 % pour 3 mois. Brabant reçoit donc comme emprunt le montant escompté suivant :

$$2\,000\,000\,\$\left[\frac{1}{1+0{,}075\times\dfrac{91}{365}}\right]=1\,963\,289{,}18\,\$$$

Le montant de l'intérêt versé par Brabant se chiffre donc à :

$$2\,000\,000\,\$ - 1\,963\,289{,}18\,\$ = 36\,710{,}82\,\$$$

Supposons que r_m (taux d'intérêt du marché) augmente à 11 % le 1er juillet, et ce, pour une échéance de trois mois. Comme le taux du marché excède le taux d'exercice du *cap* de 9 % et atteint 11 % le 1er juillet, Brabant inc. recevra une compensation pour le trimestre qui s'étend du 1er juillet au 30 septembre.

L'intérêt payé au taux de 11 % au 1er juillet par Brabant inc. s'élève à :

$$2\,000\,000\,\$ - 2\,000\,000\,\$\left[\frac{1}{1+0{,}11\times\dfrac{91}{365}}\right]$$
$$= 2\,000\,000\,\$ - 1\,946\,614{,}75\,\$ = 53\,385{,}25\,\$$$

La société Brabant inc. exercera son *cap* le 1er octobre, puisque trois mois auparavant, soit le 1er juillet, elle a emprunté à 11 %, c'est-à-dire à un taux supérieur au taux d'exercice du *cap* de 9 %.

L'exercice du *cap* se traduit par l'avantage financier suivant pour Brabant inc. :

$$2\,000\,000\,\$\,(0{,}11-0{,}09)\times\frac{91}{365}=9\,972{,}60\,\$$$

Le montant net d'intérêt versé par Brabant inc., pour le trimestre qui s'étend du mois de juillet à septembre, s'élève donc à :

$$53\ 385{,}25 - 9\ 972{,}60 = 43\ 412{,}65\ \$$$

Le coût net du financement exprimé en pourcentage, abstraction faite de la prime du *cap*, s'établit, pour la deuxième période d'emprunt, à :

$$\frac{43\ 412{,}65}{2\ 000\ 000} \times \frac{365}{91} \times 100 = 8{,}71\ \%$$

Or, le taux d'intérêt d'exercice du *cap* est de 9 %. L'exercice du *cap* a bien maintenu 9 % comme limite maximale au coût du financement.

Remarques :

1. Les utilisateurs du *cap* sont :

   a) Les emprunteurs à taux variable qui achètent un *cap* pour se protéger d'une augmentation importante du taux d'intérêt tout en tirant profit (net de la prime du *cap*) d'une éventuelle baisse des taux d'intérêt.

   b) Les investisseurs à taux variable qui vendent un *cap*, afin de recevoir une prime ; ils abandonnent alors une partie de l'accroissement éventuel de leur taux de rendement afin de bénéficier de cette prime. Le taux effectif de rendement de l'investisseur s'améliore en recevant la prime mentionnée, et ce, aux niveaux de taux d'intérêt inférieurs à la somme du taux d'intérêt d'exercice et de la prime du *cap*.

2. L'évaluation du *cap* :

   Le *cap* est constitué d'une série d'options de taux d'intérêt. La valeur marchande du *cap* est ainsi égale à la somme de la valeur des options individuelles ou *caplets*. Si un *cap* de cinq ans n'est plus d'aucune utilité pour son détenteur, après deux ans il peut être vendu. Une baisse de la valeur marchande du *cap* a pour résultat soit une valeur inférieure à son coût initial, soit une valeur nulle. Le *caplet* est une option d'achat européenne qui ne peut être exercée qu'à sa date d'expiration, mais peut être cependant transigée sur le marché secondaire avant sa date d'échéance. Notons que l'option est établie en fonction du taux à terme f_n (taux d'intérêt futur court) plutôt qu'en fonction du taux courant du marché r_m. Si l'on considère σ_n comme mesure de la variation du taux f_n, on peut utiliser, pour un *cap* de fréquence de renégociation t du taux d'intérêt, la relation de Black et Scholes afin de déterminer le prix du *caplet*.

4.4. LES *SWAPTIONS*

Les *swaptions* sont des options sur des *swaps* de taux d’intérêt. L’acheteur d’une *swaption* verse une prime et bénéficie en contrepartie du droit (sans cependant être contraint à aucune obligation) de participer à un *swap* de taux d’intérêt donné à l’expiration de l’option. À ce moment-là, l’acheteur de la *swaption* est confronté à l’une des deux situations suivantes avec les conséquences correspondantes :

1. Si les conditions d’un nouveau *swap* sont, à l’expiration de la *swaption*, moins coûteuses que celles qu’offrirait l’exercice de la *swaption*, cette dernière n’a plus de valeur pour l’acheteur d’une *swaption* payeuse, qui n’a alors qu’à contracter et participer à un nouveau *swap* plus favorable.
2. Par contre, l’acheteur de la *swaption* exerce son option au taux fixé à l’avance si le taux d’intérêt du marché est plus élevé que celui de la *swaption* Il s’agit toujours de l’acquéreur d’une *swaption* payeuse.

Notons que les termes « payeuse » et « receveuse », utilisés dans le cadre de la *swaption,* correspondent à des flux monétaires fixes. L’acquéreur d’une *swaption* payeuse bénéficie du droit de verser un taux fixe selon le taux d’exercice et de recevoir des taux variables.

L’acquéreur d’une *swaption* receveuse bénéficie du droit de recevoir un versement fixe d’intérêt selon le taux d’exercice et de verser des taux variables.

Le vendeur d’une *swaption* payeuse a l’obligation de recevoir des versements fixes et de transmettre des versements à taux variables, tandis que le vendeur d’une *swaption* receveuse a l’obligation de faire des versements à taux fixes et de recevoir des paiements à taux variables.

Le détenteur d’une *swaption* payeuse exercera son option à l’endroit du vendeur de la *swaption* si les taux d’intérêt augmentent, tandis que le détenteur d’une *swaption* receveuse exercera son option si les taux d’intérêt diminuent. La perte du détenteur d’une *swaption* se limite à la prime payée, tandis que la perte d’un vendeur de *swaption* est, en principe, illimitée.

RÉSUMÉ

Les instruments financiers de protection contre le risque de taux d’intérêt font aussi l’objet de transactions hors cote qui s’ajoutent à celles négociées en Bourse. On peut citer les transactions suivantes qui se transigent ailleurs que sur les marchés organisés que sont les Bourses :

- les contrats d'échange de taux d'intérêt ou *swaps,* qui consistent en un échange de versements de taux d'intérêt entre deux entités afin de modifier la nature du bilan par la modification des caractéristiques de ces flux monétaires d'intérêt sur dettes. Il en résulte un meilleur appariement entre actifs et passifs;
- les contrats à terme de taux d'intérêt de gré à gré dont l'objet est de protéger une des deux entités signataires du contrat contre une augmentation des taux d'intérêt et l'autre partie contre une baisse des taux d'intérêt. Il en résulte une stabilisation du coût de financement pour les parties contractantes. Ce contrat financier de gré à gré ne bénéficie pas de la même souplesse que celle qui caractérise les contrats à terme financiers boursiers, mais il présente l'avantage d'être taillé sur mesure selon les besoins spécifiques du client;
- le *cap* ou plafond de taux d'intérêt, qui est une option d'achat que l'acquéreur utilise dans le but de fixer une valeur maximale à un taux d'emprunt à taux variable. Les institutions financières vendent des *caps*, acceptant ainsi de fixer une limite supérieure au taux variable facturé sur le prêt accordé. Elle reçoit en contrepartie la prime de l'option que constitue le *cap*;
- les *swaptions,* qui sont des options sur des *swaps* de taux d'intérêt. Comme dans le cas de toute option le détenteur de la *swaption* aura versé une prime afin d'obtenir le droit de participer à un *swap* de taux d'intérêt. L'acheteur de la *swaption* exercera cette option si le taux d'intérêt du marché s'élève au-dessus de celui de la *swaption*.

QUESTIONS

1. Comparer les instruments financiers de protection contre le risque de taux d'intérêt transigés en Bourse à ceux hors cote.
2. Définir la nature d'un *swap* de taux d'intérêt ainsi que les avantages qu'il présente aux parties contractantes.
3. En quoi consiste un contrat à terme de taux d'intérêt (FRA) et quelles sont ses caractéristiques particulières?
4. Expliquer l'économie d'un *cap* et ce qui différencie cette option d'un FRA.

PROBLÈMES

1. LES SOCIÉTÉS NORTEX ET BROMONT

Les deux sociétés Nortex et Bromont se distinguent par les deux bilans simplifiés suivants :

Nortex – Bilan fin 200X				Bromont – Bilan fin 200X			
ATV	400 M$	PTV	100 M$	ATV	100 M$	PTV	400 M$
ATF	60 M$	PTF	270 M$	ATF	400 M$	PTF	20 M$
		AA	90 M$			AA	80 M$
	460 M$		460 M$		500 M$		500 M$

L'horizon considéré pour les éléments du bilan à taux variable est d'un an. La dette à long terme de la société Nortex a une échéance de sept ans au taux de coupon de 10 % tandis que la société Bromont a une dette à taux variable dont le taux est le LIBOR + 90 PB.

Si la société Nortex, dont la cote de crédit est excellente, se finançait à taux variable, elle paierait le LIBOR + 25 PB, tandis que Bromont se financerait à long terme à 12,1 % (la cote de crédit de la société Bromont est moyenne).

■ **On demande :**

a) de calculer les conséquences d'une augmentation du taux d'intérêt de 1,5 % (à l'actif et au passif) sur le revenu net de chaque société, respectivement, et d'expliquer ces résultats ;

b) de calculer les effets d'une baisse du taux d'intérêt de 1 % (à l'actif et au passif) sur le revenu net de chaque société, respectivement, et d'expliquer ces résultats.

La Banque République qui finance habituellement les deux sociétés mentionnées, est mise sous contrat par ces dernières afin de résoudre le problème de l'exposition au risque de taux d'intérêt illustré par les réponses aux questions a) et b) ci-dessus.

La Banque République propose aux deux sociétés déjà citées un contrat d'échange (*swap*) de taux d'intérêt qui est le suivant :

- la société Nortex verserait le LIBOR + 10 PB à la société Bromont sur cinq ans ;
- la société Bromont verserait un taux fixe de 10,60 % à la Banque République sur cinq ans ;
- la Banque République verserait un taux fixe de 10,50 % à la société Nortex sur cinq ans.

- **On demande :**

c) de préciser les avantages d'un tel contrat de *swap* de taux d'intérêt pour les deux sociétés citées ;

d) de calculer en points de base et en dollars l'économie du coût du financement pour Nortex et Bromont ainsi que la rémunération de la Banque République ;

e) de faire la preuve que vos calculs d'économie de coûts de financement et de rémunération bancaire sont corrects ;

f) d'expliquer en quoi consiste le risque de crédit pour une banque en matière de *swaps* de taux d'intérêt et des mesures prises par les institutions financières pour limiter ce risque avec un client en particulier ainsi que globalement.

- **Solutions suggérées :**

a) Les conséquences d'une augmentation des taux d'intérêt

a.1 Nortex

La variation du revenu net d'intérêt sur un horizon de un an résultant de l'exposition de Nortex au risque de taux d'intérêt est la suivante :

$$\begin{aligned}\Delta \text{RNI} &= (\text{écart de sensibillité})\left(\Delta i\,\%\right)\\ &= \left(\text{E}\right)\left(\Delta i\right)\\ &= \left(400-100\right)\left(1,5\,\%\right)\\ &= +4,50\ M\$\end{aligned}$$

Lorsque l'écart de sensibilité est positif en raison d'actifs à taux variables (ATV) supérieurs aux passifs à taux variables (PTV), et que les taux d'intérêt augmentent sur les ATV et sur les PTV, approximativement de la même façon, le revenu net d'intérêt (RNI) augmente. En effet, les revenus sur les ATV augmentent plus que les coûts sur les PTV dans un tel cas.

a.2 Bromont

$$\begin{aligned}\Delta \text{RNI} &= \left(100\,\$-400\,\$\right)\left(1,5\,\%\right)\\ &= -4,5\ \text{M}\$\end{aligned}$$

Comme les ATV sont inférieurs aux PTV et que les taux d'intérêt augmentent, la rentabilité (revenu net d'intérêt) diminue.

b) Les effets d'une baisse des taux d'intérêt

b.1 Nortex

$$\begin{aligned}\Delta \text{RNI} &= \left(400\,\$-100\,\$\right)\left(-1\,\%\right)\\ &= -3\ \text{M}\$\end{aligned}$$

Comme ATV > PTV et que les taux d'intérêt diminuent, le revenu net d'intérêt diminue.

b.2 Bromont

$$\Delta RNI = (100\,\$ - 400\,\$)(-1\,\%)$$
$$= +3 \text{ M\$}$$

Comme ATV < PVT, c'est-à-dire que l'écart de sensibilité est négatif, et que les taux d'intérêt diminuent, le revenu net d'intérêt augmente.

c) L'avantage d'un contrat *swap* ou d'échange de taux d'intérêt est double :

- une protection contre le risque de taux d'intérêt ;
- une réduction du coût de financement.

d) Le calcul de l'économie du coût du financement

d.1 Nortex :

– Verse 10 % sur sa dette à long terme et reçoit 10,5 % fixe :	+ 50 PB
– Verse le LIBOR + 10 PB au lieu du LIBOR + 25 PB :	+ 15 PB
Total des avantages	= + 65 PB

d.2 Bromont

– Verse 10,6 % fixe au lieu de 12,1 % :	+ 150 PB
– Verse le LIBOR + 90 PB et reçoit le LIBOR + 10 PB	– 80 PB
Total des avantages	= + 70 PB

d.3 La Banque République :

Verse 10,5 % et reçoit 10,6 % :	+ 10 PB

L'économie totale de coût de financement de cette opération de *swap* de taux d'intérêt s'élève à 65 + 70 + 10 = 145 PB.

e) La preuve

L'économie totale de taux d'intérêt est égale à la différence entre taux longs moins la différence entre taux courts, soit :

$$= (12,1\,\% - 10\,\%) - \left[(\text{LIBOR} + 90\text{ PB}) - (\text{LIBOR} + 25\text{ PB})\right]$$
$$= 210\text{ PB} - 65\text{ PB} = 145\text{ PB}$$

f) Le risque de crédit résultant d'un échange de taux d'intérêt

Le risque de crédit d'un contrat de *swap* ou d'échange de taux d'intérêt est limité pour deux raisons :

- Ce risque se mesure et se limite à la seule différence des taux d'intérêt puisque l'échange entre parties contractantes se limite aux seuls flux d'intérêt, à l'exclusion de leurs dettes respectives.

– L'institution financière qui prépare le dit contrat fait une sélection rigoureuse des participants à un contrat de *swap* ou d'échange de taux d'intérêt.

Notons que sur un autre plan, l'institution financière ne doit pas être globalement exposée sur l'ensemble des contrats *swap* ou d'échange de taux d'intérêt préparés par elle-même et en cours d'exécution. Si une exposition nette au risque de taux d'intérêt apparaît à un moment donné, l'institution financière doit la couvrir à l'aide de produits dérivés, comme les contrats à terme de taux d'intérêt, par exemple.

2. LA SOCIÉTÉ KAFKAN ET LE FRA

La société Kafkan (une multinationale) s'entend, aujourd'hui le 30 juin, avec sa banque sur les termes suivants d'un FRA de 3 mois d'échéance :

– le début de la période couverte par le FRA se situe au 30 septembre ;

– le taux plafond est égale à 10 % ;

– la valeur nominale du FRA est de 500 M$.

On considère deux scénarios :

1. le taux d'intérêt du marché s'élève à 8,5 % ;
2. le taux d'intérêt du marché s'établit à 12 %.

■ On demande :

a) d'expliquer le principe du FRA et de déterminer le montant de différence de taux d'intérêt à verser ou à recevoir par la société Kafkan selon les deux situations de taux d'intérêt indiquées ci-haut à deux dates précises :

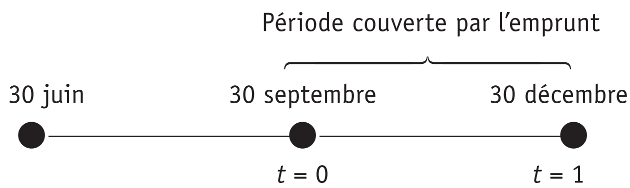
   – au 31 décembre,

   – au 30 septembre ;

b) de préciser en quoi consistent les différences entre un FRA et un contrat à terme de taux d'intérêt transigé en Bourse.

■ Solutions suggérées :

a) On peut représenter graphiquement de la façon suivante les dates importantes qui caractérisent le FRA contracté par la société Kafkan :



Considérons les deux situations possibles de taux d'intérêt sur le marché au début de la période couverte par le FRA.

a.1. Le taux d'intérêt du marché (r_m) s'élève à 8,5 %, c'est-à-dire qu'il est inférieur au taux plafond (r_{maxi}) de 10 %. La société Kafkan doit dans ce cas verser à la banque, en vertu du FRA, le montant suivant basé sur la valeur nominale (VN) de 500 M$ du FRA :

$$\frac{(r_m - r_{maxi})(n/365)(\text{VN})}{1+\left[\left(r_m\right)\left(n/365\right)\right]}$$

Le numérateur représente le montant d'intérêt que l'entreprise doit verser à sa banque au début de la période couverte par le FRA, soit au 30 septembre, puisque le taux du marché de 8,5 % est inférieur au taux plafond de 10 %. Si le règlement que la société Kafkan doit faire est exécuté à la fin de la période du FRA, soit le 31 décembre, le numérateur de la formule ci-haut représente, en soi, le montant de la différence d'intérêt à payer. Si, par contre, le règlement de différence de taux d'intérêt intervient en début de période, soit le 30 septembre, c'est la valeur actuelle de cette différence d'intérêt qui devient l'objet du règlement. Le dénominateur de la relation ci-haut permet d'effectuer l'opération d'actualisation.

a.1.1. Le montant d'intérêt à payer au 31 décembre s'élève à :

$$(8{,}5\,\% - 10\,\%)(92/365)(500\text{ M\$}) = 1{,}890\ 4\text{ M\$}$$

Comme la différence de taux d'intérêt est négative, l'acquéreur du FRA, soit la société Kafkan, doit verser le montant de cette différence d'intérêt de 1,8094 M$ à la banque qui participe au FRA.

a.1.2. Le montant d'intérêt à payer au 30 septembre s'élève à :

$$= \frac{-1{,}890\ 4\text{ M\$}}{1+\left[\left(0{,}085\right)\cdot 92/365\right]}$$

$$= \frac{-1{,}890\ 4\text{ M\$}}{1{,}021\ 425}$$

$$= -1{,}850\ 7\text{ M\$}$$

a.2. Le taux du marché (r_m) est de 12 $, soit supérieur au taux plafond (r_{maxi}) de 10 % au 30 septembre, c'est-à-dire au début de la période couverte par le FRA.

Dans ce cas, la banque doit compenser la société Kafkan.

a.2.1. Le montant d'intérêt à verser au 31 décembre s'élève à :

$$(12\,\% - 10\,\%)\cdot(92/365)\cdot 500\text{ M\$} = 2{,}520\ 548\text{ M\$}$$

Ce montant positif indique que c'est le vendeur du FRA, soit la banque, qui doit verser cette différence d'intérêt à la société Kafkan.

a.2.2. Le montant d'intérêt à verser au 30 septembre sera de :

$$\frac{2,520548 \text{ M\$}}{1+\left[(0,12)(92/365)\right]} = 2,446\,548 \text{ M\$}$$

b) Les différences entre un FRA et un contrat à terme de taux d'intérêt transigé en Bourse.

b.1. Un contrat à terme de taux d'intérêt transigé en Bourse présente les caractéristiques suivantes, qui sont les plus importantes :

- Il nécessite de débourser des fonds de la part du client si les taux d'intérêt évoluent de façon défavorable (les appels de marge du courtier).
- Il offre une grande flexibilité, car il permet de se défaire de ce contrat en adoptant tout simplement une position contraire sur le marché à terme.

b.2. Un contrat à terme de taux d'intérêt de gré à gré, hors cote, le FRA, présente les caractéristiques importantes suivantes :

- C'est un contrat taillé sur mesure selon les besoins spécifiques, ce qui n'est pas toujours le cas des contrats à terme normalisés.
- Il ne nécessite pas de déboursés de la part du client en cas de fluctuations défavorables du taux d'intérêt.
- C'est un contrat rigide jusqu'à l'échéance, car le client ne peut, en principe, s'en défaire avant cette date.

3. LA SOCIÉTÉ BONCAP INC.

La société Boncap inc. acquiert le 1er juillet un *cap* d'une échéance de un an dont le taux d'exercice est de 10 %. La renégociation de ce *cap* se fait trimestriellement. La prime à verser pour l'option du *cap* s'élève à 0,14 %. La société Boncap inc. emprunte 10 M$ à 8,75 % pour un terme renouvelable de 3 mois.

Supposons qu'au 1er octobre, le taux d'intérêt du marché, d'une échéance de 3 mois, atteigne 11,5 %.

- **On demande :**

a) de calculer le montant de l'emprunt escompté reçu par la société Boncap le 1er juillet d'une part, et le montant de l'intérêt versé par cette société d'autre part, et ce pour le 1er juillet. Rendre le calcul compatible avec la situation qui prévaut le 1er octobre ;

b) d'expliquer la décision que prendra la société Boncap quant à exercer ou non le *cap*, le 1er janvier suivant, ainsi que les résultats financiers éventuels correspondants ;

c) de faire la preuve qu'en tout état de cause, le coût net de financement exprimé en pourcentage n'excédera pas le taux d'exercice, pour le trimestre qui s'étend du 1er octobre au 1er janvier ;

d) de préciser en quoi consiste un *cap* et quels sont les agents économiques qui utilisent le *cap* et d'expliquer pourquoi.

■ **Solutions suggérées :**

a) Le montant de l'emprunt escompté reçu par la société Boncap est de :

$$10\,000\,000\,\$\left[\frac{1}{1+0{,}0875\left(\frac{91}{365}\right)}\right]= 9\,786\,506{,}68\,\$$$

L'intérêt versé par cette société pour les trois premiers mois est de :

$$10\,000\,000\,\$ - 9\,786\,506{,}68\,\$ = 213\,493{,}32\,\$$$

Le montant de l'intérêt payé par Boncap le 1er octobre est de :

$$10\,000\,000\,\$ - 10\,000\,000\left[\frac{1}{1+0{,}115\left(\frac{91}{365}\right)}\right]$$

$$= 10\,000\,000 - 9\,721\,279\,\$ = 278\,721\,\$$$

b) La société Boncap exercera son *cap* le 1er janvier qui suit, car elle a emprunté le 1er octobre à 11,5 %, c'est-à-dire à un taux supérieur au taux d'exercice du *cap* de 10 %.

L'exercice du *cap* se traduit par le résultat favorable suivant pour la société Boncap :

$$10\,000\,000\,(0{,}115 - 0{,}10)\left(\frac{91}{365}\right) = 37\,397{,}26\,\$$$

c) Le montant net d'intérêt payé par Boncap inc. pour le trimestre qui s'étend du mois d'octobre à décembre est donc égal à :

$$278\,721\,\$ - 37\,397{,}26\,\$ = 241\,323{,}74\,\$$$

Le coût du financement en pourcentage pour la deuxième période d'emprunt, abstraction faite de la prime du *cap,* s'élève à :

$$\frac{241\,323{,}74\,\$}{10\,000\,000\,\$}\left(\frac{365}{91}\right)100 = 9{,}68\,\%$$

L'exercice du *cap* permet de maintenir le coût de financement en dessous de la limite maximale de ce coût, représentée par le taux d'exercice du *cap* de 10 %.

Annexes

TABLE A-1

Valeur capitalisée (accumulée) de 1 $ à la fin de *n* années

Nombre d'années *n*	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %	12 %	14 %	15 %	16 %	18 %	20 %	22 %	24 %	26 %
1	1,020	1,030	1,040	1,050	1,060	1,070	1,080	1,090	1,100	1,120	1,140	1,150	1,160	1,180	1,200	1,220	1,240	1,260
2	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	1,210	1,254	1,300	1,323	1,346	1,392	1,440	1,488	1,538	1,588
3	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,405	1,482	1,521	1,561	1,643	1,728	1,816	1,907	2,000
4	1,082	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,574	1,689	1,749	1,811	1,939	2,074	2,215	2,364	2,520
5	1,104	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,762	1,925	2,011	2,100	2,288	2,488	2,703	2,931	3,176
6	1,126	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,974	2,195	2,313	2,436	2,700	2,986	3,297	3,635	4,002
7	1,149	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,211	2,502	2,660	2,826	3,185	3,583	4,023	4,508	5,042
8	1,172	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,476	2,853	3,059	3,278	3,759	4,300	4,908	5,590	6,353
9	1,195	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,773	3,252	3,518	3,803	4,435	5,160	5,987	6,931	8,005
10	1,219	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	3,106	3,707	4,046	4,411	5,234	6,192	7,305	8,594	10,086
11	1,243	1,384	1,539	1,710	1,898	2,105	2,332	2,580	2,853	3,479	4,226	4,652	5,117	6,176	7,430	8,912	10,657	12,708
12	1,268	1,426	1,601	1,796	2,012	2,252	2,518	2,813	3,138	3,896	4,818	5,350	5,936	7,288	8,916	10,872	13,215	16,012
13	1,294	1,469	1,665	1,886	2,133	2,410	2,720	3,066	3,452	4,363	5,492	6,153	6,886	8,599	10,699	13,264	16,386	20,175
14	1,319	1,513	1,732	1,980	2,261	2,579	2,937	3,342	3,797	4,887	6,261	7,076	7,988	10,147	12,839	16,182	20,319	25,421
15	1,346	1,558	1,801	2,079	2,397	2,759	3,172	3,642	4,177	5,474	7,138	8,137	9,266	11,974	15,407	19,742	25,196	32,030
16	1,373	1,605	1,873	2,183	2,540	2,952	3,426	3,970	4,595	6,130	8,137	9,358	10,748	14,129	18,488	24,086	31,243	40,358
17	1,400	1,653	1,948	2,292	2,693	3,159	3,700	4,328	5,054	6,866	9,276	10,761	12,468	16,672	22,186	29,384	38,741	50,851
18	1,428	1,702	2,026	2,407	2,854	3,380	3,996	4,717	5,560	7,690	10,575	12,375	14,463	19,673	26,623	35,849	48,039	64,072
19	1,457	1,754	2,107	2,527	3,026	3,617	4,316	5,142	6,116	8,613	12,056	14,232	16,777	23,214	31,948	43,736	59,568	80,731
20	1,486	1,806	2,191	2,653	3,207	3,870	4,661	5,604	6,727	9,646	13,743	16,367	19,461	27,393	38,338	53,358	73,864	101,721
22	1,546	1,916	2,370	2,925	3,604	4,430	5,437	6,659	8,140	12,100	17,861	21,645	26,186	38,142	55,206	79,418	113,574	161,492
24	1,608	2,033	2,563	3,225	4,049	5,072	6,341	7,911	9,850	15,179	23,212	28,625	35,236	53,109	79,497	118,205	174,631	256,385
26	1,673	2,157	2,772	3,556	4,549	5,807	7,396	9,399	11,918	19,040	30,167	37,857	47,414	73,949	114,475	175,936	268,512	407,037
28	1,741	2,288	2,999	3,920	5,112	6,649	8,627	11,167	14,421	23,884	39,204	50,066	63,800	102,967	164,845	261,864	412,864	646,212
30	1,811	2,427	3,243	4,322	5,743	7,612	10,063	13,268	17,449	29,960	50,950	66,212	85,850	143,371	237,376	389,758	634,820	1 025,927
35	2,000	2,814	3,946	5,516	7,686	10,677	14,785	20,414	28,102	52,800	98,100	133,176	180,314	327,997	590,668	1 053,402	1 861,054	3 258,135
40	2,208	3,262	4,801	7,040	10,286	14,974	21,725	31,409	45,259	93,051	188,884	267,864	378,721	750,378	1 469,772	2 847,038	5 455,913	10 347,175

TABLE A-2

Valeur actualisée de 1 $ touché à la fin de *n* années

Nombre d'années *n*	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %	12 %	14 %	15 %	16 %	18 %	20 %	22 %	24 %	26 %	28 %	30 %
1	0,980	0,971	0,961	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909	0,893	0,877	0,870	0,862	0,847	0,833	0,820	0,807	0,794	0,781	0,769
2	0,961	0,943	0,925	0,907	0,890	0,873	0,857	0,842	0,826	0,797	0,769	0,756	0,743	0,718	0,694	0,672	0,650	0,630	0,610	0,592
3	0,942	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772	0,751	0,712	0,675	0,658	0,641	0,609	0,579	0,551	0,524	0,500	0,477	0,455
4	0,924	0,888	0,855	0,823	0,792	0,763	0,735	0,708	0,683	0,636	0,592	0,572	0,552	0,516	0,482	0,451	0,423	0,397	0,373	0,350
5	0,906	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650	0,621	0,567	0,519	0,497	0,476	0,437	0,402	0,370	0,341	0,315	0,291	0,269
6	0,888	0,837	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596	0,564	0,507	0,456	0,432	0,410	0,370	0,335	0,303	0,275	0,250	0,227	0,207
7	0,871	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,583	0,547	0,513	0,452	0,400	0,376	0,354	0,314	0,279	0,249	0,222	0,198	0,178	0,159
8	0,853	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502	0,467	0,404	0,351	0,327	0,305	0,266	0,233	0,204	0,179	0,157	0,139	0,123
9	0,817	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460	0,424	0,361	0,308	0,284	0,263	0,225	0,194	0,167	0,144	0,125	0,108	0,094
10	0,820	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,422	0,386	0,322	0,270	0,247	0,227	0,191	0,162	0,137	0,116	0,099	0,085	0,073
11	0,804	0,722	0,650	0,585	0,527	0,475	0,429	0,387	0,350	0,287	0,237	0,215	0,195	0,162	0,135	0,112	0,094	0,079	0,066	0,056
12	0,788	0,701	0,625	0,557	0,497	0,444	0,397	0,356	0,319	0,257	0,208	0,187	0,168	0,137	0,112	0,092	0,076	0,062	0,052	0,043
13	0,773	0,681	0,601	0,530	0,469	0,415	0,368	0,326	0,290	0,229	0,182	0,163	0,145	0,116	0,093	0,075	0,061	0,050	0,040	0,033
14	0,758	0,661	0,577	0,505	0,442	0,388	0,340	0,299	0,263	0,205	0,160	0,141	0,125	0,099	0,078	0,062	0,049	0,039	0,032	0,025
15	0,743	0,642	0,555	0,481	0,417	0,362	0,315	0,275	0,239	0,183	0,140	0,123	0,108	0,083	0,065	0,051	0,040	0,031	0,025	0,020
16	0,728	0,623	0,534	0,458	0,394	0,339	0,292	0,252	0,218	0,163	0,123	0,107	0,093	0,071	0,054	0,042	0,032	0,025	0,019	0,015
17	0,714	0,605	0,513	0,436	0,371	0,317	0,270	0,231	0,198	0,146	0,108	0,093	0,080	0,060	0,045	0,034	0,026	0,020	0,015	0,012
18	0,700	0,587	0,494	0,416	0,350	0,296	0,250	0,212	0,180	0,130	0,095	0,081	0,069	0,051	0,038	0,028	0,021	0,016	0,012	0,009
19	0,686	0,570	0,475	0,396	0,331	0,277	0,232	0,194	0,164	0,116	0,083	0,070	0,060	0,043	0,031	0,023	0,017	0,012	0,010	0,007
20	0,673	0,554	0,456	0,377	0,312	0,258	0,215	0,178	0,149	0,104	0,073	0,061	0,051	0,037	0,026	0,019	0,014	0,010	0,008	0,005
22	0,647	0,522	0,422	0,342	0,278	0,226	0,184	0,150	0,123	0,083	0,056	0,046	0,038	0,026	0,018	0,013	0,009	0,006	0,004	0,003
24	0,622	0,492	0,390	0,310	0,247	0,197	0,158	0,126	0,102	0,066	0,043	0,035	0,028	0,019	0,013	0,008	0,006	0,004	0,003	0,002
26	0,598	0,464	0,361	0,281	0,220	0,172	0,135	0,106	0,084	0,053	0,033	0,026	0,021	0,014	0,009	0,006	0,004	0,002	0,002	0,001
28	0,574	0,437	0,333	0,255	0,196	0,150	0,116	0,090	0,069	0,042	0,026	0,020	0,016	0,010	0,006	0,004	0,002	0,002	0,091	0,001
30	0,552	0,412	0,308	0,231	0,174	0,131	0,099	0,075	0,057	0,033	0,020	0,015	0,012	0,007	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	—
35	0,500	0,355	0,253	0,181	0,130	0,094	0,068	0,049	0,036	0,019	0,010	0,008	0,006	0,003	0,002	0,001	0,001	—	—	—
40	0,453	0,307	0,208	0,142	0,097	0,067	0,046	0,032	0,022	0,011	0,005	0,004	0,003	0,001	0,001	—	—	—	—	—

TABLE A-3

Valeur actualisée d'une annuité de 1 $ touchée à la fin de chaque année

Nombre d'années n	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %	12 %	14 %	15 %	16 %	18 %	20 %	22 %	24 %	26 %	28 %	30 %
1	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909	0,893	0,877	0,870	0,862	0,847	0,833	0,820	0,807	0,793	0,781	0,769
2	1,942	1,913	1,886	1,859	1,833	1,808	1,783	1,759	1,736	1,690	1,647	1,626	1,605	1,566	1,528	1,492	1,457	1,424	1,392	1,361
3	2,884	2,829	2,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531	2,487	2,402	2,322	2,283	2,246	2,174	2,106	2,042	1,981	1,923	1,868	1,816
4	3,808	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240	3,170	3,037	2,914	2,855	2,798	2,690	2,589	2,494	2,404	2,320	2,241	2,166
5	4,713	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791	3,605	3,433	3,352	3,274	3,127	2,991	2,864	2,745	2,635	2,532	2,436
6	5,601	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355	4,111	3,889	3,784	3,685	3,498	3,326	3,167	3,020	2,885	2,759	2,643
7	6,472	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868	4,564	4,288	4,160	4,039	3,812	3,605	3,416	3,242	3,083	2,937	2,802
8	7,325	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335	4,968	4,639	4,487	4,344	4,078	3,837	3,619	3,421	3,241	3,076	2,925
9	8,162	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,996	5,759	5,328	4,946	4,772	4,607	4,303	4,031	3,786	3,566	3,366	3,184	3,019
10	8,983	8,530	8,111	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145	5,650	5,216	5,019	4,833	4,494	4,192	3,923	3,682	3,465	3,269	3,092
11	9,787	9,253	8,760	8,306	7,887	7,499	7,139	6,805	6,495	5,938	5,453	5,234	5,029	4,656	4,327	4,035	3,776	3,543	3,335	3,147
12	10,575	9,954	9,385	8,863	8,384	7,943	7,536	7,161	6,814	6,194	5,660	5,421	5,197	4,793	4,439	4,127	3,851	3,606	3,388	3,190
13	11,348	10,635	9,986	9,394	8,853	8,358	7,904	7,487	7,103	6,424	5,842	5,583	5,342	4,910	4,533	4,203	3,912	3,656	3,427	3,223
14	12,106	11,296	10,563	9,899	9,295	8,745	8,244	7,786	7,367	6,628	6,002	5,724	5,468	5,009	4,611	4,265	3,962	3,695	3,459	3,249
15	12,849	11,938	11,118	10,380	9,712	9,108	8,559	8,061	7,607	6,811	6,142	5,847	5,575	5,092	4,675	4,315	4,001	3,726	3,483	3,268
16	13,578	12,561	11,652	10,838	10,106	9,447	8,851	8,313	7,824	6,974	6,265	5,954	5,668	5,162	4,730	4,357	4,033	3,751	3,503	3,283
17	14,292	13,166	12,166	11,274	10,477	9,763	9,122	8,544	8,022	7,120	6,373	6,047	5,749	5,222	4,775	4,391	4,059	3,771	3,518	3,295
18	14,992	13,754	12,659	11,690	10,828	10,059	9,372	8,756	8,201	7,250	6,467	6,128	5,818	5,273	4,812	4,419	4,080	3,786	3,529	3,304
19	15,678	14,324	13,134	12,085	11,158	10,336	9,604	8,950	8,365	7,366	6,550	6,198	5,877	5,316	4,843	4,442	4,097	3,799	3,539	3,311
20	16,351	14,877	13,590	12,462	11,470	10,594	9,818	9,129	8,514	7,469	6,623	6,259	5,929	5,353	4,870	4,460	4,110	3,808	3,546	3,316
22	17,658	15,937	14,451	13,163	12,042	11,061	10,201	9,442	8,772	7,645	6,743	6,359	6,011	5,410	4,909	4,488	4,130	3,822	3,556	3,323
24	18,914	16,936	15,247	13,799	12,550	11,469	10,529	9,707	8,985	7,784	6,835	6,434	6,073	5,451	4,937	4,507	4,143	3,831	3,562	3,327
26	20,121	17,877	15,983	14,375	13,003	11,826	10,810	9,929	9,161	7,896	6,906	6,491	6,118	5,480	4,956	4,520	4,151	3,837	3,566	3,330
28	21,281	18,764	16,663	14,898	13,406	12,137	11,051	10,116	9,307	7,984	6,961	6,534	6,152	5,502	4,970	4,528	4,157	3,840	3,568	3,331
30	22,396	19,600	17,292	15,372	13,765	12,409	11,258	10,274	9,427	8,055	7,003	6,566	6,177	5,517	4,980	4,534	4,160	3,842	3,569	3,332
35	25,999	21,487	18,665	16,374	14,498	12,948	11,655	10,567	9,644	8,176	7,070	6,617	6,215	5,539	4,992	4,541	4,164	3,845	3,571	3,333
40	27,355	23,115	19,793	17,159	15,046	13,332	11,925	10,757	9,779	8,244	7,105	6,642	6,233	5,548	4,997	4,544	4,166	3,846	3,571	3,333

Table A-4

Valeur capitalisée (accumulée) d'une annuité de 1 $ versée à la fin de chaque année

Nombre d'années n	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %	12 %	14 %	15 %	16 %	18 %	20 %	22 %	24 %	26 %
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	2,020	2,030	2,040	2,050	2,060	2,070	2,080	2,090	2,100	2,120	2,140	2,150	2,160	2,180	2,200	2,220	2,240	2,260
3	3,060	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278	3,310	3,374	3,440	3,473	3,506	3,572	3,640	3,708	3,778	3,848
4	4,122	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573	4,641	4,770	4,921	4,993	5,066	5,215	5,368	5,524	5,684	5,848
5	5,204	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985	6,105	6,353	6,610	6,742	6,877	7,154	7,442	7,740	8,048	8,368
6	6,308	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523	7,716	8,115	8,536	8,754	8,977	9,442	9,930	10,442	10,980	11,544
7	7,434	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200	9,487	10,089	10,730	11,067	11,414	12,142	12,916	13,740	14,615	15,546
8	8,583	8,892	9,214	9,549	9,897	10,260	10,637	11,028	11,436	12,300	13,233	13,727	14,240	15,327	16,499	17,762	19,123	20,588
9	9,755	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488	13,021	13,579	14,776	16,085	16,786	17,519	19,086	20,799	22,670	24,712	26,940
10	10,950	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487	15,193	15,937	17,549	19,337	20,304	21,321	23,521	25,959	28,657	31,643	34,945
11	12,169	12,808	13,486	14,207	14,972	15,784	16,646	17,560	18,531	20,655	23,045	24,349	25,733	28,755	32,150	35,962	40,238	45,031
12	13,412	14,192	15,026	15,917	16,870	17,888	18,977	20,141	21,384	24,133	27,271	29,002	30,850	34,931	39,581	44,874	50,985	57,739
13	14,680	15,618	16,627	17,713	18,882	20,141	21,495	22,953	24,523	28,029	32,089	34,352	36,786	42,219	48,497	55,746	64,110	73,751
14	15,974	17,086	18,292	19,599	21,051	22,550	24,215	26,019	27,975	32,393	37,581	40,505	43,672	50,818	59,196	69,010	80,496	93,926
15	17,293	18,599	20,024	21,579	23,276	25,129	27,152	29,361	31,772	37,280	43,842	47,580	51,660	60,965	72,035	85,192	100,815	119,347
16	18,639	20,157	21,824	23,657	25,673	27,888	30,324	33,003	35,950	42,753	50,980	55,717	60,925	72,939	87,442	104,935	126,011	151,377
17	20,012	21,762	23,698	25,840	28,213	30,840	33,750	36,974	40,545	48,884	59,118	65,075	71,673	87,068	105,931	129,020	157,253	191,735
18	21,412	23,414	25,645	28,132	30,906	33,999	37,450	41,301	45,599	55,750	68,394	75,836	84,141	103,740	128,117	158,405	195,994	242,585
19	22,841	25,117	27,671	30,539	33,760	37,379	41,446	46,018	51,159	63,440	78,969	88,212	98,603	123,414	154,740	194,254	244,033	306,658
20	24,297	26,870	29,778	33,066	36,786	40,995	45,762	51,150	57,275	72,052	91,025	102,444	115,380	146,628	186,688	237,989	303,601	387,389
22	27,299	30,537	34,248	38,505	43,392	49,006	55,457	62,873	71,403	92,503	120,436	137,632	157,415	206,345	271,031	356,443	469,056	617,278
24	30,422	34,426	39,083	44,502	50,816	58,177	66,765	76,790	88,497	118,155	158,659	184,168	213,978	289,495	392,484	532,750	723,461	982,251
26	33,671	38,553	44,312	51,113	59,156	68,676	79,954	93,324	109,182	150,334	208,333	245,712	290,088	405,272	567,377	795,165	1 114,634	1 561,682
28	37,051	42,931	49,968	58,403	68,528	80,698	95,339	112,968	134,210	190,699	272,889	327,104	392,503	566,481	819,223	1 185,744	1 716,101	2 481,586
30	40,568	47,575	56,085	66,439	79,058	94,461	113,283	136,308	164,494	241,333	356,787	434,745	530,312	790,948	1 181,882	1 767,081	2 640,916	3 942,026
35	49,994	60,462	73,652	90,320	111,435	138,237	172,317	215,711	271,024	431,663	693,573	881,170	1 120,713	1 816,652	2 948,341	4 783,645	7 750,225	12 527,442
40	60,402	75,401	95,026	120,800	154,762	199,635	259,057	337,882	442,592	767,091	1 342,025	1 779,090	2 360,757	4 163,213	7 343,858	12 936,535	22 728,803	39 792,982

L'évaluation des actifs financiers ainsi que l'analyse de la relation risque-rendement par le modèle d'évaluation des actifs financiers (MÉDAF) constituent une base indispensable à la compréhension de la gestion financière. Les gestionnaires d'une entreprise industrielle, d'une institution financière comme les banques ou les sociétés de gestion de portefeuille, peuvent utiliser les concepts d'évaluation des actifs financiers pour améliorer leurs décisions concernant les investissements, les placements et l'acquisition d'entreprise. Il en est de même pour les produits dérivés modernes.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants ainsi qu'aux gestionnaires qui veulent se familiariser avec la finance et en acquérir les notions fondamentales.

FAOUZI RASSI fut professeur titulaire à l'Université Laval et occupe actuellement cette fonction à l'École des sciences de la gestion de l'Université du Québec à Montréal, aux trois niveaux d'enseignement. Il enseigne également aux étudiants du MBA Services financiers à l'Université du Québec en Outaouais, rôle qu'il a joué durant plusieurs années sur la scène internationale.

PUQ.CA

ISBN 978-2-7605-3831-3