SOUS LA DIRECTION DE
JÉRÔME PROULX, CLAUDIA CORRIVEAU ET HASSANE SQUALLI

FORMATION MATHÉMATIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Pratiques, orientations et recherches

Presses de l'Université du Québec

FORMATION MATHÉMATIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Membre de
L'ASSOCIATION
NATIONALE
DES ÉDITEURS
DE LIVRES

Presses de l'Université du Québec
Le Delta I, 2875, boulevard Laurier, bureau 450, Québec (Québec) G1V 2M2
Téléphone : 418 657-4399 – Télécopieur : 418 657-2096
Courriel : puq@puq.ca – Internet : www.puq.ca

Diffusion/Distribution :
Canada et autres pays : Prologue inc., 1650, boulevard Lionel-Bertrand, Boisbriand (Québec) J7H 1N7 – Tél. : 450 434-0306 / 1 800 363-2864

France : Sodis, 128, av. du Maréchal de Lattre de Tassigny, 77403 Lagny, France
Tél. : 01 60 07 82 99

Afrique : Action pédagogique pour l'éducation et la formation, Angle des rues Jilali Taj Eddine et El Ghadfa, Maârif 20100, Casablanca, Maroc – Tél. : 212 (0) 22-23-12-22

Belgique : Patrimoine SPRL, 168, rue du Noyer, 1030 Bruxelles, Belgique – Tél. : 02 7366847

Suisse : Servidis SA, Chemin des Chalets, 1279 Chavannes-de-Bogis, Suisse – Tél. : 022 960.95.32

SOUS LA DIRECTION DE
JÉRÔME PROULX, CLAUDIA CORRIVEAU ET HASSANE SQUALLI

FORMATION MATHÉMATIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Pratiques, orientations et recherches

Presses de l'Université du Québec

Catalogage avant publication de Bibliothèque et Archives nationales du Québec et Bibliothèque et Archives Canada

Vedette principale au titre :

Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches

Comprend des réf. bibliogr.

ISBN 978-2-7605-3209-0

1. Professeurs de mathématiques – Formation – Québec (Province).
2. Connaissances en mathématiques – Québec (Province). 3. Mathématiques – Étude et enseignement.
I. Proulx, Jérôme, 1976- . II. Corriveau, Claudia. III. Squalli, Hassane, 1958- .

QA11.2.F67 2011 510.71'5 C2011-941959-9

Les Presses de l'Université du Québec reconnaissent l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Fonds du livre du Canada et du Conseil des Arts du Canada pour leurs activités d'édition.

Elles remercient également la Société de développement des entreprises culturelles (SODEC) pour son soutien financier.

La réalisation de cet ouvrage est rendue possible grâce au soutien du GREFEM (Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques) et le CREAS (Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences, technologies et mathématiques).

Mise en pages : Info 1000 mots
Conception de la couverture : Ariane Michaud-Gagnon

Dépôt légal – 1er trimestre 2012
Bibliothèque et Archives nationales du Québec / Bibliothèque et Archives Canada
Imprimé au Canada

Table des matières

SECTION 1

SECTION 3

▪ Texte plénier 3

▪ Réaction 1 au texte d'Hassane Squalli

SECTION 5

■ Texte plénier 5

■ Réaction 1 au texte d'Adolphe Adihou et de Cathy Arsenault

SYNTHÈSE FINALE

Dans cet ouvrage, l'*utilisation du masculin* sert uniquement à alléger le texte et désigne autant les hommes que les femmes.

Introduction

En 2009, dans le cadre du 77e congrès de l'Association francophone pour le savoir (ACFAS), Jérôme Proulx et Linda Gattuso ont organisé un colloque intitulé « Formation des enseignants de mathématiques – Quels modèles, quel équilibre ? Discussions et débats entre la relève et l'expérience », à l'intérieur duquel un nombre important de didacticiens-formateurs étaient réunis dans le but de partager leurs expériences relatives à la formation des enseignants de mathématiques. Cette rencontre a permis, d'une part, des échanges constructifs à propos des perspectives et des pratiques actuelles de formation à l'enseignement des mathématiques et, d'autre part, de pointer les besoins et les orientations futures quant à la formation des maîtres en mathématiques. Cette rencontre a permis de publier l'ouvrage rassemblant les différentes contributions des participants (voir Proulx et Gattuso, 2010). Plusieurs aspects importants de la problématique de la formation à l'enseignement des mathématiques ont été soulevés, notamment les questions relatives à la formation *mathématique* des futurs enseignants. La récurrence de ce thème au sein des discussions apparaît indicatrice de réelles préoccupations quant à cette formation mathématique, et elle renvoie nécessairement à l'intérêt d'y réfléchir de manière plus approfondie, tant chez les formateurs que chez les chercheurs. Deux ans plus tard, nous avons ressenti la nécessité de réunir, dans le cadre d'un colloque, des didacticiens et des mathématiciens québécois intéressés à poursuivre la réflexion et les échanges autour de la problématique de la formation mathématique des enseignants du primaire ou du secondaire en tant que formateurs ou chercheurs. Dans cette optique, et en considérant les éléments soulevés autant par la communauté de formateurs que par les différents travaux de recherche menés dans le domaine, les questions et points suivants apparaissent centraux :

- *État des lieux* : Quelles perspectives et approches sont proposées au Québec pour la formation mathématique des enseignants ? Qu'est-ce qui est fait concrètement à la formation initiale pour promouvoir la formation mathématique des enseignants du primaire et du secondaire ? Et à la formation continue ? Quels sont les choix et les fondements qui motivent ces approches ?
- *Orientations et perspectives* : Qu'est-ce qui est souhaité pour la formation mathématique des enseignants du primaire et du secondaire ? Et à la formation continue ? Quels sont les choix et les fondements qui motivent ces idées ?
- *La nature des connaissances mathématiques* : Quelles sont les mathématiques et les pratiques mathématiques qui apparaissent nécessaires pour l'enseignant de mathématiques du primaire et du secondaire ?
- *Les cours de didactique des mathématiques* : Quels rôles peuvent et doivent jouer les cours de didactique des mathématiques dans la formation mathématique des enseignants ?
- *La prise en charge de la formation mathématique* : Quel type de mathématiques doit être travaillé ? Dans quels cours ? Par qui ces cours doivent-ils être enseignés ? Est-ce que le rôle des cours de didactique des mathématiques est aussi de participer à la formation mathématique des enseignants ?
- *La recherche* : Que dit la recherche : 1) sur les connaissances mathématiques des enseignants ? 2) sur les pratiques de formation mises de l'avant ? 3) sur les orientations et perspectives ?
- *Les autres groupes d'enseignants* : Qu'en est-il pour les enseignants en adaptation scolaire et sociale ? Et pour ceux en contexte d'immersion ? Parmi les perspectives avancées ci-dessus, lesquelles privilégier ? Quels sont les choix et les fondements qui motivent ces approches ?

C'est donc à ces questions fondamentales que les textes de ce collectif apportent des éclairages particuliers et complémentaires. En particulier, l'ouvrage est divisé en six sections, précédées de préliminaires. Nous présentons ici les lignes directrices.

Dans les préliminaires, le texte de Nadine Bednarz ouvre la discussion en proposant un état des lieux. N. Bednarz commence par faire un premier tour d'horizon sur les pratiques de formation en mathématiques au Québec et ailleurs en mettant en lumière les choix qui sont faits et les perspectives sous-jacentes, et en distinguant les formations initiales des enseignants du primaire et du secondaire. Ce tour d'horizon lui permet de formuler des questions et d'en proposer des éléments d'analyse : 1) Existe-t-il une différence entre la formation mathématique des enseignants telle qu'elle est pensée au primaire et celle au secondaire ? Si oui, pourquoi ? 2) Quelles pratiques de référence guident les cours (de mathématiques) mis en place ? Prenant appui sur sa longue expérience de formatrice d'enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire et sur la littérature scientifique, N. Bednarz s'attarde par la suite à analyser les cours de didactique et le rôle que ces cours peuvent jouer dans la formation mathématique des enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire. Cette réflexion l'amène à analyser l'articulation entre formation mathématique (dans les cours de mathématiques) et cours de didactique, ainsi que l'articulation entre mathématiques dans un contexte de formation et mathématiques dans un contexte d'enseignement.

Dans la section 1, à partir d'une analyse de son cours « Structures numériques », André Boileau nous livre une discussion sur les cours de mathématiques adaptés aux futurs enseignants de mathématiques du secondaire à l'Université du Québec à Montréal en expliquant les fondements et les justifications derrière les choix faits et l'orientation prise dans ces cours. Dans sa réaction au texte d'André Boileau, Alejandro S. González-Martín discute la question de la formation mathématique des enseignants en articulant sa réaction autour de quatre points : 1) l'épistémologie dominante pour l'enseignement des mathématiques dans la formation ; 2) les caractéristiques des responsables de la formation mathématique des futurs enseignants ; 3) les mathématiques nécessaires aux futurs enseignants ; 4) le besoin d'un cadre théorique autour des connaissances des enseignants de mathématiques. Dans le texte suivant, Anna Sierpinska, pour souligner la richesse du texte d'André Boileau, a intitulé sa réaction : « L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur ». Car, dit-elle, le texte de Boileau, tel un arbre banyan, a ouvert pour elle « sur une multitude de sujets qui engendrent d'autres sujets, eux-mêmes poussant des racines profondes et devenant des sujets intéressants en soi » (p. 92). Après une brève description de la structure de surface du texte de Boileau, elle nous propose une excursion dans la structure profonde du texte. Cette excursion a été déclenchée, dit-elle, par la référence de Boileau aux écrits d'Henri Lebesgue, référence qui l'a amenée à découvrir un Lebesgue mathématicien pratique et un Lebesgue didacticien. Elle partage cette découverte avec le lecteur.

Le texte de la section 2, « Formation mathématique pour les enseignants de mathématiques du secondaire : croisement des regards du mathématicien et du didacticien » présente un dialogue entre un formateur mathématicien (Frédéric Gourdeau) et un formateur didacticien des mathématiques (Jérôme Proulx), en collaboration avec un autre didacticien des mathématiques (Jean-François Maheux) et un autre mathématicien (Bernard R. Hodgson). Le dialogue porte sur les pratiques de formation dans les cours de mathématiques dédiés aux futurs enseignants du secondaire à l'Université Laval. À cet effet, J. Proulx a été invité à observer *in situ* l'enseignement de F. Goudreau pour enclencher, avec lui, une discussion qui sera enrichie par les réactions de J.-F. Maheux et de B.R. Hodgson. Comme le note J. Proulx à la fin du texte, cet exercice est une belle illustration du but de ce colloque, à savoir engager un dialogue à propos de la formation mathématique entre des formateurs mathématiciens et des formateurs didacticiens. Ces échanges entre didacticiens et mathématiciens apportent des regards complémentaires, qui peuvent se croiser sans toutefois s'opposer à propos du rôle essentiel que peut jouer le mathématicien professionnel dans la formation mathématique des futurs enseignants. Dans sa réaction au texte de F. Gourdeau et de J. Proulx, Claudine Mary souligne le caractère didactique de certains aspects de la pratique de formation mathématique de F. Gourdeau, et s'interroge sur la frontière possible entre ce qui relève du rôle du mathématicien qui enseigne les mathématiques aux futurs enseignants et de celui du didacticien qui enseigne à ces mêmes futurs enseignants. Pour éclairer cette question, elle organise sa réflexion autour d'une analyse comparative du travail du formateur mathématicien et de celui du formateur didacticien. Pour sa part, dans le texte suivant, Denis Tanguay reformule à sa façon plusieurs questions soulevées dans le texte de F. Gourdeau et de J. Proulx, en se plaçant comme formateur-didacticien ayant une formation initiale de mathématicien : Quelle sorte de maîtrise mathématique attend-on des futurs maîtres ? Quelles mathématiques ? Comment les aborder ? Quel est le rôle des cours de didactique des mathématiques ? En exposant son point de vue, D. Tanguay souligne l'importance de sensibiliser les futurs enseignants à deux pôles de l'activité mathématique : d'un côté, l'activité du chercheur et, de l'autre, une appréhension de la qualité architectonique des mathématiques.

Dans la section 3, Hassane Squalli présente un texte intitulé : « Quelle articulation entre formation mathématique et formation à l'enseignement des mathématiques ? Essai d'analyse et point de vue d'un didacticien des mathématiques ». Pour étudier la question formulée dans le titre, H. Squalli propose un cadre théorique présentant l'enseignant en formation (expression qu'il privilégie pour parler du futur maître) comme un complexe d'assujettissements institutionnels : institution pédagogique universitaire, institution mathématique universitaire, institution didactique universitaire, institution de formation pratique universitaire et institution scolaire. Selon lui, chacune de ces institutions tente de formater l'enseignant en formation à ses propres formes culturelles ; l'enseignant en formation est alors appelé à adopter des postures épistémologiques propres à ces institutions, même souvent différentes entre elles. Il propose alors, pour des fins d'analyse, de considérer l'enseignant en formation comme un triplet : un apprenant des mathématiques (ApM), un enseignant des mathématiques (EnM) et un étudiant universitaire réfléchissant sur les pratiques d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (EtU). À l'aide d'un exemple d'une activité pédagogique utilisée dans un de ses cours de didactique des mathématiques, il illustre comment cette conceptualisation permet d'analyser l'articulation de la formation mathématique et didactique de l'enseignant en formation. Comme le titre de sa réaction l'indique (« Sybil en formation des maîtres : un cas de personnalités multiples »), Sophie René de Cotret confirme l'intérêt de faire adopter différentes postures épistémologiques au futur maître pour favoriser l'articulation entre la formation mathématique et la formation didactique. En revanche, si dans le dispositif de formation proposé par H. Squalli on cherche à créer une confrontation entre les diverses postures épistémologiques pour favoriser l'interaction entre elles et la construction de connaissances partagées, S. René de Cotret vise plutôt à faire passer le futur maître de façon consciente et volontaire par ces diverses postures épistémologiques, afin qu'il puisse développer un regard riche et varié sur le savoir. Elle justifie son point de vue par l'idée des *multiples usages* des savoirs mathématiques qui rendent impossible l'idée d'avoir une connaissance « complète » d'un savoir mathématique ; et que la position depuis laquelle le futur maître aborde un problème mathématique oriente la signification qu'il peut convoquer ou développer du savoir. Pour sa part, Corneille Kazadi souligne dans sa réaction que certains étudiants futurs enseignants au secondaire présentent encore des lacunes importantes au niveau de leur maîtrise des mathématiques du secondaire, bien qu'ils aient suivi des cours de mathématiques universitaires. Il discute alors des moyens pour assurer une bonne articulation entre formation mathématique et formation didactique, articulation qui reste par contre difficile à réaliser selon lui. C. Kazadi explique que le formateur didacticien ayant une formation en mathématique peut probablement favoriser cette articulation. Il ajoute que la formation pratique peut aussi contribuer à cette articulation, particulièrement lorsque les contenus mathématiques sont au centre des discussions de supervision.

Avec le texte de Laurent Theis à la section 4, on entame la seconde partie du livre consacrée à l'exposé de textes portant davantage sur la formation mathématique d'enseignants au primaire. Le texte de L. Theis s'intitule : « Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du primaire et du préscolaire ? À la recherche des mathématiques dans une séquence sur l'enseignement des probabilités ». Pour répondre à cette question, L. Theis analyse la contribution de son cours de didactique des mathématiques pour la formation *mathématique* de ses étudiants. Il convoque à cet effet un cadre modélisant les types de connaissances mathématiques, tiré des travaux de D. Ball et ses collègues. Son analyse le conduit à dégager un certain nombre de lacunes et d'enjeux liés à la formation mathématique des étudiants en formation à l'enseignement des mathématiques au primaire et au préscolaire. Dans sa réaction, Caroline Lajoie a choisi de s'attarder à la question de la relation entre la formation mathématique et la formation didactique dans les cours de didactique des mathématiques du primaire. Elle reprend pour cela l'analyse de la séquence d'enseignement sur les probabilités proposée par L. Theis. Ces réflexions l'amènent à proposer la recherche d'un équilibre entre une formation mathématique et une formation didactique dans un cours de didactique des mathématiques ; ce qui peut, selon elle, paraître paradoxal. Elle termine sa réaction en soutenant que si, comme le montre le texte de L. Theis, une réflexion mathématique peut avoir lieu dans un cours de didactique des mathématiques, cette réflexion risque de se faire au détriment de la réflexion didactique. Pour sa part, Louise Poirier reprend le cadre sur les connaissances mathématiques des enseignants de D. Ball et ses collègues que L. Theis a exploité dans son texte, pour l'appliquer à un dispositif de formation continue d'enseignants du primaire. Elle arrive à la conclusion que la formation mathématique dans ce dispositif de formation continue est plus importante que ce qu'elle avait imaginé au départ, et que les activités de nature mathématique y sont très variées.

Dans la section 5, Adolphe Adihou et Cathy Arsenault présentent un dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire, en vigueur depuis sept ans à l'Université du Québec à Rimouski, ainsi que quelques résultats de sa mise en œuvre. Ce dispositif comporte trois volets : 1) un test diagnostique obligatoire en mathématiques administré dès le début de la formation ; 2) des ateliers et un ensemble de cours de mathématiques non obligatoires, visant à préparer les étudiants à la passation du premier test diagnostique ou à une nouvelle passation pour ceux qui doivent reprendre le test car ils n'ont pas réussi à atteindre le seuil de réussite ; 3) la formation en didactique des mathématiques par les cours, qui contribuent aussi à la formation mathématique des étudiants. A. Adihou et C. Arsenault discutent de l'effet de ce dispositif de formation sur la formation mathématique et didactique des étudiants en recourant à une masse importante de données empiriques. Dans sa réaction à leur texte, Michel Beaudoin souligne les points importants de ce dispositif de formation et relève certaines questions qui ont suscité son intérêt. Par la suite, il examine les conditions d'application et les limites du dispositif pour d'autres contextes de formation. Pour sa part, Lily Bacon organise sa réaction au texte d'A. Adihou et C. Arsenault en se plaçant dans le cadre de la didactique professionnelle. Elle examine le potentiel du dispositif de formation dans le développement des compétences professionnelles en enseignement des étudiants. Ainsi, selon elle, ce dispositif est fort intéressant, en particulier en ce qui a trait au changement de culture du métier qu'il peut entraîner, à l'explicitation des niveaux de connaissances et de maîtrise mathématiques exigés par la profession de l'enseignement au primaire (et l'incidence de cette explicitation sur les pratiques enseignantes), et au rôle du dispositif dans la régulation du cheminement académique et des apprentissages des étudiants. Ces réflexions sont appuyées par des analyses fines et aboutissent à la formulation de questions, qui ouvrent pour plusieurs sur des pistes de recherche.

Dans la sixième et dernière section, Helena P. Osana et Vanessa Rayner examinent la question de la formation mathématique des futurs enseignants du primaire à travers une revue de la littérature scientifique anglophone et une analyse détaillée et documentée d'un cours assuré par la première auteure à des futurs enseignants du primaire. Pour l'analyse de ce dispositif de formation, les auteures recourent au modèle de D. Ball et ses collègues, caractérisant les différents types de connaissances mathématiques des enseignants, cadre aussi utilisé par L. Theis dans son texte à la section 4. Par la suite, elles entament une discussion sur les retombées de la recherche sur les pratiques de formation mathématique des enseignants. Dans sa réaction intitulée « De l'ancien élève à l'enseignant : quel parcours ? », Lucie DeBlois discute des activités et des observations réalisées en contexte de formation des enseignants décrites dans le texte de H.P. Osana et de V. Rayner, pour ensuite questionner la posture privilégiée des futurs enseignants à l'égard des mathématiques et enfin s'attarder sur la spécificité de la formation initiale en enseignement des mathématiques. Dans sa réflexion, L. DeBlois questionne les cadres théoriques qui guident les interventions du formateur didacticien et se préoccupe de la façon dont les étudiants interprètent les messages dans les cours de didactique des mathématiques. Ces interprétations dépendent de la posture épistémologique adoptée par le futur enseignant (posture d'ancien élève, d'étudiant universitaire, d'enseignant, aussi relié au texte de H. Squalli à la section 3). De son côté, Jean-François Maheux utilise sa réaction au texte de H.P. Osana et de V. Rayner pour remettre en question la pertinence de la question principale à l'origine du débat du colloque : quelle formation mathématique pour les enseignants (du primaire) ? Il propose de voir l'enseignement comme un art et l'enseignant, ainsi que le formateur universitaire, comme un artiste, agissant dans un contexte particulier et à partir de compréhensions particulières et personnelles. Il consacre l'essentiel de son texte à faire un petit éloge de l'artiste, comme l'indique le titre, et à inviter le lecteur à explorer les effets de cette métaphore sur la formation des enseignants. Ce texte clôt de belle manière ce collectif, redirigeant le débat autour de la question de la formation mathématique des enseignants vers de nouveaux horizons.

Plusieurs de ces idées sont finalement ramenées dans la conclusion du livre, bonifiées d'une synthèse des discussions et des interactions ayant eu cours lors du colloque lui-même, où les participants ont échangé durant deux jours sur toutes ces idées. Cette synthèse permet ainsi d'aller plus loin et d'offrir un supplément d'interprétation aux idées présentées dans les différents textes.

C'est donc à cet éventail de pratiques, d'orientations et de recherches sur la formation mathématique des enseignants que nous vous convions dans ce livre. Et nous vous souhaitons une excellente lecture !

PRÉLIMINAIRES

- **Texte d'ouverture**

  Formation mathématique des enseignants

  État des lieux, questions et perspectives

  Nadine Bednarz

Texte d'ouverture

Formation mathématique des enseignants

État des lieux, questions et perspectives

Nadine Bednarz
Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques – GREFEM
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
descamps-bednarz.nadine@uqam.ca

1. Introduction

Le texte de cadrage, les thèmes et les questions qui ont servi de trame pour ce colloque, cette conférence et donc ce texte sont très larges. Ils touchent aux pratiques de formation des enseignants en mathématiques, au Québec et ailleurs dans le monde, et cela, en formation initiale et continue pour le primaire et le secondaire. Ces pratiques de formation sont regardées à travers les cours de mathématiques, mais aussi de didactique, ainsi que via l'éclairage amené par les travaux de recherche sur la formation mathématique des enseignants, les études et les théorisations dans ce domaine. Tout cela vise à répondre à deux questions de fond : *Qu'est-ce que la formation mathématique des enseignants ? Que signifie « être formé en mathématiques » pour pouvoir enseigner les mathématiques ?*

Ce panorama est large. Pour l'aborder au moins partiellement, j'ai dû me situer minimalement. Il s'agissait avant tout pour moi d'aider, au départ de ce colloque et de ce recueil, à pointer un certain nombre de problèmes et de questions qui se posent au sujet de cette formation, de manière principalement à ouvrir le débat. J'ai donc voulu avant tout dépeindre un certain portrait de la situation, de ce qui s'en dégage, afin de mieux comprendre certains enjeux actuels et travaux de recherche qui aident à mieux asseoir cette situation et ouvrir sur des pistes nouvelles, à la fois pour la formation et pour la recherche. J'ai choisi pour cela de me centrer sur la formation initiale, la formation continue demandant à mon sens un examen tout aussi approfondi pour bien en rendre compte (voir à ce sujet Bednarz, Fiorentini et Huang, 2011).

Une remarque préalable s'impose : durant mon parcours de formatrice, j'ai dû intervenir à plusieurs reprises dans la composante dite « mathématique » de la formation des enseignants. Dès 1970, à l'intérieur du programme « Perfectionnement des maîtres en mathématiques » (PERMAMA), j'ai participé à la conception et à l'enseignement de cours de mathématiques destinés à des enseignants en exercice, et par la suite à la formation des enseignants en mathématiques au secondaire, à l'enseignement des cours d'algèbre linéaire et de structures numériques (voir par exemple le texte d'A. Boileau dans ce recueil). Récemment, j'ai développé et étudié une formation continue centrée sur les mathématiques « professionnelles » s'adressant aux enseignants du primaire et du secondaire à l'intérieur d'un projet de recherche subventionné (voir Bednarz et Proulx, 2010b). Ce n'est cependant pas du seul point de vue de cette formatrice que j'aborde l'analyse de cette formation mathématique, mais davantage du point de vue de la chercheuse en présentant un portrait global et en m'appuyant sur les études et travaux de recherche menés dans le domaine. Les compréhensions multiples sur la formation mathématique proposées à travers le recueil par divers collègues (soit à partir de leurs recherches ou de leurs différents cours et de l'intérieur de leurs pratiques) viennent enrichir le portrait que je trace ainsi que la discussion.

Par ailleurs, et cela est important pour moi, si on considère que la formation mathématique ne concerne pas uniquement les cours de mathématiques, mais que les cours de didactique et même le contexte de stage de formation à l'enseignement ont aussi un rôle à jouer, certaines des questions ou des interrogations inscrites au cœur de ce colloque valent la peine d'être examinées de près. Afin de revenir sur un certain nombre des enjeux clés de cette formation, j'offre dans un premier temps un tour d'horizon de ces pratiques de formation au Québec et ailleurs dans le monde en répondant à la question : *Comment ces dernières sont-elles pensées ?.* Ce premier tour d'horizon suscite déjà un certain nombre de questions importantes.

2. Premier tour d'horizon sur les pratiques de formation en mathématiques[1] : les choix qui sont faits, les perspectives sous-jacentes, les premières questions

Je m'intéresse dans un premier temps à la composante mathématique de cette formation initiale établie ainsi explicitement (sous le vocable « cours de mathématiques »). Je suis consciente que la formation mathématique ne se limite pas à cette composante ; comme souligné plus haut, elle est en effet présente dans les cours de didactique, sur lesquels je reviens par la suite et dans la formation pratique. Cette formation mathématique ne se termine pas non plus avec la formation initiale ; elle se poursuit tout au long de la carrière, comme le montrent notamment les études de Margolinas, Coulange et Bessot (2005), de Li *et al.* (2008) et de Ma (1999). Ces travaux montrent en effet que des apprentissages mathématiques se poursuivent durant la pratique et pointent des occasions propices à un tel développement : l'observation et l'interprétation de productions d'élèves semblent nourrir chez les enseignants observés par Margolinas une réflexion mathématique ; les occasions que les enseignants ont d'explorer intensivement le matériel d'enseignement avec d'autres enseignants (en particulier de nouveaux enseignants), et ce, après avoir quitté le programme de formation initiale, ont également été pointées comme des occasions où ces enseignants approfondissent « les mathématiques liées à l'enseignement » (Ma, 1999 ; Li *et al.*, 2008). Ces

1. Ce tour d'horizon n'est nullement exhaustif, ce qui nécessiterait pour cela de disposer de données précises sur les différents programmes de formation à travers le monde. Le portrait que je trace a toutefois pu bénéficier des sources suivantes : la 15e étude de l'International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), dont l'un des volets porte sur la formation initiale et les premières années d'enseignement (Even et Ball, 2009), l'*International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Sullivan et Wood, 2008), dont l'une des parties porte sur la formation mathématique notamment dans six pays d'Asie (Li *et al.*, 2008 ; Shiqi *et al.*, 2008), ainsi que le compte rendu, pour le Canada, d'un groupe de travail portant sur la formation mathématique des enseignants au primaire (Lajoie et Barbeau, 2000).

travaux ouvrent en ce sens sur les apports possibles en formation initiale des expériences de stage, de la construction de leçons, des événements mathématiques en classe, des questions d'élèves[2], etc.

2.1. Formation mathématique (initiale) des enseignants du primaire à travers les cours de mathématiques

Un premier aspect qui se dégage est celui d'une grande variabilité de la formation mathématique des enseignants du primaire d'un pays à l'autre, comme le montre par exemple l'étude comparative des systèmes de formation dans différents pays (Li *et al.*, 2008 ; Smida *et al.*, 2007 ; Tatto, Lerman et Novotna, 2009), mais aussi à l'intérieur d'un même pays (voir notamment Li *et al.*, 2008, pour la Chine ; Lajoie et Barbeau, 2000, pour le Canada[3]), et ce, même si nous sommes, dans plusieurs cas, dans un système centralisé. Ainsi, en Chine, on retrouve trois types de programmes et d'institutions qui ont la responsabilité de la formation des enseignants du primaire : les écoles normales supérieures, qui offrent un programme de trois ans ; les « Junior Normal College », qui offrent des programmes de trois et cinq ans ; et les programmes offerts par les « Normal or Comprehensive Universities » (Baccalauréat de quatre ans). Dans ces différents programmes, la part de la formation mathématique peut être très variable : 16,4 % du programme dans les écoles normales ; 22 % dans les cinq ans des « Junior Normal College » pour ceux se spécialisant en mathématiques[4] ; et variable dans les universités (Li *et al.*, 2008).

---

2. Les travaux de recherche menés sur les stages tournent davantage autour du rôle que jouent ces stages dans l'apprentissage de l'enseignement des mathématiques, la construction d'une identité de professionnelle d'enseignant des mathématiques et le rôle des différents intervenants (maître associé, superviseur, etc.), alors que la dimension mathématique plus spécifique est rarement abordée.
3. On retrouve au plan canadien une formation de courte durée (un ou deux ans), à l'exception du Québec (formation dans ce cas de quatre ans), avec une exigence variable de cours de mathématiques à l'intérieur du programme ou avant d'entrer à celui-ci (de zéro à deux cours de mathématiques).
4. L'enseignant du primaire peut, dans des écoles plus grandes, être appelé à enseigner deux matières, un sujet principal et un sujet secondaire. La spécialisation dans ce cas se fera en mathématiques ou en chinois langue maternelle.

Dans une revue des systèmes d'éducation à travers le monde, Tatto *et al.* (2009) mettent toutefois en évidence, au-delà de cette variabilité, que la proportion de temps consacrée aux cours de mathématiques comparativement à l'ensemble du programme est faible : « *Most primary teachers are educated as generalists and most of the preparation they receive places low emphasis on mathematics content (as per the proportion of time dedicated to mathematics courses as part of their overall programme)* » (p. 19). Toutefois cette faible proportion sera compensée dans certains cas par des stratégies de sélection où des exigences de connaissances mathématiques préalables sont requises, ou par des programmes de formation consécutifs à un autre programme universitaire préalable dans lequel une formation mathématique n'est pas nécessairement présente. Ainsi, dans le cas des pays du Maghreb, un recrutement sur concours est présent après la fin du baccalauréat (diplôme de fin d'études secondaires, équivalent du collégial au Québec), et la durée de la formation est de deux ans (trois dans le cas de l'Algérie). Elle comporte un cours de mathématiques dans lequel les étudiants en formation sont amenés à approfondir ou à compléter leurs connaissances mathématiques (Smida *et al.*, 2007).

En France, les futurs enseignants sont recrutés sur la base d'un concours après une licence qui équivaut à trois ans d'études universitaires. Ils sont issus à 78 % des filières lettres et sciences humaines, selon le rapport Kahane (2003) : « Pour un grand nombre, ils ont très souvent abandonné l'étude des mathématiques dès la seconde. Leurs souvenirs sont donc très lointains et leurs connaissances souvent fragiles et lacunaires. À cela s'ajoute, pour un certain nombre, un désamour des mathématiques, voire une phobie » (p. 8). Comme tendent à le montrer les réflexions de la commission Kahane, ces épreuves de sélection posent toutefois un certain nombre de problèmes :

> Les épreuves de concours[5] ont pour objectif d'apprécier l'aptitude des candidats à mobiliser et exploiter les connaissances nécessaires à l'enseignement à l'école primaire sans exiger une connaissance fine et approfondie de tel ou tel sujet dans la discipline considérée […] Si une

5. Ce concours comporte des questions disciplinaires (mathématiques, français) – 8 points sur 20 – et des questions à dimension plus professionnelle (étude de productions d'élèves, analyse *a priori* d'exercices ou de documents pédagogiques, etc.) – 12 points sur 20. Jusqu'en 2002, l'épreuve de mathématiques comptait pour 28 % de la note finale (20 % à partir de 2003). Cette place des mathématiques dans le concours n'est « pas partagée par tous les pays d'Europe qui, comme en Allemagne, se contentent d'un

> connaissance fine et approfondie de notions est requise pour traiter un sujet, ces notions seront fournies au candidat dans le texte de l'épreuve (ce qui correspond à la situation réelle de l'enseignant qui, lors de la préparation d'une activité de classe, complète ses connaissances par la lecture d'ouvrages et de manuels) (p. 15).

La place des mathématiques dans le concours n'est donc pas un élément qui incite réellement à un travail en profondeur sur les concepts mathématiques, même s'il est dit par ailleurs que cette épreuve ne doit pas tester que des compétences techniques, mais aussi l'analyse et le raisonnement (Rapport Kahane, 2003). Si formation il y a, elle est orientée par la réussite à ce concours. Après le concours, en deuxième année, les candidats ont par ailleurs une formation de courte durée d'une année axée sur la formation à l'enseignement dans les différentes disciplines. On retrouve donc, dans ce cas, une formation professionnelle faisant suite à un diplôme universitaire (dans un autre champ) et comportant un temps faible de formation à l'enseignement des mathématiques qui oscille entre 20 et 60 heures selon les Instituts universitaires de formation des maîtres (IUFM) (Rapport Kahane, 2003, p. 8). On peut donc se demander à quelles occasions, dans quels contextes, les futurs enseignants du primaire seront amenés à réexaminer, explorer, approfondir les mathématiques qu'ils auront à enseigner. Si un tel examen se fait, il ne peut être que contraint, en matière de durée, et il se fait nécessairement dans le cadre des cours de didactique : cette formation amène-t-elle à revisiter ces connaissances mathématiques en lien avec les questions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques ou, plutôt, met-elle l'accent sur un enseignement des concepts didactiques ? Ces questions demandent d'entrer plus à fond dans la formation didactique donnée par les IUFM, formation très variable d'un IUFM à l'autre, même si la réflexion que faisait Marie-Jeanne Perrin-Glorian lors de la rencontre Espace Mathématique Francophone (EMF) de 2003 pointait vers une intégration des différentes composantes mathématiques et didactiques :

> La formation en mathématiques et en didactique est intégrée et dispensée par des formateurs, pour la plupart à temps plein à l'IUFM, qui ont acquis une formation en didactique quand ils ne sont pas chercheurs eux-mêmes : une organisation nationale s'est mise en place

---

niveau de formation et d'un entretien général de recrutement » (Rapport Kahane, 2003, p. 17). Enfin, signalons que l'année préparatoire au concours offerte à l'IUFM n'est pas obligatoire ; toute personne possédant une licence peut passer le concours.

> depuis 30 ans ; elle organise des colloques annuels en direction des formateurs et produit des documents pour la formation des maîtres. Cela a permis de développer beaucoup d'ingénieries autour de la formation, notamment pour changer le rapport aux mathématiques des étudiants et articuler la formation mathématique et la formation didactique (Bednarz et Perrin-Glorian, 2003, p. 6).

Au-delà de ce constat, là aussi des intentions sont explicitées par la Commission Kahane (2003) quant aux objectifs que doit poursuivre cette formation mathématique :

> Les compétences qu'il serait souhaitable de développer chez le futur professeur des écoles concernant plus particulièrement les mathématiques : posséder une maîtrise raisonnable des connaissances mathématiques de l'école élémentaire permettant d'avoir un certain recul par rapport aux programmes ; connaître des éléments d'épistémologie des mathématiques (réflexion sur la pratique mathématique, sur le rapport au vrai ou faux, sur l'histoire des mathématiques) ; identifier le rôle des mathématiques dans la formation de l'élève, en particulier la place des mathématiques par rapport aux autres disciplines, en relation avec d'autres domaines de savoirs et leur utilité pratique [...] (p. 7-8).

L'idée semble mise ici sur la nécessité d'avoir un nouveau regard sur les connaissances mathématiques de l'école élémentaire, un certain recul de manière à « établir de nouveaux liens entre des connaissances souvent disparates et isolées, moyennant en particulier un minimum de culture sur la genèse de certains concepts et leur dynamique propre » (Kahane, 2003, p. 8). Plusieurs exemples viendront illustrer cette nécessité d'une réflexion épistémologique (nombres, numération, algorithmes des opérations sur les entiers, décimaux).

Qu'en est-il maintenant au Canada ? Un groupe de travail ayant été créé dans le cadre du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques (GCEDM) en 2000, réunissant des mathématiciens et didacticiens intervenant dans cette formation, nous donne une vue d'ensemble de la situation des cours de mathématiques offerts dans les universités canadiennes en formation initiale des enseignants du primaire (Lajoie et Barbeau, 2000). Elle nous renseigne toutefois peu sur le contenu comme tel de ces cours (voir le tableau 1).

TABLEAU 1
FORMATION DES ENSEIGNANTS AU PRIMAIRE AU CANADA, PLACE DES COURS DE MATHÉMATIQUES

Province	Nombre d'années préuniversitaires à l'entrée dans le programme	Nombre d'années universitaires du programme de formation	Exigence de cours de mathématiques à l'intérieur du programme ou avant d'entrer
Colombie-Britannique	12	Une année continue après un autre programme	Un cours non spécifique exigé
Alberta	12	Deux années continues après un autre programme	Aucun
Saskatchewan/ Manitoba	12	Une année après un autre programme ou en parallèle avec un autre programme	Aucun
Ontario	13 (modification à 12)	Une année après un autre programme ou en parallèle avec un autre programme	Variable (à Queens par exemple, un cours exigé)
Québec	13 (incluant les deux années de cégep)	Quatre années consécutives	Variable (entre zéro et deux cours de mathématiques obligatoires)
Nouveau-Brunswick	12	Une année après un autre programme ou en parallèle	Variable
Nouvelle-Écosse	12	Deux années consécutives après un autre programme	Un cours (intégrant mathématiques, sciences et langue)
Île-du-Prince-Édouard	12	Deux années consécutives après un autre programme	Aucun
Terre-Neuve-et-Labrador	12	Une année après un autre programme	Deux cours de mathématiques exigés

Dans les différentes provinces canadiennes (sauf au Québec, où le choix est différent), la formation est de courte durée (un ou deux ans) et prend place après (ou parallèlement à) un autre diplôme postsecondaire (qui en général n'est pas en mathématiques) et se concentre surtout sur l'enseignement des disciplines (mathématiques, français, sciences, etc.). La dernière expérience que les futurs enseignants du primaire ont en mathématiques est souvent celle de l'école secondaire. Les discussions tenues dans ce groupe de travail nous montrent par ailleurs que les formateurs présents n'ont pas la même idée de ce que devrait être un cours de mathématiques pour les futurs enseignants du primaire.

Du point de vue des activités qu'on devrait y retrouver :

> Certains des exemples de cours qui ont été mentionnés comportent des occasions de réfléchir sur l'enseignement au primaire, des préparations d'activités, des expérimentations avec des élèves [...] alors que d'autres consistent essentiellement en une opportunité pour les étudiants et étudiantes de faire des mathématiques, de vivre eux-mêmes une activité mathématique (Lajoie et Barbeau, 2000, p. 38).

Du point de vue aussi des contenus abordés et des approches :

> Pour certains participants et participantes, il importe non seulement que les contenus mathématiques soient plus avancés que ceux enseignés au primaire mais il faut qu'ils soient différents de ceux qui leur ont été enseignés au cours de leur cheminement scolaire (par ex. les géométries non-euclidiennes, les classes résiduelles modulo n, les bases de numération autres que la base dix, etc.). Pour d'autres, il importe surtout que ces contenus plus avancés soient enseignés différemment de la manière dont les mathématiques leur ont été enseignées précédemment, en ayant recours à des approches auxquelles ils sont moins habitués [...] résolution de problèmes, travail en équipe, rédaction d'un journal, utilisation des nouvelles technologies, jeux de rôles, etc. (p. 38-39).

Dans le cas du Québec, où la formation est de plus longue durée et identifiée dès le départ comme une formation professionnelle (diplôme de quatre ans en enseignement préscolaire et primaire), la situation est intéressante à regarder de plus près. Quelle place occupent ici les cours de mathématiques ? Cette composante varie d'une université à l'autre, comme le montre bien le tableau 2 (p. 23). Qu'est-ce qui se dégage de cette analyse pour le Québec plus précisément ?

- *Une composante mathématique présente dans la formation*. Lorsque de tels cours ont été mis en place (cas de presque toutes les universités), ils font habituellement partie du programme de formation et sont pris en charge par les didacticiens ou les mathématiciens qui s'intéressent aux questions d'enseignement des mathématiques (cas, par exemple, de l'Université Laval). Ces cours sont donc particuliers au programme de formation (il ne s'agit pas de cours de mathématiques qui s'adressent également à d'autres étudiants, par exemple les étudiants en mathématiques, comme ce sera le cas pour la formation des enseignants du secondaire). Cette place particulière semble donner aux mathématiques un statut à part entière dans cette formation d'un futur professionnel de l'enseignement au primaire.

- *Une composante mathématique vue comme un préalable*. La place qu'occupent ces cours dans le programme, toujours préalables aux cours de didactique, semble considérer cette composante comme essentielle à la réflexion sur l'enseignement de cette discipline. Cette place est adoptée d'emblée et probablement avec la justification sous-jacente implicite (dans la conception du programme de formation et son organisation) : pour pouvoir amorcer une réflexion sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, il faut d'abord avoir fait des mathématiques[6].
- *Sur le contenu de ces cours*. Des cours particuliers, adaptés aux futurs enseignants du primaire, semblent en général caractériser le contenu : un contenu mathématique qui prend en compte, même s'il va plus loin, le contenu du primaire qu'ils auront à enseigner. On travaille donc surtout les nombres naturels, relatifs et rationnels, la numération, les opérations, la divisibilité, les mesures de longueur, l'aire, le volume, mais aussi la géométrie plane ou le travail dans l'espace, voire les statistiques descriptives dans certains cas. Il y a là une différence importante avec la formation des enseignants du secondaire ; j'y reviens plus loin.
- *Sur les approches de formation*. À travers tout au moins ce qui transparaît de l'étude des documents (il serait nécessaire d'aller plus loin pour cerner véritablement ces pratiques de formation), l'accent est mis sur les aspects conceptuels (sens des concepts en jeu), sur les aspects historiques et épistémologiques (quelque chose que met aussi de l'avant la Commission de réflexion Kahane sur l'enseignement des mathématiques), mais aussi sur l'activité mathématique, notamment à travers la résolution de problèmes.

Après ce tour d'horizon de la formation initiale des enseignants du primaire en mathématiques, place à celle des enseignants du secondaire.

6. Je reviens plus loin sur cette place donnée aux mathématiques et sur son fondement qui doit, selon moi, être interrogé.

TABLEAU 2
FORMATION DES ENSEIGNANTS AU PRIMAIRE AU QUÉBEC EN REGARD DES COURS DE MATHÉMATIQUES

Université	Exigence de cours de mathématiques dans la formation particulière au BEPEP	Place de ces cours dans le programme	Qui est responsable de ces cours ?	Leur orientation/contenu
Université Laval	Deux cours obligatoires dans le programme (six crédits) : Arithmétique/Géométrie.	En alternance mais préalable aux cours de didactique associés (arithmétique avant didactique des nombres naturels et relatifs ; géométrie avant didactique de la géométrie).	Assumés par des professeurs de deux départements différents.	Cours de mathématiques pour l'enseignement primaire/orientés, tout en les dépassant, vers les contenus du primaire (par exemple système de numération, quatre opérations, algorithmes, propriétés, divisibilité, nombres premiers, PGCD, PPCM, arithmétique modulaire, etc.).
Université de Montréal	Un cours hors programme (trois crédits).	Cours de mise à niveau en mathématiques (première année). Préalable aux cours de didactique (cinq cours).	Assumé par le Département de didactique.	Retour sur le contenu du primaire (notions mathématiques de base afin de questionner, expliciter leur fonctionnement) : numération, opérations, fractions, rapports et proportions, géométrie plane, statistiques descriptives.
Université de Sherbrooke	Un cours obligatoire dans le programme (trois crédits). Développement de la pensée mathématique.	Préalable aux cours de didactique de l'arithmétique (un et deux).	Assumé par le Département de didactique.	Axé sur l'arithmétique (contenu du primaire) : nombres, numération, structures + et x, calcul mental et écrit ; perspectives historiques et culturelles.

TABLEAU 2 (*suite*)

Université	Exigence de cours de mathématiques dans la formation particulière au BEPEP	Place de ces cours dans le programme	Qui est responsable de ces cours ?	Leur orientation/contenu
UQAM	Un cours obligatoire dans le programme (trois crédits). + un cours optionnel (un crédit) mise à niveau hors programme.	Préalable aux cours de didactique (deux).	Assumé par la section didactique.	Aspect historique (histoire des systèmes de numération, origine des géométries, controverses autour de la construction des nombres, développement de la notation décimale). Résolution de problèmes touchant à différents contenus du primaire.
UQAC	Un cours obligatoire dans le programme (deux crédits).	Préalable aux cours de didactique (deux).	Assumé par le Département des sciences de l'éducation.	Contenu du programme du primaire (nombres, numération, etc.), fondements historiques et épistémologiques de ces concepts.
UQAR	Aucun (trois cours de didactique). Test de mathématiques ?			
UQTR	Aucun.			
UQAT	Un cours obligatoire dans le programme.	Préalable aux cours de didactique (deux).	Semble relever d'un département autre que sciences de l'éducation ?	Lié au contenu du primaire (nombres, numération, opérations, mesures, probabilités, statistiques), activité mathématique de résolution de problèmes.

2.2. Formation mathématique des enseignants du secondaire à travers les cours de mathématiques

Au Canada, comme dans bien d'autres pays, les enseignants du secondaire doivent suivre un nombre important de cours en mathématiques pour obtenir la qualification à l'enseignement de cette discipline dans les écoles secondaires (voir à ce sujet Bednarz et Perrin-Glorian, 2003 ; Smida *et al.*, 2007 ; Even et Ball, 2008 ; Kahane, 2003 ; Liljedahl *et al.*, 2009 ; Shiqui *et al.*, 2008). L'analyse plus précise de ces programmes de formation montre, par ailleurs, que ces cours sont souvent associés aux contenus de mathématiques avancées universitaires (algèbre, algèbre linéaire, analyse, théorie des groupes, calcul différentiel et intégral, etc.). Ces cours se retrouvent dans les programmes universitaires de mathématiques, les étudiants à la formation à l'enseignement partageant ces cours avec d'autres étudiants en mathématiques, en ingénierie ou en sciences. De plus, cette composante de la formation est assurée par les professeurs des départements de mathématiques (par des « mathématiciens »). Le nombre de ces cours suivis par les étudiants est bien sûr variable d'un contexte à l'autre et d'un pays à l'autre, ainsi que la structure du modèle de formation retenu[7] (programme de formation consécutif à un programme universitaire dans la discipline *versus* programme concurrent dans lequel la formation dans la discipline et la formation professionnelle cheminent conjointement) (Tatto *et al.*, 2009) : par exemple, en France, une licence (voire une maîtrise) dans la discipline est requise en préalable aux concours de recrutement (CAPES, concours d'entrée) ; dans les pays du Maghreb, ce recrutement se fait sur la base d'un concours après un DEUG, une licence ou une maîtrise en mathématiques selon le pays. Cependant, le modèle de formation mathématique retenu, au-delà de cette différence, est toujours le même : la formation mathématique semble, ce qui n'était nullement le cas pour le primaire, essentiellement attachée à des cours de mathématiques avancées : « *For the most part mathematicians teach mathematics courses, and in some cases they are taught by mathematics educators who may have a mathematics degree as*

7. On observe une grande variabilité parmi les options offertes aux futurs enseignants : un modèle consécutif (une formation en mathématiques [d'une durée variable de deux à cinq ans] suivie d'une formation à l'enseignement [de un à quatre ans]) ; une éducation générale (mathématique) et professionnelle menée de front (mathématiques, pédagogie, stages, didactique) avec là aussi des variations dans la durée (préparation mathématique et pédagogique, trois à six ans ; une formation pratique [18 jours à un an]).

well » (Tatto *et al.*, p. 17). Je reviens ici plus précisément sur l'analyse que j'ai menée précédemment dans le cas du Québec (dans Bednarz et Perrin-Glorian, 2003). Cette analyse des programmes de formation dans le cas du baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire pour les huit universités du Québec (pour la partie des cours obligatoires) donne le portrait global suivant :

- une formation mathématique (entendue ici comme la composante attachée explicitement aux cours de mathématiques) variable d'une université à l'autre : sept à 15 cours, en moyenne 12 cours ;
- une composante histoire des mathématiques : un cours dans toutes les universités (sauf une) ;
- des cours de mathématiques spécifiques destinés aux futurs enseignants en mathématiques apparaissent, dans certains cas, dans la description du programme : c'est le cas par exemple de l'Université du Québec à Montréal (UQAM), où la plupart des cours ont été conçus en ce sens, de l'Université Laval, où les professeurs œuvrant au Département de mathématiques se sont engagés dans cette voie ou encore de l'Université de Montréal, plus récemment, pour un des cours du programme. Dans la majorité des cas, les cours de mathématiques ne sont nullement spécifiques, étant les mêmes que ceux suivis par les étudiants de mathématiques et assurés par des départements différents de ceux pour les cours de didactique, soit les départements de mathématiques.

Huit ans après cette analyse faite en 2003, force est de constater que la situation a quelque peu changé dans les universités, laissant apparaître une certaine prise en compte de la spécificité de la formation mathématique des futurs enseignants du secondaire par la mise en place de cours « autres » que des cours de mathématiques avancées qui puisent à un baccalauréat en mathématiques et qui sont communs aux étudiants en enseignement et en mathématiques (voir le tableau 3).

TABLEAU 3
FORMATION DES ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE AU QUÉBEC AU REGARD DES COURS DE MATHÉMATIQUES

Université	Exigences en matière de nombre de crédits en mathématiques	Cours communs à mathématiques et au BES (cours de mathématiques avancées)	Cours spécifiques (en matière de contenu et d'orientation) ouvert aux étudiants de mathématiques ou non	Orientation de ces cours spécifiques / contenu	Qui est chargé de ces cours de mathématiques ?
Sherbrooke	54 crédits	Un crédit, dont un cours d'histoire des mathématiques	Un cours (trois crédits) Éléments de mathématiques	Porte particulièrement sur les notions mathématiques enseignées au secondaire. Idée d'asseoir les connaissances acquises, d'en explorer les fondements.	Département de mathématiques
Montréal	Minimum 45 crédits (peut aller jusqu'à 51 crédits)	35 crédits (41 crédits), dont Histoire des mathématiques Modélisation mathématique Mathématiques et technologie	10 crédits Mathématiques fondamentales Mathématiques élémentaires Géométrie euclidienne Approfondissement des mathématiques du secondaire	En dehors des cours Géométrie euclidienne (sur démonstration) et Approfondissement des mathématiques du secondaire, les autres cours portent sur les systèmes de nombres et l'algèbre (axiomes de Péano, algorithme d'Euclide, nombres entiers, rationnels, réels, algébriques, transcendants, complexes, algèbre supérieure, théorie des équations, théorie des graphes).	Département de mathématiques

TABLEAU 3 (*suite*)

Université	Exigences en matière de nombre de crédits en mathématiques	Cours communs à mathématiques et au BES (cours de mathématiques avancées)	Cours spécifiques (en matière de contenu et d'orientation) ouvert aux étudiants de mathématiques ou non	Orientation de ces cours spécifiques / contenu	Qui est chargé de ces cours de mathématiques ?
UQAM	33 crédits (incluant cours technologie et mathématiques)	Un seul Probabilités et statistiques	30 crédits, dont Histoire des mathématiques	Approfondissement des mathématiques du secondaire / de la compréhension des divers systèmes de nombres (Structures numériques), accent mis sur raisonnement géométrique, preuve (géométrie 1 et 2). Idée aussi de prolongements de concepts mathématiques du secondaire (algèbre linéaire et vectorielle, théorie des équations), de développement d'un autre rapport au savoir (théorie des équations, initiation à l'analyse par une approche heuristique).	Section didactique du Département de mathématiques (sauf probabilités et statistiques).

Université	Exigences en matière de nombre de crédits en mathématiques	Cours communs à mathématiques et au BES (cours de mathématiques avancées)	Cours spécifiques (en matière de contenu et d'orientation) ouvert aux étudiants de mathématiques ou non	Orientation de ces cours spécifiques / contenu	Qui est chargé de ces cours de mathématiques ?
Laval	45 crédits (jusqu'à une possibilité de 54 crédits)	36 crédits (45 crédits), dont Histoire des mathématiques	9 crédits Mathématiques fondamentales pour l'enseignement Thèmes mathématiques pour l'enseignement Géométrie	Développement du raisonnement / de la pensée mathématique (preuves, démonstration, résolution de problèmes).	Département de mathématiques / cours spécifiques (mathématiciens intéressés par les questions d'enseignement des mathématiques et engagés en formation des enseignants)
UQAC	51 crédits	42 crédits, dont Histoire des mathématiques	9 crédits Géométrie Structures numériques Résolution de problèmes	Révision en profondeur des notions de géométrie euclidienne du secondaire, approfondissement de la compréhension des systèmes de nombres ; techniques de résolution de problèmes.	Département de mathématiques et d'informatique

TABLEAU 3 (*suite*)

Université	Exigences en matière de nombre de crédits en mathématiques	Cours communs à mathématiques et au BES (cours de mathématiques avancées)	Cours spécifiques (en matière de contenu et d'orientation) ouvert aux étudiants de mathématiques ou non	Orientation de ces cours spécifiques / contenu	Qui est chargé de ces cours de mathématiques ?
UQAR (Rimouski)	39 crédits	30 crédits, dont Histoire des mathématiques ; sujets spéciaux en application des mathématiques (ouvert à l'exploration de divers sujets)	9 crédits Géométrie ? Géométrie analytique Atelier de résolution de problèmes	Géométrie plane, dans l'espace, trigo circulaire et hyperbolique, développement d'habiletés en résolution de problèmes. Explorer la résolution de problèmes dans le cadre de notions élémentaires de mathématiques en utilisant diverses représentations.	Département de mathématiques
UQTR	51 crédits	42 crédits, dont Histoire des mathématiques Découvertes mathématiques (découvrir de nouvelles applications, de nouveaux chapitres des mathématiques)	9 crédits Géométrie euclidienne Résolution de problèmes mathématiques Preuves et démonstrations mathématiques	Initier à différentes heuristiques de résolution de problèmes (tirés de divers domaines mathématiques). Évolution de la notion de démonstration, réfléchir sur différentes conceptions de la preuve, améliorer ses compétences à prouver, dégager certaines stratégies d'enseignement du concept de preuve.	Département de mathématiques
UQAT	36 crédits	30 crédits, dont Histoire des mathématiques et des sciences	6 crédits Géométrie euclidienne Atelier de résolution de problèmes mathématiques	S'initier à différentes heuristiques de résolution de problèmes / prendre contact avec différentes formes de questionnement, de problèmes, situations problèmes et types de problèmes.	Département de mathématiques

L'analyse précédente fait ressortir un certain nombre de points qu'il semble important de souligner. La majorité de la formation mathématique (30 à 51 crédits) demeure une formation usuelle en mathématiques avancées, commune aux étudiants en enseignement et en mathématiques et donnée par des mathématiciens (une exception étant le cas de l'UQAM)[8]. Toutefois, un certain nombre de cours nouveaux font leur apparition dans chacune des universités, cherchant à établir un certain maillage avec le contenu mathématique que ces futurs enseignants auront à enseigner de manière : à en explorer les fondements ou à travailler à une compréhension de ce contenu (cas des cours portant sur les systèmes de nombres) ; à travailler la preuve (cas des cours sur la géométrie euclidienne) ; ou à les prolonger en visant un autre rapport au savoir (cas des cours sur la théorie des équations ou d'initiation à l'analyse à l'UQAM). On insiste aussi dans ces cas sur des processus, à travers le travail sur les preuves mais aussi sur la résolution de problèmes, qui trouve une place particulière dans plusieurs universités. Dans tous les programmes, une réflexion historique est présente, mais la formation donnée dans ces cours de mathématiques selon qu'ils s'adressent aux étudiants de mathématiques ou aux étudiants en formation peut là aussi être fort différente. Il serait donc intéressant dans ces différents cas d'aller plus loin sur le plan de la recherche pour mieux comprendre ce qui est mis en place et ce qui s'y construit, les pratiques de formation dans ces différents cours donnés par des formateurs-mathématiciens ou des formateurs-didacticiens pouvant être très différentes d'une université à l'autre à la fois dans leur contenu, dans leurs visées et dans leurs approches.

8. À signaler dans ce cadre la présence de cours portant sur la modélisation mathématique à l'Université de Montréal, ou encore d'un cours sur les mathématiques et la technologie. À signaler aussi à deux endroits une ouverture sur l'exploration de nouveaux sujets, de nouvelles applications, de nouveaux champs mathématiques, donc une ouverture sur les mathématiques actuelles, en développement.

2.3. Portrait global qui se dégage de ce qui précède en ce qui concerne les cours de mathématiques : analyse et questions

2.3.1. Pourquoi une différence entre la formation mathématique des enseignants au primaire et au secondaire ?

La formation mathématique ne semble pas du tout conçue de la même façon pour les enseignants du primaire et du secondaire. « Aller plus loin en mathématiques », « Travailler en termes de mathématiques plus avancées », si ces idées sont présentes au primaire, elles ne le sont certainement pas de la même façon qu'au secondaire ; sinon on retrouverait dans la formation des enseignants du primaire, par exemple, des contenus puisant à un répertoire plus avancé de connaissances mathématiques que ceux du primaire touchant les fonctions, l'algèbre, etc. On semble davantage, dans le cas du primaire, axé sur des cours spécifiques s'adressant à ces futurs enseignants et en lien, sur le plan des contenus tout au moins, avec les contenus qu'ils auront à enseigner au primaire. Même si une certaine ouverture en ce sens se fait sentir dans la formation des enseignants du secondaire avec quelques cours davantage axés sur des contenus qu'ils auront à enseigner, cela demeure minoritaire. Ce constat rejoint ceux de l'étude ICMI-15 sur la formation des enseignants (Even et Ball, 2009 ; Lijedahl *et al.*, 2009).

> *The (mathematical content) knowledge they (elementary prospective teachers) do require, however, is usually very specific and consists primarily of elementary mathematics content knowledge* (Flowers, Rubinstein, Grant et Kline, 2005) […] *Secondary mathematics teacher education programs, on the other hand, often require highly specialized mathematics content knowledge. The nature of this knowledge is quite different, however. Whereas prospective elementary teachers are required to obtain mathematical knowledge relevant to the teaching of elementary mathematics, prospective secondary teachers are required to obtain mathematical knowledge that is of a more academic nature* (Moreira et David, 2005 ; Opolot-Okurut, 2005). *That is they are required to become proficient in the university-level mathematics taught to a wide spectrum of mathematics, engineering, and science students* (Liljedhal *et al.*, 2009, p. 28).

Alors, pourquoi cette différence entre ce qui est exigé des futurs enseignants du primaire et ceux du secondaire dans la formation ? Liljedahl *et al.* (2009) parlent à la fois, pour expliquer ces différences, de *raisons pragmatiques et de l'influence de la tradition*. Les enseignants du primaire sont, sauf exception, des généralistes (voir Li *et al.*, 2008). Aller dans le sens d'une formation plus poussée dans les disciplines qu'ils enseignent supposerait qu'ils suivent des cours universitaires dans la discipline, et ce, pour toutes les disciplines qu'ils auront à enseigner (français, mathématiques, sciences, sciences humaines, etc.), ce qui n'est guère réaliste dans les contraintes de programmes. Les concepteurs de ces programmes ont donc opté pour « *a proficiency with school level content knowledge in all of the subject areas as a requirement* » (p. 29). Ces raisons pragmatiques ne s'étendent toutefois pas aux enseignants du secondaire. Cette formation mathématique se traduira en effet souvent dans ce cas par une composante mathématique avancée « *that is not obviously relevant to secondary mathematics* » (p. 29). La raison est peut-être à chercher, pour les auteurs, davantage du côté de la tradition (voir aussi à ce sujet Proulx et Simmt, 2011).

> *The reason for this is tradition – the tradition of what it means to be a mathematics teacher. Since the classical period, to be a mathematics teacher meant that one was first a mathematician. This thinking has changed very little in the last 2,500 years. Prospective mathematics teachers must first become mathematicians* (Liljedhal *et al.*, 2009, p. 29).

Dans une présentation à une table ronde tenue lors du colloque national de la Commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques (CORFEM), Corinne Castela avance une raison pour appuyer la nécessité d'une formation en mathématiques avancées[9] : « Les

9. D'autres raisons seront également invoquées. Celle-ci mettra de l'avant différentes dimensions de ce que pourrait être une maîtrise spécifique « Enseignant de mathématiques », reconnaissant en cela une certaine spécificité de cette formation en mathématiques avancées en ouvrant sur des avenues possibles (aborder les objets mathématiques du secondaire du point de vue d'au moins une théorie mathématique reconnue légitime dans le cadre des mathématiques contemporaines, explorer les raisons d'être et les applications des savoirs enseignés dans et hors les mathématiques, vivre des situations de recherche mathématique, etc.).

professeurs de mathématiques sont dans leur établissement des représentants de la communauté des mathématiciens, ils ne sont pas que cela mais ils sont aussi cela» (Castela, 2009, p. 77)[10].

2.3.2. Quelles pratiques de référence guident les cours de mathématiques mis en place?

Pour aller plus loin à cette étape, il est intéressant de se demander, au-delà des contenus spécifiques abordés, quelles sont les finalités de ces cours. J'emprunte ici à Martinand (1987) le concept de «pratique sociale de référence», qui nous permet d'entrer sous un autre angle dans ces cours. Introduit par Martinand dans le contexte d'une réflexion sur les savoirs professionnels en sciences et techniques, ce concept me semble plus parlant que celui de «transposition didactique», dans la mesure où les objets de formation sont autant, sinon plus, des pratiques que des savoirs. Le concept de «pratique sociale de référence» amène à interroger les choix effectués dans les cours de mathématiques s'adressant aux futurs enseignants, en lien avec les finalités de la formation, qui servent en quelque sorte de tremplin pour penser les activités du cours. Cette analyse n'est pas anodine dans la mesure où, à travers cette expérience mathématique ou ces pratiques que vivent les étudiants en formation, les futurs enseignants se forment une certaine identité «de qui ils sont» comme enseignants de mathématiques et de ce qu'ils enseignent à travers les mathématiques.

- *Une pratique de référence (implicite[11]) associée à la formation des enseignants du secondaire est celle des mathématiciens*. On forme un enseignant de mathématiques au secondaire, pour une grande part, comme on forme un futur mathématicien: les cours retenus sont communs à ces deux groupes, ils sont en partie ceux du baccalauréat en mathématiques. Cependant, l'entrée sur cette pratique de référence

10. Cela représente une explication qui puise dans une certaine conception du métier d'enseignant de mathématiques au secondaire et dans laquelle j'ai personnellement un peu de mal à me reconnaître. Les enseignants avec lesquels je travaille en recherche collaborative depuis de nombreuses années (voir Bednarz, 2000; Bednarz et Barry, 2009) semblent bien plus animés par la finalité d'un apprentissage des mathématiques par leurs élèves, une préoccupation pour les élèves, et pour leur compréhension, que par celle d'une défense des mathématiques de la communauté des mathématiciens.

11. Les concepteurs ne l'explicitent pas en ces termes mais, implicitement, c'est dans les faits celle qui est véhiculée par ces cours.

des mathématiciens *se fait par les contenus* (de mathématiques avancées) et non par l'activité de ces mathématiciens : on est alors plus près des savoirs mathématiques avancés que des « mathématiques en train de se faire », c'est-à-dire de l'activité du mathématicien engagé dans la recherche mathématique. Elle apparaît en ce sens très loin de la pratique réelle des mathématiciens (voir à ce sujet Burton, 2004). Dans certains cas toutefois, les cours semblent mettre l'accent sur certains processus au cœur du travail du mathématicien (modélisation mathématique, preuve, etc.), sur les mathématiques actuelles (cours sur les découvertes mathématiques, sujets nouveaux en application des mathématiques) ou encore sur le fait de faire des mathématiques et de vivre une activité mathématique (cours sur la résolution de problèmes). Mais qu'en est-il réellement des pratiques dans ces cours ? Est-on plus près ici de la pratique des mathématiciens en train de faire des mathématiques ? Enfin, il faut signaler dans tous les programmes la présence d'une réflexion sur l'évolution historique des idées mathématiques avec sans doute une référence sous-jacente aux mathématiques comme construction humaine et sociale. La question qui se pose est de savoir si cette réflexion sur l'histoire conduit les futurs enseignants à jeter un regard nouveau sur les savoirs mathématiques, en particulier ceux qu'ils auront à enseigner.

- *Une autre pratique de référence, soit celle de l'enseignant du primaire ou du secondaire, tout au moins sous l'angle du contenu auquel il sera confronté, semble guider les formateurs dans le cas des cours de mathématiques spécifiques aux futurs enseignants.* L'entrée se fait là aussi par les contenus (ceux qu'aura à manier cet enseignant) et non par l'activité mathématique de l'enseignant (ce que fait l'enseignant quand il exerce sa profession) : on retrouve dans ce cas une articulation/prise en compte manifeste des contenus mathématiques du primaire ou du secondaire (systèmes de nombres, numération, géométrie euclidienne, etc.) avec une idée de construire un sens aux concepts et d'en voir les fondements. Les contenus couverts et les approches retenues par les formateurs visent implicitement à développer chez les futurs enseignants une vision des mathématiques autre que celle qu'ils ont eue comme élèves. Les contenus sont les mêmes que ceux que ces futurs enseignants auront à enseigner, mais ils sont repensés à partir de critères de profondeur et d'étendue, où souvent on intègre même des éléments relatifs à l'histoire. Dans le cas du primaire, le travail des formateurs vise aussi à développer chez ces étudiants leur confiance en eux, y compris à travers des activités ou des problèmes déstabilisants ou difficiles.

- *La formation par et à l'activité mathématique est orientée, dans certains cas, par une certaine culture mathématique qu'on cherche à faire vivre*. Ainsi, dans la conception du cours « L'activité mathématique », élaboré par une équipe de formateurs de l'UQAM (Pallascio *et al.*, 1996), chaque module du cours (arithmétique, géométrie, probabilités et statistiques) se vit à partir d'une certaine approche adoptée par les formateurs : résolution de problèmes, apprentissage coopératif, pédagogie du projet, etc. Il s'agit ici d'initier les futurs enseignants à une certaine culture mathématique de la classe, en leur faisant vivre l'enseignement des mathématiques autrement, et en faisant en sorte que s'amorce ainsi à l'intérieur même du cours de mathématiques un certain questionnement sur les approches possibles dans leur enseignement. Des aspects historiques sont aussi insérés, faisant un lien avec les repères culturels contenus dans le programme d'études du primaire (Gouvernement du Québec, 2001a). On travaille par ailleurs sur ces contenus en ayant les mêmes visées que celles du programme de formation de l'école québécoise (Gouvernement du Québec, 2001a) : développer chez les enseignants en formation leur compétence à résoudre des problèmes ; à raisonner ; à communiquer leur expérience mathématique de façon appropriée (oralement et par écrit). Un « cahier de bord » est par exemple utilisé en lien avec la partie résolution de problèmes, dans lequel les étudiants doivent préciser tout ce qui se « passe dans leur tête » quand ils résolvent le problème et expliciter leur démarche[12] ; ce souci de communication est aussi présent à l'oral dans le retour collectif sur les problèmes, où les différentes solutions sont présentées par les étudiants et sont explicitées, justifiées, etc. En arrière-plan, il y a des liens qui sont faits (pour les formateurs) avec le programme d'études de l'école québécoise pour l'école primaire (sous l'angle notamment des compétences à développer, des repères culturels, de certaines approches, etc.). Si la

12. Voir aussi à ce sujet les textes dans ce recueil d'H. Squalli et de F. Gourdeau et J. Proulx.

« pratique sociale de référence » est en ce sens celle de l'enseignant du primaire, elle n'est pas ici seulement présente en matière de contenus, mais aussi d'approches possibles pour aborder ces mathématiques et des finalités associées à cet enseignement.

2.4. Cours de didactique et formation mathématique : première analyse et questions

Les propos tenus dans la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (Rapport Kahane, 2003) entretiennent la formation didactique des futurs enseignants et le rôle qu'elle peut jouer dans la formation mathématique. À propos de la formation des enseignants du primaire, il est ainsi mentionné que :

> Pour qu'un étudiant ait ses chances de revisiter les mathématiques d'une autre façon que celle qui l'a d'abord repoussé [on renvoie ici au rapport, pas nécessairement positif, que ces futurs enseignants ont aux mathématiques], il est nécessaire qu'il bénéficie d'une formation spécifique en mathématiques, dont une entrée possible est une réflexion sur des questions d'enseignement, notamment une prise de recul par rapport à la scolarité antérieure, un début de détachement de la position d'élève […] La question des mathématiques nécessaires pour enseigner des mathématiques dans les petits niveaux n'est pas une question naïve. Parce qu'être enseignant, c'est justement ne pas reproduire automatiquement ce qu'on a vécu comme élève (p. 17).

On voit là apparaître sous la réflexion sur les questions d'enseignement, propre aux cours de didactique, une occasion pour ces futurs enseignants de revisiter les mathématiques. Les propos tenus cette fois sur la formation des enseignants du secondaire nous aident à aller plus loin :

> Les aspects suivants sont problématiques [on renvoie ici à l'insertion des jeunes enseignants dans la profession], totalement nouveaux par rapport aux activités [mathématiques] antérieures qu'ont eues ces jeunes enseignants quand ils étaient étudiants [sous-entendu, dans ce cas, dans leur formation mathématique] : la conception d'un cours complet sur chaque notion, au sein d'une progression cohérente sur l'année […] cela met en jeu des activités y compris mathématiques dont certaines étaient peu pratiquées jusqu'alors. Citons l'organisation des connaissances, avec le choix d'un ordre pour l'année et d'un découpage pour chaque chapitre, ou encore la prise de conscience,

> voire la mise en évidence de relations entre les chapitres ; autre nouveauté difficile : le choix de tâches et d'activités pour les élèves […] l'animation mathématique collective des séances […] (p. 60).

On part ici des pratiques enseignantes et de ce qu'aura à faire le jeune enseignant débutant pour mettre en évidence les activités mathématiques nouvelles qu'elles sollicitent et qui n'ont nullement été travaillées antérieurement. Or ces activités sont au cœur des cours de didactique des mathématiques : construire une séquence d'enseignement, choisir des tâches et des problèmes intéressants du point de vue des apprentissages des élèves, penser au retour sur un problème et à son exploitation, comprendre et exploiter les solutions d'élèves, etc. Ces activités constituent une occasion de travailler les mathématiques autrement : pas seulement pour résoudre des problèmes comme auparavant, ni travailler les concepts et propriétés mathématiques en soi, ni les utiliser pour démontrer et formaliser, mais bien pour en reconstituer le sens en vue de produire une leçon, un scénario ou une séquence d'enseignement, de choisir des tâches ou des problèmes riches, de faire des liens, de penser le retour avec les élèves, etc. Il ne faut pas seulement savoir résoudre un problème mathématique, mais aussi pouvoir envisager différentes manières de le résoudre avec des connaissances données ; il faut penser la filiation possible entre différents concepts et différents raisonnements ainsi que leur organisation sur une longue période. Ces activités sollicitent un approfondissement qui n'est pas que didactique, mais qui est aussi mathématique, ces deux aspects étant profondément imbriqués dans la situation qu'on explore.

Quelques exemples tirés du cours de didactique de l'algèbre, et de ma propre expérience comme formatrice, permettent d'illustrer cette imbrication d'aspects mathématiques et didactiques au cœur des cours de didactique (voir Bednarz, 2001). Dans la partie du cours portant sur la résolution de problèmes, les étudiants sont amenés à résoudre différents problèmes arithmétiquement et à expliciter leurs raisonnements ; des problèmes que l'on retrouve souvent au secondaire et qui sont utilisés en algèbre. Ce travail sera prolongé par une analyse de solutions d'élèves de première secondaire à différents types de problèmes « algébriques » permettant de revenir sur ces différentes stratégies de résolution, les raisonnements, supports et notations utilisés par les élèves pour aborder ces problèmes et leur intérêt éventuel dans un passage de l'arithmétique à l'algèbre. La rationalité sous-jacente qui guide le formateur en faisant cela, et qui sera explicitée aux étudiants, est double. D'une part, le but est de sensibiliser les étudiants aux raisonnements possibles des élèves dans ces problèmes, avant toute introduction à l'algèbre : les élèves de première secondaire qui arrivent du primaire ont en effet développé différentes stratégies de résolution et peuvent aborder ces problèmes de différentes façons. D'autre part, cette activité vise à faire réfléchir les étudiants à la pertinence ou non d'utiliser l'algèbre dans ces problèmes : complexité à résoudre ce problème arithmétiquement, intérêt de l'algèbre dans ce cas et pour la résolution d'une classe de problèmes plus large de même type, etc. Un travail sera aussi mené sur les problèmes eux-mêmes pour en dégager les éléments de complexité pour les élèves. Qu'est-ce qui fait qu'un problème est plus ou moins complexe ? Comment peut-on en partant d'un problème donné le modifier pour le rendre plus simple, ou plus complexe ? Ce travail portera aussi sur la résolution de problèmes en algèbre : les étudiants doivent résoudre un problème algébriquement de différentes façons, verbaliser le travail de mathématisation du problème pour bien cerner ce qu'il exige et le sens sous-jacent, déterminer les difficultés possibles des élèves dans ce passage à la symbolisation, etc. Des solutions d'élèves provenant de différents niveaux scolaires (de la deuxième à la cinquième secondaire) sont alors proposées et sont analysées par les étudiants : raisonnements différents, choix possible d'inconnues, processus de symbolisation, différentes notations, difficultés, etc.

À travers ces diverses activités menées dans le cours sur une longue période de temps autour de la résolution de problèmes (voir Bednarz, 2001, pour plus de détails), les étudiants explorent, sans que cela soit nécessairement explicite, de multiples dimensions imbriquées. Ces dimensions bien sûr touchent à des aspects didactiques : raisonnements des élèves, difficultés, processus de symbolisation, notations intermédiaires, représentations des grandeurs en jeu, complexité des problèmes, jeu sur les variables didactiques du problème pour simplifier ou complexifier le problème pour les élèves, pertinence du passage à l'algèbre, différents types de problèmes en algèbre, etc. Mais ces activités touchent aussi à des aspects mathématiques que les étudiants sont amenés à approfondir dans cette exploration, renvoyant à des raisonnements arithmétiques et algébriques qu'ils explorent et approfondissent, à des conventions de notation en algèbre, à leurs significations, à un travail sur les grandeurs et relations entre les grandeurs. Cette exploration mathématique prend ici son ancrage dans des questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques sur l'introduction à l'algèbre, sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre et sur le développement de l'algèbre en contexte de résolution de problèmes. Le travail sur la résolution d'équations (par exemple, la résolution mentale d'équations algébriques par les étudiants et le retour sur les différentes manières de résoudre utilisées ; la verbalisation de la résolution d'équations écrites et ses différents engagements possibles ; l'analyse de solutions d'élèves dans différentes résolutions d'équations ou de systèmes d'équations) est une occasion là aussi de pousser les aspects didactiques liés à cette résolution : difficultés des élèves, jugement critique face à la résolution, contrôle sur le processus de résolution par les élèves, choix d'équations à donner intéressantes à exploiter pour développer ce contrôle sur la résolution, etc. Mais ce travail sur la résolution d'équations est aussi une occasion de pousser certains aspects mathématiques : elle permet de revenir sur la signification d'une équation en mathématiques ; sur ce que veut dire résoudre une équation et un système d'équations ; sur les transformations qui conservent ou non l'équivalence des solutions ; sur le sens de la réponse à ces résolutions lorsque, par exemple, on obtient $0 = 7$, etc.

Le travail mathématique qu'engagent ces différents types d'activités rejoint une des caractéristiques de ce que l'enseignant sera appelé à faire dans sa pratique (Ball et Bass, 2003 ; Huillet, 2009 ; Bednarz et Proulx, 2009), l'amenant en quelque sorte à « décompacter » les concepts mathématiques pour en revisiter le sens à des fins d'enseignement ; l'enseignement des mathématiques nécessitant un retour au sens des concepts et aux raisonnements sous-jacents pour arriver à promouvoir et aider à la construction de compréhensions mathématiques robustes chez les élèves. Par ailleurs, l'ancrage de ce travail mathématique dans des questions d'enseignement-apprentissage contribue à faire passer les étudiants du point de vue d'une fréquentation « estudiantine » des mathématiques à une autre davantage « professionnelle », liée à leur enseignement et apprentissage pour les élèves ; c'est-à-dire de la position d'étudiant à celle d'enseignant (DeBlois et Squalli, 2002 ; voir aussi le texte d'H. Squalli dans ce recueil). On peut ainsi parler d'une certaine contribution (voire d'une contribution certaine) des cours de didactique à la formation mathématique des étudiants maîtres. La question qui demeure toutefois est celle de mieux comprendre la nature de cette formation mathématique par la didactique, de comprendre ce qui la caractérise, en regard notamment de la formation mathématique offerte dans les cours de mathématiques.

Par ailleurs, la place que cette formation mathématique occupe pour le formateur chargé des cours de didactique, et la reconnaissance de ce travail mathématique par l'ensemble de la communauté des formateurs, me semble aussi importante à soulever, car cette place de la formation mathématique est rarement mise de l'avant quand on parle des cours de didactique des mathématiques : les réflexions menées et les aspects développés touchant davantage aux aspects didactiques. On peut alors se demander si les formateurs sont bien conscients eux-mêmes de ces aspects mathématiques (imbriqués aux aspects didactiques) qu'ils contribuent à développer dans leurs cours de didactique, s'ils sont à même de les expliciter et si ces derniers sont réellement poussés, approfondis, en exploitant toute leur richesse. N'y a-t-il pas là un enjeu important pour la recherche : En quoi les cours de didactique contribuent-ils à la formation mathématique ? Sous quels aspects ? Quelle est la spécificité de cette formation mathématique en regard notamment des autres cours développés dans cette formation (les cours dits de mathématiques) ? Qu'apporte chacun des cours à cette formation mathématique ? Que veut dire former en mathématiques dans un cours de mathématiques ? Que veut dire former en mathématiques dans un cours de didactique ? Comment s'articulent-ils l'un à l'autre ? Voilà un autre enjeu central de cette formation mathématique[13].

13. Une amorce de réflexion a été fait dans le collectif de Proulx et Gattuso (2010), particulièrement à la section 5.

3. Formation mathématique des enseignants et articulations : des enjeux centraux à considérer pour analyser cette formation

Dans la conférence portant sur la formation des enseignants prononcée en 2003 dans le cadre de la rencontre EMF (voir Bednarz et Perrin-Glorian, 2003), nous mettions déjà en évidence l'enjeu central que constitue l'articulation entre les différentes composantes de cette formation. Je reprends ici ce que nous disions à l'époque :

> La fragmentation de la formation a en effet été maintes fois dénoncée. L'analyse plus précise des contenus des programmes montre une absence de cohérence conceptuelle et de cohésion […] On observe une fragmentation entre les composantes de la formation localisées à l'université et celles localisées dans les écoles, ainsi qu'une fragmentation aussi créée par le grand nombre de cours déconnectés (Bednarz et Perrin-Glorian, 2003, p. 10).

Si la formation vise ici la formation d'un futur professionnel de l'enseignement des mathématiques, cette professionnalisation suppose une imbrication réelle des diverses composantes de la formation, qui dans la pratique réelle de l'enseignant ne sont nullement disjointes ni juxtaposées (voir à ce sujet Bednarz et Proulx, 2009 ; Margolinas *et al.*, 2005).

> Une formation professionnalisante tente de construire un « savoir enseigner », i.e. une culture professionnelle intégrant des savoirs, des schèmes d'action, des attitudes ; elle prétend dépasser les clivages traditionnels entre formation académique (mathématique), didactique, pratique : elle vise à surmonter les juxtapositions et les disjonctions traditionnelles dans la formation des enseignants, entre les différentes institutions…, leurs fonctions, les types d'intervenants, les modalités d'évaluation… Elle implique donc nécessairement des confrontations d'acteurs ayant des positions institutionnelles, des compétences et des préoccupations différentes : une formation professionnalisante tente donc de nouvelles articulations entre les lieux traditionnels de formation (Lang, 1999, p. 178).

Il y a donc là un questionnement important qui porte sur toutes les composantes de cette formation, y compris la formation mathématique. En 2003, des tentatives d'articulations entre les cours de didactique et la pratique professionnelle de l'enseignant ont été développées, montrant comment cette articulation a été quelque peu pensée et problématisée dans le programme de formation des enseignants en mathématiques du secondaire à l'UQAM (voir Bednarz, Gattuso et Mary, 1995 ; Bednarz, 2001). Cette préoccupation d'articulation doit aussi être interrogée en ce qui a trait à la formation mathématique. Je reviens ici sur cette question, à la lumière des recherches menées à travers le monde et de mes propres travaux et réflexions.

3.1. Articulation entre formation mathématique (dans les cours de mathématiques) et cours de didactique

Un premier constat s'impose sur la position des cours de mathématiques et des cours de didactique dans la trajectoire de formation de l'étudiant. Lorsqu'on analyse les programmes de formation (voir la section 2 du texte), les cours de mathématiques sont en effet souvent préalables aux cours de didactique correspondants. Sous-jacent à ce choix, on retrouve généralement une certaine conception selon laquelle il n'est possible de s'engager dans un certain travail didactique que si une base mathématique solide est présente – ou encore qu'il est nécessaire d'ouvrir les étudiants à une autre vision des mathématiques, les amener à revisiter leur rapport aux mathématiques, de manière à pouvoir introduire un questionnement didactique (des choix guidant certains cours de mathématiques comme souligné dans la section 2). Ce positionnement est à interroger sur le plan de la recherche et de la formation : *La formation mathématique est-elle un préalable au questionnement didactique, ou les deux peuvent-ils se développer en parallèle, se nourrir ?* La formation didactique ne peut-elle pas elle aussi être à la source d'une exploration mathématique, comme tend à le suggérer l'analyse précédente du cours de didactique de l'algèbre ? Et, à l'inverse, la formation mathématique ne peut-elle permettre d'amorcer et de nourrir un questionnement didactique (je pense ici au cours de résolution de problèmes, voir Bednarz, Gattuso et Mary, 1995) ?

Les travaux de recherche menés par Margolinas *et al.* (2005) sur les apprentissages que réalisent les enseignants en contexte de pratique (études de cas d'enseignants dans la conduite de leçons régulières) ont le mérite de mettre en évidence le caractère imbriqué des connaissances mathématiques et didactiques. L'observation par l'enseignant de l'activité mathématique des élèves interagissant avec un problème (perception de l'activité de l'élève, régulation du travail de l'élève, etc.) est intimement liée à ses connaissances didactiques et mathématiques, imbriquées dans un projet plus global, celles-ci en retour se nourrissant de ces observations et des questions qu'elles posent. Ces travaux de recherche (voir aussi Bednarz et Proulx, 2009) viennent ainsi remettre en question la vision linéaire des programmes soutenant qu'un développement de connaissances mathématiques est nécessaire à l'amorce d'une formation didactique.

Par ailleurs, à la lumière de ce qui a été dégagé, la formation mathématique n'apparaît nullement restreinte aux cours de mathématiques. On peut dire qu'elle est travaillée par les formateurs dans les cours dénommés explicitement de mathématiques, mais qu'elle l'est aussi dans les cours de didactique. La question de l'articulation entre cours de mathématiques et cours de didactique doit donc être reformulée dans les termes suivants : quelle articulation, si elle existe, y a-t-il entre la formation mathématique travaillée dans les deux cas ? Et quels liens entre les contenus, activités et pratiques de formation dans chacun des cas ? Peu de travaux de recherche se sont centrés sur cette articulation, sans doute parce que la dimension mathématique imbriquée au travail didactique a rarement été explicitée. Les travaux de recherche viennent davantage éclairer l'articulation entre les expériences mathématiques vécues par les futurs enseignants dans les cours de mathématiques et les expériences mathématiques qu'ils auront à vivre dans leur future pratique professionnelle, dimension sur laquelle je reviens plus loin.

De ce fait, les questions soulevées dans ce qui suit sont donc davantage issues de réflexions personnelles, provenant de ma propre expérience de formatrice, plutôt que de travaux de recherche. Ces réflexions personnelles servent ici à amorcer la discussion à ce sujet et nécessitent le développement de recherches pour aller plus loin. L'exemple du cours de didactique de l'algèbre en lien avec le cours d'algèbre abstraite (qui sont deux cours qui font partie des cours obligatoires qu'ont à suivre dans leur parcours les futurs enseignants avec lesquels j'ai travaillé) sert ici à illustrer des zones de discontinuités et de tensions possibles pour les étudiants qui vivent ces expériences.

- *Des enjeux liés à la symbolisation en algèbre*. Dans le cadre du cours de didactique de l'algèbre, on constate une préoccupation à favoriser la construction de sens par les élèves, notamment à l'égard du symbolisme en algèbre. La capacité à verbaliser des stratégies de résolution de problèmes, notamment dans la mathématisation du problème, est en ce sens beaucoup travaillée, de même que la résolution d'équations ou encore diverses situations de généralisation articulées sur la construction d'un symbolisme significatif rendant compte de manières de faire générales permettant de calculer une certaine grandeur (voir Bednarz, 2001). À travers ces situations et leur exploitation en classe, leur analyse et l'analyse de solutions d'élèves, les étudiants sont mieux à même de saisir l'importance d'assurer une transition significative au symbolisme, de percevoir le rôle des notations intermédiaires, de percevoir la richesse d'exploitation possible de ces notations : ils questionnent les conventions d'écriture dont ils saisissent alors la complexité et la pertinence. Cette préoccupation de travail sur le processus de symbolisation en algèbre – qui conduit à « défaire » ce symbolisme et ses conventions, à en voir la pertinence, la signification et ce qu'il exige – semble à « l'opposé » de ce qui se fait dans le cours d'algèbre abstraite, qui exige de l'étudiant un niveau de symbolisation et de formalisation sur lequel il s'appuiera pour définir, opérer et démontrer certaines propriétés mathématiques. Les étudiants maîtres, conscients de ces différences, exprimeront parfois le malaise qu'ils ressentent sans trop voir comment concilier ces deux types d'expériences mathématiques sur des objets très semblables.
- *Des enjeux liés au statut de la lettre et à la fonction de l'algèbre.* Cette rupture entre les mathématiques abordées dans le cours de didactique de l'algèbre et celles du cours d'algèbre abstraite est aussi perceptible à travers la fonction associée à l'algèbre (outil de généralisation, de résolution de problèmes et de preuve en didactique, *versus* algèbre abstraite et étude de structures en algèbre abstraite), ou encore le statut de la lettre algébrique dans chacun des cours. Une réflexion importante du cours de didactique de l'algèbre porte ainsi, par ses différentes activités, sur le sens de la lettre algébrique, cette dernière étant vue dans certains cas comme *place holder*, comme une inconnue, une variable ou un paramètre. Cette réflexion conduit en quelque sorte

à « décompacter » un certain symbolisme pour en voir les multiples sens possibles, de manière à pouvoir aborder ses multiples compréhensions chez les élèves. À l'opposé, les mathématiques abstraites du cours d'algèbre reposent sur une idée de lettre algébrique générale, représentant de multiples objets mathématiques possibles (nombres, matrices, vecteurs, etc.), et c'est dans ce caractère général qu'elles trouvent toute leur pertinence pour avancer sur les fondements mêmes des mathématiques sous l'angle de structures.

Cet exemple permet d'entrer dans les discontinuités entre ce qui se fait de part et d'autre des cours, posant ainsi la question de leur articulation dans la formation. De manière plus fondamentale, toutefois, se pose aussi la question de l'articulation entre ces expériences mathématiques (diverses et en tension) vécues dans le cadre de la formation à l'enseignement et les expériences que ces futurs enseignants auront à vivre dans leur future pratique professionnelle.

3.2. Articulation entre mathématiques dans un contexte de formation et mathématiques dans un contexte d'enseignement

Felix Klein, dans son introduction au premier volume de ses *Mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé*[14], pointait déjà (alors en 1908) ce qu'il nommait une « double discontinuité » dans la préparation des enseignants à enseigner les mathématiques : 1) celle que les futurs enseignants, comme étudiants, rencontrent en passant des mathématiques de l'école secondaire à celles de l'université, puis 2) celle qu'ils vivent en passant de ces mathématiques universitaires aux mathématiques de l'école qu'ils auront à enseigner.

> *The Young university student found himself, at the outset, confronted with problems which did not suggest, in any particular, the things with which he had been concerned at school. Naturally, he forgot*

14. Kilpatrick (2009) suggère qu'il serait plus juste dans la traduction anglaise du texte original en allemand (*höheren*) d'utiliser *higher* plutôt qu'*advanced*, ce que Klein cherchait à mettre de l'avant étant plus une idée d'approfondissement en connectant certains problèmes de l'école à des problèmes mathématiques rencontrés en mathématiques avancées et développement des mathématiques.

> *these things quickly and thoroughly. When, after finishing his course of study, he became a teacher, he suddenly found himself expected to teach the traditional elementary mathematics* […] *and since he was scarcely able, unaided, to discern any connection between this task and his university mathematics* […] *his university studies remained only a more or less pleasant memory which had no influence upon teaching* (Klein, 1932a, p. 1).

Cette double discontinuité, au-delà du constat, a été aujourd'hui largement documentée par les recherches en didactique des mathématiques. En effet, les études portant sur la transition secondaire-postsecondaire en mathématiques ont permis de documenter les ruptures pour l'étudiant d'un ordre à l'autre (voir à ce sujet Bloch, 2000 ; Corriveau et Tanguay, 2007 ; Luk, 2005). Cette rupture ne renvoie pas seulement aux contenus (des mathématiques élémentaires aux mathématiques avancées, par exemple de l'algèbre élémentaire à l'algèbre abstraite), mais aussi à des manières différentes d'approcher les mathématiques et leur enseignement (Bloch, 2000 ; Corriveau et Tanguay, 2007). Il y a donc là une première discontinuité que vit l'étudiant en formation[15].

Par contre, dans le cas du futur enseignant, cette discontinuité est double, comme le montre la synthèse des recherches réalisées dans ce domaine (voir ici la synthèse conduite dans Proulx et Bednarz, 2010). Ainsi, les études de Moreira et David (2005, 2008) pointent les différences substantives entre les mathématiques scolaires (associées à l'exercice d'une profession, celle de l'enseignant) et les mathématiques universitaires, en puisant dans ce cas à une analyse de contenus communs approchés dans les deux cas. Cette analyse est reprise par Winslow (2009), qui parlera ici de trois niveaux interreliés pour caractériser le passage de la formation à l'enseignement : 1) une transition institutionnelle, renvoyant à des normes et à une culture différentes, 2) une transition personnelle dans le passage de la position d'étudiant dans une communauté d'étudiants à celle de professionnel dans une communauté d'enseignants et 3) une transition épistémologique, quand il apparaît nécessaire « d'adapter » des formes de connaissance académiques acquises dans la formation aux exigences de l'enseignement. L'étude de Pian (1999) en France, menée sur des futurs enseignants, met bien en évidence

15. Cette première déconnexion conduit de fait à « mettre de côté » les contenus du secondaire, qui ne sont pas interrogés ni revisités.

cette différence de fonction entre les connaissances mathématiques avancées acquises par l'étudiant (et certifiées dans ce cas par la réussite à un concours) et les connaissances potentielles dont il aura besoin pour enseigner : ces connaissances mathématiques avancées ne semblent pas réinvesties chez les étudiants préparant le CAPES, leur mise en fonctionnement en contexte d'enseignement ne semble pas aller de soi (voir aussi à ce sujet Li *et al.*, 2008 ; Mapolelo, 1999[16]).

Nos propres analyses (voir Proulx et Bednarz, 2010) ont permis de caractériser cette discontinuité entre les expériences mathématiques vécues dans les deux cas sous trois angles : 1) la « forme » des contenus travaillés (nature formelle, abstraite des mathématiques universitaires qui en font leur puissance en matière de généralisation) *versus* la nécessité d'anticiper en contexte d'enseignement différents niveaux d'explications, de verbalisations et de symbolisations de manière à articuler clairement pour les élèves les raisonnements clés utilisés ; 2) la « nature compressée » des concepts travaillés dans le cas des mathématiques avancées, de manière à rendre compte d'une classe générale de situations, à avancer sur des propriétés et des théorèmes *versus* « décompressée » dans le cas du contexte d'enseignement, obligeant à revenir sur le sens des concepts, sur leurs significations multiples, sur les liens avec d'autres concepts pour construire chez les élèves des compréhensions robustes et interroger la progression ; et 3) les « manières de faire » au cœur même des expériences mathématiques vécues, l'habitus mathématique développé dans un cours de mathématiques universitaire, *versus* le développement par exemple d'un processus de modélisation et de mathématisation en classe (Bauersfeld, 1994). Ces analyses interrogent la formation mathématique des enseignants en regard non seulement des contenus mathématiques abordés, mais aussi, et peut-être surtout, des manières d'envisager les concepts (leur nature et leur forme) et les manières mêmes d'approcher les mathématiques.

16. L'étude menée à grande échelle (Li *et al.*, 2008) auprès de futurs enseignants suggère que la formation donnée aux enseignants (dans ce cas une formation poussée en mathématiques avancées/académiques) ne conduit pas nécessairement à la compréhension profonde des mathématiques de l'école démontrée par les études de Ma (1999). Dans son étude, Ma suggère d'ailleurs que cette compréhension profonde vient à la fois du fait d'être spécialisé dans cet enseignement en mathématiques *et* des occasions que les enseignants ont d'étudier de manière intensive le matériel d'enseignement avec d'autres enseignants après avoir quitté leur programme de formation.

Les exposés et les cours donnés par Klein sont une tentative pour établir un pont entre ces deux mondes, en redéfinissant le contenu des mathématiques scolaires pour s'ajuster aux mathématiques contemporaines, à leur évolution, en cherchant à établir des liens entre les différents domaines et leurs concepts, entre les problèmes abordés dans ces mathématiques contemporaines et les problèmes mathématiques rencontrés à l'école. Mais cette première approche de ce que l'on peut appeler les « mathématiques pour l'enseignement », influencée par une vision plus générale des mathématiques que l'on peut qualifier de « moderne », ne s'attaque toutefois pas à certains éléments centraux pointés par les analyses précédentes.

Ces travaux de recherche soulignent en effet la nécessité, au-delà de la mise en lien entre les mathématiques universitaires et les mathématiques de l'école, d'une articulation entre formation mathématique des enseignants et fréquentation « professionnelle » des mathématiques (comme enseignant). Si la formation d'un enseignant est une formation à caractère professionnel, cette visée de professionnalisation doit alors en affecter toutes les composantes, y compris la formation mathématique, qui ne peut échapper à cette interrogation.

4. Fréquentation « professionnelle » des mathématiques par l'enseignant : quel éclairage amené par les recherches ?

Le rapport Kahane (2003) fait allusion, en lien avec la formation professionnelle disciplinaire initiale, à de « nouvelles pratiques à mettre en place pour un débutant (un enseignant entrant dans la profession), qui doivent l'amener à remplacer une certaine fréquentation "estudiantine" des mathématiques par une autre professionnelle » (p. 60). Mais que sait-on de cette fréquentation professionnelle des mathématiques ? Ce rapport souligne déjà un certain nombre d'enjeux clés en lien avec les tâches que ce professionnel a à assumer, en mettant bien en évidence les aspects nouveaux de celles-ci par rapport aux activités antérieures. Il ne s'agit plus seulement en effet de mobiliser des mathématiques pour résoudre des problèmes, pour prouver des théorèmes, pour formaliser un concept ou des propriétés, etc., comme cela se fait dans une fréquentation estudiantine des mathématiques avancées, mais plutôt de mobiliser des mathématiques pour en reconstituer le sens, pour le «revisiter» de manière à pouvoir le reformuler pour la classe et travailler à l'élaboration de compréhensions chez les élèves. Ces mathématiques[17] seront mobilisées : dans la conception d'un cours complet sur chaque notion au sein d'une certaine progression cohérente sur l'année (interrogeant des choix possibles sur l'organisation des connaissances, d'un ordre donné pour l'année, d'un découpage pour chaque chapitre, de la mise en évidence de liens entre les chapitres); dans le choix de tâches et d'activités pour les élèves; dans l'anticipation de leurs solutions possibles, dans le repérage de ce que font les élèves et leur compréhension pour pouvoir récupérer ces solutions et éventuellement les noter; dans l'animation mathématique collective des séances; dans la construction d'évaluations significatives, etc. On voit bien que les tâches professionnelles dans lesquelles s'engage l'enseignant, qui solliciteront des connaissances diverses dont mathématiques, ne sont pas du même ordre que celles qu'il résolvait comme étudiant en mathématiques. Toutefois, en quoi cette activité professionnelle vient-elle colorer de manière particulière les mathématiques mobilisées dans ce travail d'enseignant?

Plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques s'intéressent à cette question. J'en trace un portrait synthétique (non exhaustif) pour mettre en évidence quelques dimensions que ces travaux contribuent à éclairer. Ces différentes recherches abordent la question des «mathématiques de la pratique professionnelle» sous différents angles, en se positionnant :

- *En amont de cette pratique* (Shulman, 1986, 1987; Ball *et al.*, 2003, 2008). Les chercheurs s'intéressent dans ce cas aux connaissances dont un enseignant a besoin pour enseigner les mathématiques (à la lumière de ce qu'il est appelé à faire, des exigences de cette pratique enseignante, de ce à quoi elle fait appel).
- *En pratique, dans l'action même d'enseigner* (Margolinas *et al.*, 2005) *ou lors de la planification et conception de cet enseignement* (Huillet, 2009). Les chercheurs sont ici engagés dans l'analyse du travail de l'enseignant quand il planifie, conçoit ses leçons, les donne, interagit avec les élèves, récupère des solutions d'élèves, etc.

17. Les connaissances alors mobilisées ne sont pas que mathématiques : la situation fait aussi appel à d'autres aspects didactiques, pédagogiques et institutionnels, imbriqués. Toutefois, elle sollicite aussi des mathématiques.

- *Comme professionnel au travail* (Bednarz et Proulx, 2009, 2010a, 2011a, 2011b). On s'intéresse dans ce cas à l'enseignant comme professionnel, au même titre que d'autres groupes professionnels (ingénieurs, infirmières, banquiers, etc.) et, en partant de différentes études sur le terrain (recherches collaboratives, recherche-formation) ; on cherche à documenter les caractéristiques de ces mathématiques au travail (en lien avec la conception de situations, leur réalisation, le retour sur ce qui s'y passe, les événements mathématiques de la classe, etc.).

Des dimensions importantes de ce que veut dire « connaître et utiliser les mathématiques » pour l'enseignement des mathématiques sont mises en évidence à partir de ces travaux. Elles ont trait aux formes de connaissance mobilisées en contexte professionnel par l'enseignant, des formes de connaissance relevant peut-être davantage de ce que Shulman (1986) nomme « case study knowledge » : connaissances construites dans l'action à partir de cas, tels des cas d'élèves, de groupes d'élèves, de questions, de problèmes rencontrés en pratique et à partir desquels se construisent une expérience et une connaissance. Il s'agit ici d'une forme de connaissance plus proche de celle que mettent en action, par exemple, les médecins que d'une forme de connaissance propositionnelle souvent activée dans des cours académiques. Shulman (1986) réfère également à une autre forme de connaissance importante chez l'enseignant, soit la *connaissance stratégique*, mettant en jeu dans l'action de multiples dimensions imbriquées (Bednarz et Proulx, 2009 ; Huillet, 2009 ; Margolinas *et al.*, 2005). On y comprend que la décision prise en action par l'enseignant n'est jamais purement mathématique, mais que de *multiples dimensions imbriquées* (didactiques, mathématiques, pédagogiques, voire institutionnelles) sont en jeu et conduiront l'enseignant à opter pour tel ou tel choix (voir à ce sujet Bednarz et Proulx, 2010a, pour un exemple d'interactions d'une enseignante de troisième secondaire avec des élèves à propos d'un travail sur des expressions numériques et algébriques avec des exposants). Cette imbrication fondamentale de multiples dimensions est déjà présente à travers la notion novatrice pour l'époque de Pedagogical Content Knowledge (PCK) de Shulman (1986), car imbriquant des aspects mathématiques et pédagogiques. Cette forme de connaissance est enfin plus près d'un savoir-agir, d'une connaissance-en-acte (Bednarz et Proulx, 2009), dans la capacité notamment de l'enseignant à réagir sur-le-champ en s'adaptant en temps réel aux événements de la classe et des élèves (Mason *et al.*, 1999 ; Rowland *et al.*, 2005). On peut alors se demander à quel moment ces formes de connaissances sont développées et dans quel cadre. Est-ce que les formations mathématique et didactique contribuent à développer chez le futur enseignant ces formes de connaissances ?

Ce qui précède laisse à penser, comme l'ont mis en évidence les travaux de Ball et ses collaborateurs (Ball et Bass, 2003 ; Ball, Thames et Phelps, 2008), qu'il s'agit bien là de connaissances particulières. Les chercheurs vont ici plus loin en mettant de l'avant une théorisation de ces connaissances mathématiques pour l'enseignement reprenant différentes composantes (*Common Content Knowledge, Horizon Content Knowledge, Knowledge of Students and Learning*, etc. ; voir le texte de L. Theis dans ce recueil) et ciblant notamment l'importance de la notion dans ce cas de « mathématiques décompressées » soulignée précédemment. Cette catégorisation fine s'éloigne cependant pour nous (Bednarz et Proulx, 2011a) du travail mathématique de l'enseignant dont elles cherchent à rendre compte et de l'idée première des auteurs qui reconnaissaient le caractère fondamentalement imbriqué de ces différentes dimensions. En voulant raffiner le modèle et les différentes composantes sur un plan analytique, cette catégorisation fait en effet perdre de vue que le tout est plus que la somme de ses parties, ou même différent. Ces dimensions ne sont jamais « purement mathématiques », mais prennent un sens en lien avec d'autres aspects interreliés qui s'influencent l'un l'autre (Bednarz et Proulx, 2009 ; Huillet, 2009 ; Margolinas *et al.*, 2005). Ainsi, l'observation de l'activité des élèves et l'action didactique de l'enseignant sont partie prenante d'un projet didactique local (une certaine finalité associée par exemple à une activité ou à une leçon), mais aussi d'un projet didactique global (la place de cette leçon dans une progression) influencés tous deux par des valeurs et des conceptions sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, alors que cette observation se nourrit en retour de ses différents aspects interreliés (Margolinas *et al.*, 2005). Des connaissances mathématiques et didactiques imbriquées sont aussi mises en évidence par Huillet (2009) à travers les organisations mathématiques (concept emprunté à Chevallard, 1992) développées par l'enseignant dans la construction de sa leçon (par exemple, un répertoire de différentes tâches utilisant différentes représentations et une habileté à passer d'une représentation à une autre, à utiliser différentes « technologies » pour résoudre ce type de tâches, à justifier « les techniques » en lien avec l'âge des élèves et leurs connaissances préalables ; les relations à d'autres organisations mathématiques et les applications dans les mathématiques, dans la vie courante et dans d'autres disciplines). On retrouve ici des idées importantes renvoyant aux représentations possibles, aux analogies puissantes, aux illustrations, aux exemples, aux explications, aux démonstrations, etc., en un mot aux façons de représenter et de formuler le sujet pour le rendre compréhensible aux autres (PCK de Shulman, 1986, 1987), mais aussi de ce qu'il nomme les «*substantive and syntactic structures of the subject matter*» (comprendre ce qu'est le contenu, mais aussi sa rationalité et les raisons pour lesquelles telles façons de faire sont vraies ou fausses, valides ou non, établies ou non).

D'autres caractéristiques de ces « mathématiques au travail » ressortent de nos propres travaux de recherche, à travers le rôle clé du contexte d'enseignement-apprentissage qui apparaît comme une ressource structurante agissante dans les conceptualisations mathématiques développées (Bednarz et Proulx, 2010a), la mise en évidence chez les enseignants d'un processus d'abstraction (situé autour de concepts mathématiques) qui vient remettre en question le processus d'abstraction tel qu'on le considère traditionnellement en mathématiques, le rôle des artefacts dans ces mathématiques au travail, enracinés dans des routines professionnelles, ou encore une fragmentation de la structure de la connaissance en milieu de travail (d'un niveau à l'autre, d'un ordre à l'autre, etc.) qui façonne les mathématiques en usage (voir à ce sujet Bednarz et Proulx, 2011a, b).

Ces différentes recherches, pour la plupart émergentes, éclairent en retour des composantes importantes à prendre en compte dans la formation des enseignants : des formes de connaissances à développer telles l'étude de cas, les connaissances stratégiques, les connaissances en acte, la capacité à intervenir sur le moment ; l'aspect imbriqué de ces connaissances, l'ancrage de ces connaissances en contexte d'enseignement/apprentissage ; le rôle des artefacts ; le travail de défragmentation et de décompression des concepts ; le développement d'abstractions situées ; l'entrée par les tâches professionnelles et l'activité de l'enseignant, etc.

5. Conclusion

Je me suis attardée à montrer, dans un premier temps, l'univers des possibles que recouvre la formation mathématique des enseignants au primaire et au secondaire. J'ai fait cela en soulignant par ailleurs que cette formation mathématique ne se limite pas aux cours dits de mathématiques, mais qu'elle inclut aussi dans cet univers de possibles ce qui se fait dans les cours de didactique, voire dans les stages pratiques et la réflexion sur ces expériences de stage. J'ai par la suite interrogé les articulations entre ces différents lieux de formation et les expériences mathématiques sollicitées dans cette formation et dans la pratique professionnelle de l'enseignant. Les différentes études et recherches reprises tout au long de ce texte mettent en évidence différentes discontinuités entre les expériences mathématiques vécues par les futurs enseignants dans ces différents lieux de formation et le passage d'une fréquentation « estudiantine » des mathématiques à une fréquentation « professionnelle » des mathématiques par les enseignants. Ces différentes discontinuités remettent en question en retour cette formation et ouvrent sur la nécessité de repenser ces activités de formation.

Plusieurs pistes sont ici possibles qu'il faut cependant documenter sur le plan de la recherche pour continuer à avancer sur cette question ; on ne peut rester ici dans le domaine de l'opinion. Des avancées en ce sens sont en cours, par exemple dans le développement de cours en formation initiale visant chez les futurs enseignants le développement de connaissances mathématiques orientées vers l'enseignement (Huillet, 2009), dans le développement de dispositifs de formation continue (primaire et secondaire) visant une exploration des mathématiques au travail ancrées en contexte d'enseignement (Bednarz et Proulx, 2010b) ou encore dans la mise en place d'une réflexion avec des enseignants de différents niveaux sur les concepts enseignés contribuant à une défragmentation de cet enseignement (Davis et Simmt, 2006). Les pratiques développées actuellement dans le cadre de la formation initiale (cours spécifiques de didactique et cours de mathématiques avancées développés dans un souci d'articulation) nécessitent aussi des recherches pour mieux comprendre ces pratiques elles-mêmes et leur apport. Le travail en cours de Sierpinska (2011), axé sur les cours de didactique à la formation des maîtres au primaire, constitue une amorce en ce sens.

SECTION 1

- **Texte plénier 1**

  Point de vue sur la formation mathématique
  des futurs enseignants de mathématiques
  au secondaire

  André Boileau

- **Réaction 1 au texte d'André Boileau**

  Quatre points autour de la formation mathématique
  des enseignants de mathématiques au secondaire

  Alejandro S. González-Martín

- **Réaction 2 au texte d'André Boileau**

  L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur

  Anna Sierpinska

Texte plénier 1

Point de vue sur la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire

André Boileau
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
boileau.andre@uqam.ca

1. Introduction

Les organisateurs de ce colloque m'ont demandé de discuter des cours de mathématiques adaptés aux futurs enseignants de mathématiques dispensés à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), en expliquant les fondements et les justifications derrière les choix faits et les orientations prises dans ces cours, et en illustrant tout cela par le cours « Structures numériques », que j'ai redéfini dans les années 1980. Je vais donc commencer par tenter de répondre aux questions qui m'ont été posées dans le cadre restreint de ce cours, ce qui aura l'avantage de rendre le tout plus concret, puis j'étendrai par la suite la discussion à la formation mathématique des enseignants dans un contexte plus général.

2. Genèse du cours « Structures numériques »

Quand je suis arrivé à l'UQAM en 1977, la formation des maîtres en mathématiques au secondaire était sous la responsabilité de la Famille des sciences, et le cours « Structures numériques » faisait partie des cours obligatoires du baccalauréat en enseignement des mathématiques. La description de ce cours se lisait comme suit :

> Construction des nombres naturels, des nombres entiers relatifs, des nombres rationnels, réels et complexes. Chaque construction est accompagnée de cheminements mathématiques parallèles ainsi que des aspects mathématiques complémentaires. Problèmes mathématiques et pédagogiques relatifs à ces nombres.
>
> Préalables : Algèbre I et Algèbre linéaire I. (Annuaire UQAM, 1977-1978.)

On retrouve dans cette description des traces de la période des « mathématiques modernes », où l'on voulait réformer l'enseignement des mathématiques en le rendant plus actuel, utilisant les ensembles comme concept unificateur et les transformations pour ouvrir sur d'autres géométries, le tout accompagné d'une augmentation significative du degré d'abstraction.

Une façon d'interpréter le plan de cours ci-dessus est de définir les nombres naturels comme des ensembles particuliers (les ordinaux finis – voir la figure 1 ci-contre), les entiers relatifs comme des classes d'équivalence de couples de naturels, les rationnels comme des classes d'équivalence de couples d'entiers relatifs, les réels comme des coupures de Dedekind, et les complexes comme des couples de réels. Tout cela peut être très satisfaisant pour un apprenti mathématicien à qui on veut montrer que tous les objets mathématiques peuvent être définis à partir du concept d'ensemble. Mais cela semble d'une utilité douteuse pour un futur enseignant de mathématiques qui, très souvent, ne sait pas expliquer pourquoi un nombre comme $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel, ni pourquoi les fractions et les nombres décimaux périodiques décrivent les mêmes objets mathématiques, et se demande peut-être encore si $0{,}\overline{9}$ ne serait pas, ultimement, *un tout petit peu plus petit* que 1.

Pourtant, la personne qui avait écrit cette courte description pensait que c'était là un cours approprié pour les futurs enseignants, comme la référence aux « Problèmes… pédagogiques » semble l'indiquer. De mon point de vue, ce cours n'était pas (et n'est toujours pas) acceptable pour nos futurs enseignants québécois. Cette divergence de points de vue illustre bien qu'on ne doit pas s'attendre à ce que les questions relatives à la formation mathématique des enseignants reçoivent toujours des réponses acceptées par tous[1].

1. Soulignons en passant qu'il y a des cas où plusieurs approches viables et intéressantes sont disponibles (voir par exemple Henderson, 1973) : il faut alors faire des choix, et les critères utilisés semblent souvent subjectifs.

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{0\}$$
$$2 = \{0,1\}$$
$$3 = \{0,1,2\}$$
$$4 = \{0,1,2,3\}$$
—
$$n+1 = n \cup \{n\}, \text{ pour } n \geq 0$$

FIGURE 1
LES NOMBRES NATURELS VUS COMME DES ENSEMBLES PARTICULIERS

Mais alors, sur quelles bases décider des changements à apporter à ce cours ? Il fallait tout d'abord que les activités proposées soient mathématiquement pertinentes et enrichissantes pour les étudiants visés. Mais j'ai vite décidé de ne pas me baser de façon trop serrée sur les programmes ministériels (qui connaîtront plusieurs versions différentes pendant la carrière d'un enseignant donné), ni sur les manuels scolaires (qui comportent souvent des faiblesses mathématiques importantes[2]). Je connaissais la démarche de Klein (1932a, 1932b), et l'idée d'approfondir des concepts déjà familiers me semblait prometteuse, même si l'approche utilisée par Klein me semblait trop formelle pour nos étudiants.

En lisant des travaux comme celui de Glaeser (1981), j'ai été tenté d'utiliser l'histoire comme fil conducteur pour réexaminer d'un œil neuf certains concepts mathématiques essentiels pour un enseignant du secondaire : une adaptation de « l'ontogenèse récapitule la phylogenèse », en quelque sorte. Mais j'ai abandonné cette voie quand je me suis rendu compte que l'utilisation systématique de l'histoire introduisait des complexités auxquelles je ne voulais pas soumettre mes étudiants. J'ai cependant continué de faire appel à l'histoire, mais de façon plus marginale[3].

2. Voir par exemple Boileau et Garançon (1998).
3. Une anecdote à ce sujet : après avoir présenté à la classe le documentaire de la BBC *Fermat's Last Theorem* par Simon Singh, j'ai eu la surprise d'entendre un étudiant s'étonner en constatant qu'on créait encore de nouvelles mathématiques de nos jours.

Quand j'ai découvert les travaux de Lebesgue (1975), publiés originellement dans la revue *L'enseignement mathématique* de 1931 à 1935, j'ai été séduit par son approche épistémologique de la construction des nombres réels. Plus tard, en lisant Lemay (1978), j'ai retrouvé une approche semblable[4], mais visant plus particulièrement de futurs enseignants du primaire.

Ce type d'approche, qu'on peut qualifier de « genèse virtuelle », désigne une démarche simplifiée qu'aurait pu emprunter l'histoire si certaines hésitations ou complications n'avaient pas eu lieu, ou si certaines circonstances avaient été différentes. Par exemple, comment la géométrie aurait-elle pu se développer si les Grecs n'avaient pas eu ces réticences face aux incommensurables ? Il y a évidemment plusieurs scénarios possibles, et nous ne recherchons pas celui qui aurait la plus grande vraisemblance historique : le scénario retenu sera celui qui présente le plus grand intérêt pédagogique.

Avant de passer à une description du cours « Structures numériques », mentionnons que ce ne sont pas tous les concepts qui se prêtent aussi bien à une approche par genèse virtuelle : les nombres sont des concepts dont le niveau d'abstraction est relativement faible (par rapport aux autres concepts mathématiques). J'y reviens plus loin.

3. Description du cours « Structures numériques »

Le fil conducteur du cours est la création des nombres par l'humanité. Comme je l'ai mentionné précédemment, je ne vise pas à suivre une démarche historiquement correcte, bien que je fasse occasionnellement référence à des faits historiques. Je veux retracer les besoins qui auraient pu être (et ont effectivement été, dans plusieurs cas) à l'origine de l'invention des nombres : le dénombrement, la mesure et le repérage.

3.1. Dénombrements et nombres naturels

Le dénombrement d'une collection d'objets donne lieu à plusieurs représentations des nombres naturels : des tas de cailloux, des entailles sur un morceau de bois, diverses écritures (babylonienne, égyptienne, romaine,

4. Mentionnons au passage que Rouche (1992) utilise, lui aussi, une approche du même type.

indo-arabe, etc.) et blocs multibases (celle que nous avons choisi de privilégier). Ces représentations reposent sur diverses stratégies de dénombrement : correspondances biunivoques, regroupements simples, regroupements d'ordre supérieur, écriture positionnelle.

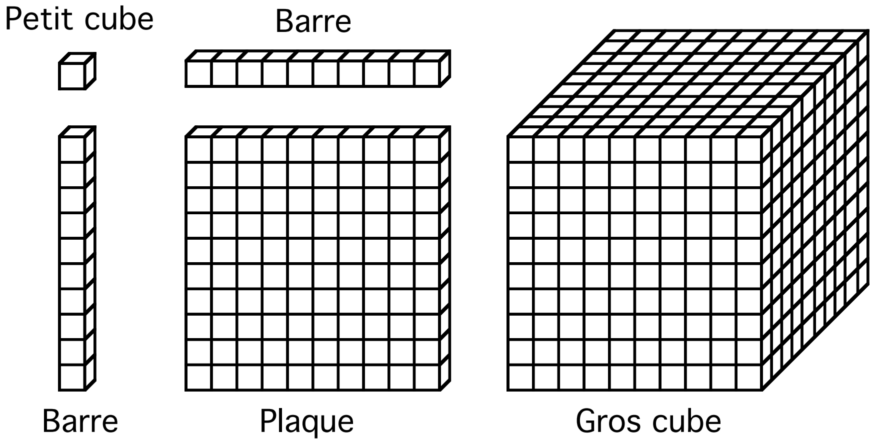


FIGURE 2
DES BLOCS MULTIBASES, BASE DIX

Les opérations sur ces nombres naturels (addition, soustraction quand c'est possible, multiplication, division euclidienne) sont décrites en termes de dénombrement. Par exemple, la multiplication correspond au dénombrement de « configurations rectangulaires », ou encore au changement d'unité de dénombrement. Les propriétés habituelles de ces opérations (commutativité, associativité, distributivité, etc.) sont déduites[5] d'un principe général inspiré des travaux de Jean Piaget, la *conservation du nombre*, pouvant être formulé ainsi : le résultat d'un dénombrement ne dépend pas de la nature des objets dénombrés, de la disposition de ces objets, ni de l'ordre dans lequel a été effectué ce dénombrement.

5. Je ne prétends pas ici avoir inventé cette démarche. Elle fait partie du « folklore mathématique », et on en trouve des traces dans plusieurs ouvrages, dont celui de Courant et Robbins (1969).

Une fois les propriétés habituelles établies dans le cours, nous pouvons procéder de façon plus traditionnelle et étudier diverses propriétés des entiers naturels, comme les critères de divisibilité, l'algorithme d'Euclide, les notions de PGCD et PPCM, la factorisation première, mentionnant au passage la cryptographie à clé publique (sans aller dans les détails).

J'insiste fermement sur le rôle attribué à la démonstration dans la démarche : son but est autant de faire comprendre que de nous rendre certains de la véracité d'un énoncé. J'essaie aussi de chasser l'impression de certains étudiants selon laquelle les démonstrations mathématiquement correctes doivent être formelles et symboliques.

Voici une illustration de ce dernier point par un exemple : le critère de divisibilité par trois, à la base dix. La plupart des étudiants savent déjà qu'un nombre est divisible par trois si (et seulement si) la somme de ses chiffres est divisible par trois, mais très rares sont ceux qui peuvent justifier cette affirmation. Traditionnellement, cette étude se fait à un niveau purement symbolique, en utilisant des arguments semblables à celui esquissé ci-dessous :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \, 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \, 1^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{modulo } 3$$

Il peut être pertinent de comparer cette démarche de démonstration à une autre, plus intuitive mais moins compacte, qui repose sur un partage de blocs multibases (comme ceux illustrés à la figure 2) en trois parts égales : on constate que le nombre total de blocs correspond à la somme des chiffres du nombre représenté et que, lorsque le partage se fait bloc par bloc, chaque bloc laisse un reste d'un petit cube. C'est donc une façon alternative d'exprimer ce qui est décrit par la formule ci-dessus. Mais le plus intéressant est sans contredit les discussions subséquentes, où l'on s'interroge sur ce qui constitue une démonstration acceptable en mathématiques…

3.2. Mesures et nombres décimaux, rationnels et réels positifs

Après avoir compté, l'homme a voulu mesurer. Mais, contrairement à ce qui se passe pour le dénombrement, la mesure dépend de la grandeur mesurée : on ne procède pas de la même façon pour mesurer une longueur, une aire, un volume, un angle, une masse, une durée, etc. Dans le cours « Structures numériques », nous nous limitons à la mesure des longueurs, tout en soulignant que les nombres ainsi dégagés (les réels positifs) pourront tout aussi bien servir à la mesure des autres grandeurs mentionnées.

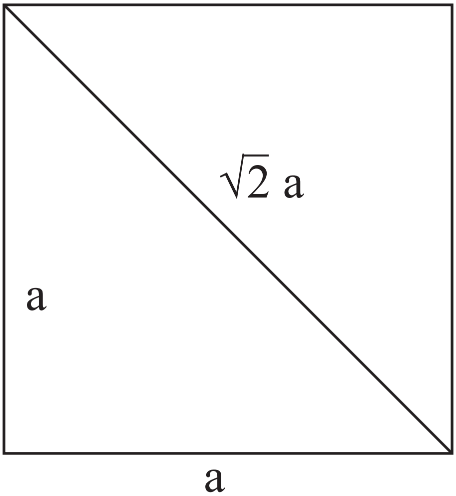


FIGURE 3
LA DIAGONALE D'UN CARRÉ

Une autre différence entre mesure et dénombrement est que nous voulons mesurer des objets mathématiques idéalisés[6], les segments, et non des objets concrets. Si nous nous limitions à mesurer des objets concrets, alors les nombres décimaux seraient tout à fait suffisants, et nous n'aurions même pas besoin de créer les nombres rationnels et réels. Mais en même temps, nous serions condamnés à une démarche continuellement expérimentale, ou encore à des théories boiteuses et affreusement compliquées : en effet, comment décrire la mesure de la diagonale d'un carré si nous ne disposons pas des nombres irrationnels (voir la figure 3) ? Discussion intéressante où on finit par dire que, parfois, il n'y a rien de plus pratique qu'une bonne théorie !

6. Nous supposons notamment que nous pouvons subdiviser un segment en un nombre quelconque (arbitrairement grand) de parties congrues, ce qui exclut automatiquement tout objet constitué d'un nombre fini d'atomes.

Avant de décrire différentes stratégies de mesure, une arithmétique des segments est décrite : nous pouvons additionner des segments (en les mettant bout à bout) et les soustraire, ainsi que multiplier (addition répétée) et diviser (en parties congrues) un segment par un nombre naturel. Ici encore, nos discussions se basent sur un grand principe, celui de la *conservation des longueurs*, selon lequel la longueur d'un segment obtenu en mettant bout à bout d'autres segments ne dépend que des longueurs des segments constituants, et est donc indépendante du lieu où l'assemblage a été fait, et de la disposition spatiale relative des divers segments constituants. Il est alors possible d'établir les propriétés « usuelles », puis de procéder de façon plus traditionnelle à partir de celles-ci.

Plusieurs façons de mesurer sont ensuite définies, qui s'avéreront toutes incomplètes à l'exception de la dernière : mesures entière, rationnelle, décimale et réelle. Dans chaque cas, les nombres associés peuvent être vus comme des comptes rendus d'opérations de mesure. L'étude des propriétés des diverses mesures, et des nombres qui leur sont associés, est une entreprise trop longue pour être poursuivie de façon détaillée dans un seul cours, étant donnée l'expérience mathématique antérieure des étudiants. Mais, chemin faisant, nous explorons plusieurs phénomènes déjà connus mais souvent mal expliqués :

- des égalités comme $0,\overline{9} = 1$ reflètent simplement le fait que, dans les cas où la mesure décimale (finie) existe, la mesure réelle d'un segment peut se faire de deux façons différentes ;
- l'axiome d'Archimède est précisément la condition permettant de dire qu'on peut associer une mesure à tout segment. L'axiome de complétude est précisément la condition permettant de dire que tout nombre à virgule illimité peut être obtenu comme mesure d'un segment ;
- on peut représenter les divers nombres obtenus par des opérations de mesure comme des points sur une demi-droite (« l'axe des x positifs »), et les diverses opérations sur ces nombres peuvent se représenter par des constructions géométriques simples, qui peuvent se visualiser interactivement à l'aide de logiciels de géométrie dynamique.

3.3. Position et nombres négatifs et complexes

Quand nous voulons situer précisément un point par rapport à un autre, la simple distance est insuffisante : il nous faut faire appel à la notion de vecteur. Si nous nous limitons à une dimension (tous les vecteurs sont parallèles), alors la situation ressemble beaucoup aux segments et à la mesure, et le tout revient à ajouter les nombres négatifs. Mais dès que nous passons à deux dimensions (ou plus !), la situation se complexifie : nos « nombres » cessent d'être ordonnés, et nous ne pouvons définir une multiplication avec les propriétés usuelles qu'en dimension deux (dans le plan) : on obtient alors les nombres complexes.

On arrive ici à la frontière entre l'arithmétique et l'algèbre. L'étude des vecteurs se poursuivra dans le cours « Algèbre linéaire et géométrie vectorielle », tandis qu'on poursuivra l'étude des nombres dans le cours « Théorie des équations ». Une dernière remarque : cette suite de cours veut contribuer à compléter la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire, mais elle se limite à approfondir des concepts qui sont au programme au secondaire et au collégial. Il me paraît dommage de ne pas pouvoir leur offrir (faute de temps) un aperçu significatif de mathématiques plus avancées. Il en est de même dans les autres domaines où on les forme : géométrie, analyse, probabilités et statistiques, histoire des mathématiques.

4. Discussion autour du cours « Structures numériques »

4.1. Motivation des étudiants

Quand je me suis attelé à la refonte du cours « Structures numériques », je me suis demandé comment convaincre des personnes qui pensent bien connaître les divers systèmes de nombres de se remettre à les étudier. J'ai eu l'idée de les soumettre à une mise en scène où je les amènerais à douter d'une de leurs connaissances fondamentales : la commutativité de la multiplication des nombres naturels.

J'ai donc inventé de toutes pièces une nouvelle selon laquelle un nouvel ordinateur, travaillant sur des nombres « tellement grands qu'ils dépassent l'imagination », avait trouvé deux nombres naturels a et b et vérifié que $a \times b$ et $b \times a$ ne donnaient pas le même résultat. Je continuais en rapportant qu'il y avait des personnes qui doutaient de ce résultat, tandis que d'autres l'acceptaient volontiers. Puis je demandais à mes étudiants de se prononcer.

Comme je m'en doutais, très peu de personnes ont pu donner un argument vraiment convaincant pour écarter la possibilité d'une telle découverte. Mais, à ma grande surprise, certains futurs enseignants ont eu des réactions pour le moins surprenantes : « ce n'est qu'une exception qui confirme la règle », « on peut cacher cette découverte aux élèves et continuer à enseigner que c'est commutatif, car les nombres en présence sont très grands et on ne les rencontrera jamais dans la vie courante », « peut-être que les lois changent quand les nombres deviennent très grands », etc. (pour plus de détails, le lecteur pourra consulter Boileau, 2001).

Les discussions qui en ont découlé ont été fort intéressantes et source d'une grande motivation. Mais je ne pouvais répéter cette expérience chaque année, car l'information se transmettait entre les cohortes d'étudiants et l'effet de surprise était perdu. J'ai donc remplacé cette activité par un *atelier de départ*, où je rappelais plusieurs faits apparemment anodins sur les nombres en demandant d'expliquer *pourquoi* ils étaient vérifiés, par exemple :

- Est-ce que $+\infty$ et $-\infty$ sont des nombres ? Pourquoi, ou pourquoi pas ?
- Pourquoi la multiplication de deux nombres *négatifs* donne-t-elle un nombre *positif* ?
- Pourquoi étudie-t-on des nombres qui ressemblent à « 3,1415926535… » mais pas d'autres « nombres » qui pourraient ressembler à « …5356295141,3 » ?

Avec le temps, je me suis rendu compte qu'il valait mieux intégrer de telles questions tout au long du cours.

Bien entendu, de telles « questions-chocs » ne sont pas les seuls moyens utilisés pour motiver les étudiants. Certains moyens ne sont pas particuliers au cours « Structures numériques » : par exemple, indiquer qu'un sujet est au programme d'étude au secondaire, ou encore montrer qu'il est présent dans un ou plusieurs manuels scolaires, avant d'entreprendre son étude.

Cependant, dans le cas du cours « Structures numériques », on peut souvent prendre avantage du fait que les connaissances des étudiants sont essentiellement rattachées à la base dix, et proposer d'utiliser d'autres bases pour les aider à prendre du recul, par exemple :

- pour expliquer le fonctionnement de l'algorithme d'addition ou de multiplication d'entiers naturels (les automatismes sont omniprésents en base dix seulement) ;
- pour entrevoir l'existence de nombres à virgules à d'autres bases (on peut subdiviser l'unité de mesure en un nombre de parties congrues différent de dix), mais aussi l'équivalence avec les nombres réels base dix tels que nous les connaissons.

4.2. Nombres et technologies

Le recours à des moyens auxiliaires n'est pas nouveau : on se rappelle le temps pas si lointain où l'on apprenait à se servir des tables mathématiques et des règles à calcul ; et, déjà dans Klein (1932a), on évoque certaines machines à calculer mécaniques. Mais le phénomène a pris beaucoup d'ampleur depuis : ne dit-on pas maintenant que nous vivons dans un monde numérique ?

Il y a quelques années, on analysait encore, dans le cours « Structures numériques », l'effet des diverses représentations informatiques des nombres dans les calculatrices et les ordinateurs : base de représentation (généralement dix pour les calculatrices et deux pour les ordinateurs) et représentation en virgule flottante, imprécisions dans les calculs et leur accumulation, etc. Par exemple, on constatait des phénomènes numériques étranges sur nos calculatrices (voir la figure 4) et on devait tenter de les expliquer.

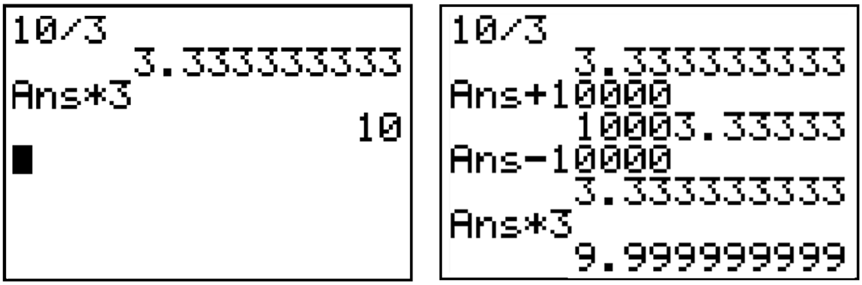


FIGURE 4

À gauche, on divise 10 par 3, puis on multiplie immédiatement le résultat par 3. À droite, on additionne puis on soustrait 10 000 avant de multiplier par 3. Pourquoi cette différence dans les résultats obtenus ?

Mais, depuis l'apparition du cours « Progiciels dans l'enseignement des mathématiques I », cette étude se fait plutôt dans ce cours technologique (voir Boileau et Garançon, 2009).

Soulignons cependant que le cours « Structures numériques » est source d'une grande variété d'algorithmes, dont certains seront éventuellement repris dans le cours « Progiciels dans l'enseignement des mathématiques II ». Qu'on pense simplement à :

- des algorithmes de conversion entre deux bases ;
- l'algorithme d'Euclide, pour calculer le PGCD (et le PPCM) de deux entiers naturels ;
- des algorithmes pour déterminer si un nombre est premier ou pas ;
- des algorithmes pour déterminer la factorisation première d'un nombre.

Je souligne ici le pluriel employé pour désigner certains types d'algorithmes. Il est intéressant pour les étudiants, qui se demandent souvent « à quoi servent les mathématiques », de noter que les mathématiques peuvent contribuer fortement à l'amélioration d'algorithmes. Ainsi, pour déterminer si un nombre n est premier, il peut sembler nécessaire d'examiner chacun des naturels entre 2 et $n - 1$ pour vérifier si oui ou non ce nombre a des diviseurs non triviaux. Mais on peut améliorer considérablement les performances de l'algorithme si on se convainc (à l'aide d'un raisonnement mathématique très simple) qu'il suffit de tester les naturels entre 2 et $\sqrt{n}$. Et si on fait entrer en jeu des mathématiques plus sophistiquées, les améliorations obtenues sont encore plus considérables (voir Delahaye, 2000). Cette question de vitesse a son importance, car les nombres premiers jouent un rôle crucial dans la cryptographie à clé publique, qui permet notamment un échange sécuritaire d'informations sur le Web.

4.3. Versions alternatives du cours « Structures numériques »

Au fil des ans, plusieurs collègues et chargés de cours ont donné le cours « Structures numériques ». Certains ont conservé la forme que je lui avais donnée, tandis que d'autres l'ont modifié en profondeur. Je me rappelle notamment l'un d'eux me racontant qu'il avait utilisé les suites de Cauchy plutôt que la mesure pour l'étude des nombres réels.

Il est indéniable que l'approche par les suites de Cauchy est *techniquement* plus simple, mais est-ce *épistémologiquement* plus simple ? En d'autres mots, laquelle des deux approches précédentes jette le plus de lumière sur les origines (historiques ou reconstruites) des nombres réels positifs ? Alors qu'il semble naturel de vouloir mesurer tous les segments[7], on peut se demander pourquoi toutes les suites de Cauchy devraient converger. Et la définition d'un nombre réel comme une classe d'équivalence de suites de Cauchy en fait un objet conceptuellement beaucoup plus complexe qu'un nombre à virgule illimité.

Quoi qu'il en soit, cela illustre une fois de plus qu'il semble utopique d'atteindre l'unanimité à propos des contenus et des méthodes pour former mathématiquement les futurs enseignants. Peut-être vaut-il mieux se dire que la diversité des points de vue est une richesse dans la formation des étudiants maîtres…

7. Pour s'en convaincre, on peut rappeler l'émoi causé par la découverte de sous-ensembles non mesurables de la droite, du plan et de l'espace. On sait maintenant que, si on abandonne la propriété d'additivité dénombrable des mesures, il existe des mesures définies pour *tous* les sous-ensembles de la droite et du plan, mais ce n'est pas le cas pour l'espace, ainsi que le démontre le paradoxe de Banach-Tarski (voir Wagon, 1994).

5. Discussion générale autour des cours de mathématiques pour futurs enseignants

Le cours « Structures numériques » me semble constituer un élément singulier dans l'ensemble des cours de mathématiques destinés aux futurs enseignants en mathématiques au secondaire inscrits à l'UQAM. En effet, l'approche de genèse virtuelle, qui lui convient si bien, semble moins bien adaptée aux autres cours, peut-être parce que les nombres (et aussi la géométrie synthétique) sont apparus très tôt dans l'histoire de l'humanité. Par comparaison, l'algèbre et *a fortiori* l'analyse sont apparues beaucoup plus tard, et en réponse à des problèmes plus sophistiqués.

Il faut aussi souligner que, même dans le cours « Structures numériques », nous faisons grand usage de l'argumentation et de la déduction, sans pour autant chercher à proposer une genèse virtuelle de ce type de démarche intellectuelle.

5.1. Choix des contenus et des méthodes à enseigner

Prenons donc un peu de recul et demandons-nous d'abord, dans un contexte plus général, comment choisir les contenus mathématiques devant être enseignés aux futurs enseignants dans cette discipline, à l'ordre secondaire. *A priori*, on doit tenir compte de la formation mathématique antérieure de nos étudiants et des programmes ministériels, ainsi que des diverses collections de manuels qui les mettent en œuvre. Mais ce dernier critère s'avère peu stable dans le temps, alors que nous devons préparer des personnes qui devront enseigner les mathématiques sur une période de quelques décennies. Pour ne citer qu'un exemple, les contenus de la portion géométrique des mathématiques enseignées au secondaire ont fluctué considérablement au fil des années (voir Boileau et Garançon, 1993). On doit donc s'inspirer de ces données, sans que ce soit normatif…

On vient d'évoquer le point de départ, mais qu'en est-il du point d'arrivée ? Voulons-nous des enseignants maîtrisant parfaitement les contenus de niveau secondaire mais pas beaucoup plus, ou au contraire désirons-nous former des enseignants ayant une vision et une maîtrise beaucoup plus vastes des mathématiques ? Mon expérience avec les étudiants arrivant à l'UQAM me montre clairement qu'il ne faut pas placer la barre trop haut si l'on désire qu'une portion non négligeable des arrivants puisse compléter avec succès leur scolarité, pour contribuer ainsi à fournir à la société québécoise les enseignants dont elle a besoin.

Étayons cette dernière affirmation par quelques remarques sur l'acquisition d'habiletés à prouver et à résoudre des problèmes. À leur arrivée au baccalauréat en enseignement secondaire (BES), plusieurs étudiants éprouvent des difficultés considérables à faire des preuves mais, de plus, ils ne voient pas l'intérêt d'une telle démarche en mathématiques : pour eux, les mathématiques ne sont souvent qu'une suite de connaissances qu'ils ont apprises et qu'ils enseigneront à leurs élèves, mais ils ont vécu peu d'expériences de compréhension profonde de ces connaissances, et il leur apparaît difficile de concevoir comment de nouvelles mathématiques peuvent être créées. À la fin du BES, je ne suis pas certain que tous nos étudiants aient une juste appréciation du rôle de la preuve en mathématiques, mais du moins la plupart d'entre eux ont développé des habiletés à faire des démonstrations élémentaires, et à résoudre des problèmes relatifs aux mathématiques de niveau secondaire. Je suis persuadé que si on leur demandait systématiquement d'aller plus loin, par exemple de faire des démonstrations formelles en algèbre abstraite ou des raisonnements subtils en analyse réelle, on constaterait alors une proportion non négligeable d'abandons et d'échecs, et cela non pas parce qu'ils sont intellectuellement inférieurs, mais essentiellement pour des raisons de motivation (la pratique de l'enseignement semble les interpeller plus fortement que l'expertise disciplinaire qu'elle présuppose pourtant) et de temps (la formation mathématique n'occupe que 24 crédits sur les 120 que compte le BES).

En fait, ma réponse à cette question des contenus tient en une phrase, qui était la devise de mon école secondaire : *non multa, sed multum* (pas beaucoup, mais bien fait). Je ne cherche même pas à couvrir exhaustivement tout le contenu des programmes du secondaire, ni à envisager systématiquement les prolongements présents aux niveaux subséquents. Avec mes étudiants, je veux étudier *en profondeur* les principaux concepts rencontrés au secondaire et quelques-uns de leurs prolongements, en cherchant à les ***rendre autonomes*** pour le cas (fort probable) où ils devraient parfaire leurs connaissances plus tard dans leur carrière. C'est donc ce qui m'a guidé dans tous les cours de mathématiques que j'ai été appelé à donner à des enseignants (en formation initiale ou en exercice), que ce soit en arithmétique, en algèbre, en géométrie ou en analyse.

Cela nous amène à parler des méthodes mathématiques que nous devrons utiliser pour réaliser cette étude *en profondeur*. En mathématiques, toute étude qui se veut non superficielle doit faire jaillir un certain niveau de *compréhension* des phénomènes étudiés. Ce ne sont pas tous nos étudiants qui ont eu la chance de vivre des expériences de compréhension en profondeur en mathématiques. En fait, certains utilisent ce terme à la légère, pour désigner parfois une simple connaissance d'un résultat. Il faut donc leur faire vivre plusieurs expériences où la compréhension d'un phénomène *a priori* mystérieux s'accroît progressivement, jusqu'à procurer une impression de clarté, d'évidence (voir par exemple Boileau, 2009).

Mais comment susciter cette compréhension, surtout à propos de sujets que nos étudiants pensent (à tort) bien connaître ? Commençons par citer une réflexion, attribuée à Georges Pólya :

> Les mathématiques ressemblent à une automobile, l'intuition jouant le rôle de l'accélérateur, et la rigueur celui du frein. Une automobile sans accélérateur est inutile, mais une automobile sans frein est inutilisable.

En ce qui a trait à la rigueur, je n'ai pas trouvé de « voie royale ». Elle est fort peu développée chez la plupart des étudiants qui arrivent à l'UQAM, et sa construction est souvent douloureuse pour ceux-ci. Comme je l'ai déjà mentionné (à propos du critère de divisibilité par trois), j'essaie de montrer qu'elle peut revêtir plusieurs visages, et qu'une bonne discussion en « mots de tous les jours » peut valoir autant sinon plus qu'une « preuve formelle ». Je propose souvent plusieurs justifications d'un même phénomène, en soulignant que, s'il est normal qu'on veuille se satisfaire de son explication préférée, un enseignant doit aussi prendre conscience que l'argumentation favorite d'un élève donné ne coïncidera pas nécessairement avec celle de son enseignant, et que c'est à ce dernier et non au premier de s'adapter.

Quant à l'intuition, on propose parfois de la bâtir par l'exploration d'un ensemble significatif de cas particuliers. Par exemple, au secondaire, lors de l'étude du théorème de Pythagore, on proposera aux élèves de mesurer les longueurs des côtés d'un certain nombre de triangles rectangles et de vérifier numériquement que la relation attendue est bien présente. Encore là, il faut préciser que, tout comme pour la rigueur, il y a de la diversité et des niveaux dans l'intuition. Par exemple, une façon plus riche de développer autrement son intuition à propos du théorème de Pythagore serait de se créer une imagerie mentale qui pourrait prendre la forme d'un casse-tête semblable à celui de la figure 5.

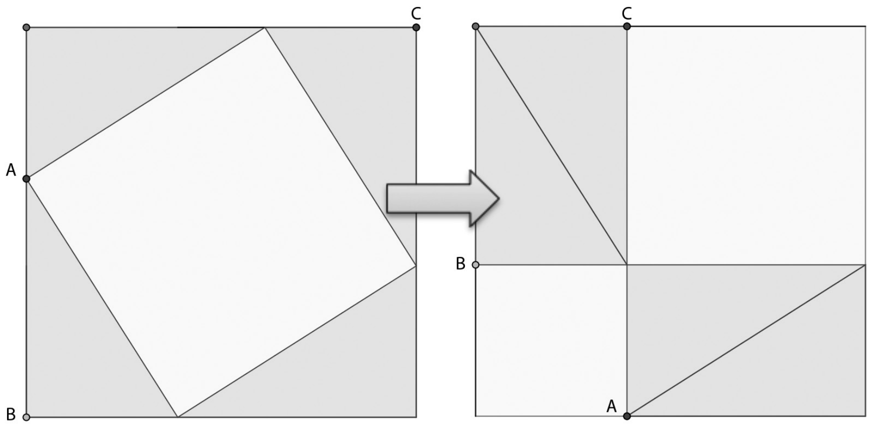


FIGURE 5

En déplaçant trois des quatre triangles dans le grand carré de gauche, on obtient la figure de droite : l'aire du petit carré à gauche est donc égale à la somme des aires des deux petits carrés à droite.

Dans un cas comme dans l'autre, on doit faire appel à une mathématique expérimentale dont le rôle, tout comme la mathématique déductive, doit être précisé. Soulignons qu'un des effets de l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques est de faciliter ce recours à des mathématiques expérimentales, et de proposer des représentations visuelles plus dynamiques et plus variées. J'y reviens plus loin.

5.2. Tâches dévolues à l'enseignant ainsi que celles dévolues aux étudiants

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, ma conversion de mathématicien à didacticien des mathématiques n'a pas beaucoup influencé ma façon de concevoir l'enseignement des mathématiques. Celle-ci repose toujours sur la prémisse que les mathématiques sont une voie d'accès privilégiée à un certain type de connaissances, et qu'il est très riche pour un être humain de se familiariser avec ses méthodes ainsi que ses limitations : la compréhension (intuition *et* rigueur) doit donc être au cœur de son apprentissage. Je crois aussi qu'il n'y a toujours pas de « voie royale pour les mathématiques » et que, pour avancer dans ce domaine, un individu doit être guidé par quelqu'un de plus aguerri, idéalement dans une dynamique de maître-apprenti.

Mais l'enseignement se fait rarement dans un contexte individualisé. À l'UQAM, les cours, souvent donnés à des groupes de plus de 30 étudiants, s'étendent en général sur 15 semaines comportant trois heures de « théorie » et deux heures de « travaux pratiques ». Pendant les périodes « théoriques », j'essaie d'instaurer avec mes étudiants un dialogue visant une découverte guidée de concepts et de méthodes mathématiques. Bien que j'accepte à l'occasion de diverger un peu au gré de suggestions d'étudiants que je juge intéressantes, j'essaie de garder le cap sur les objectifs que je me suis fixés. Les interventions des étudiants me servent donc principalement à déterminer certaines de leurs difficultés et à adapter ma démarche en conséquence. Le lecteur désirant se faire une idée plus concrète de ma façon de faire pourra visionner la démarche (incomplète) d'un maître en la matière (Pólya, 1965) qui, encore aujourd'hui, est une source d'inspiration pour moi.

Pendant les séances de travaux pratiques, je suggère aux étudiants une série d'exercices et de problèmes avec divers objectifs : mettre en pratique les connaissances et les habiletés développées pendant les cours « théoriques », pousser plus loin l'étude de certains concepts, ou même procéder à une exploration de certains thèmes qui seront étudiés en détail plus tard. L'initiative est alors totalement dans le camp des étudiants : je me contente de leur faire certaines suggestions en réponse à leurs questions et, quand une discussion pour tout le groupe surgit, j'essaie de baser mes interventions sur des productions d'étudiants.

Une dernière remarque à propos des travaux pratiques. L'université nous permet d'engager des étudiants plus expérimentés, ayant déjà suivi avec succès le cours en question, pour animer les séances de travaux pratiques. Je n'y ai recours que quand le cours est déjà bien rodé et que j'ai eu l'occasion de tâter le pouls des étudiants en animant moi-même à plusieurs reprises les travaux pratiques en question. Je considère en effet que cette portion du cours, où c’est l’enseignant qui est à l’écoute des démarches des étudiants, est une partie essentielle de notre travail de pédagogue. C’est pour cette raison que j’anime moi-même ou non les séances de travaux pratiques, je transforme parfois des portions des cours « théoriques » en miniséances de travaux pratiques…

Quelques mots en terminant sur le travail en équipe, qu’on a beaucoup mis de l’avant ces dernières années, au point où certains professeurs obligent carrément *tous* leurs élèves à travailler en équipe. En ce qui me concerne, je ne force jamais personne à travailler en équipe : j’essaie même de limiter la taille des équipes lors de travail sur des projets évalués, et ce, pour éviter que certains se greffent à des équipes pour profiter indûment du travail des autres. En fait, quand les étudiants travaillent sur des projets d’envergure, j’ai constaté que les meilleurs projets, ainsi que les pires, sont la plupart du temps créés par des individus, tandis que les équipes produisent les projets intermédiaires… Je ne doute pas que, pour certains individus, le travail d’équipe (librement consenti) peut être une source importante de motivation et de stimulation intellectuelle. Mais je suis aussi fermement convaincu que, dans certaines circonstances, certains individus seront plus productifs et plus heureux s’ils travaillent seuls. En éducation, les solutions « uniformes » ne sont, selon moi, pas de mise.

5.3. Utilisation de la technologie

Au fil des ans, je me suis mis à utiliser la technologie de plus en plus, tant pour mes projets personnels et professionnels que dans le cadre de mes enseignements. Ce n’est pas surprenant, étant donné les liens étroits reliant mathématiques et technologies.

5.3.1. La pensée algorithmique

La pensée algorithmique est omniprésente en mathématiques, que l’on pense à la théorie des nombres (l’algorithme d’Euclide, par exemple), l’analyse numérique (la résolution de systèmes d’équations, linéaires ou non, par exemple), ou la géométrie (on n’a qu’à penser aux constructions avec règle et compas). Le pendant technologique de cela est la programmation, qu’elle s’effectue dans un contexte traditionnel (voir, par exemple, la section 3.2 de

Boileau, 1996) ou moins standard, comme la programmation d'une feuille de calcul dans un tableur, ou la gestion des cas de figure dans un logiciel de géométrie dynamique.

Bien que le recours à la programmation dans l'enseignement des mathématiques soit moins répandu qu'il y a quelques années, comme en témoigne le déclin de l'utilisation des environnements Logo, il serait dommage d'oublier complètement les apports d'une telle activité. Pour n'évoquer qu'un exemple, la démarche consistant à écrire un petit programme visant à déterminer si un nombre naturel est premier ou non apporte un éclairage différent ainsi qu'un enrichissement par rapport aux activités traditionnelles que sont l'énoncé d'une définition et la démonstration de quelques propriétés en découlant. Regardons cet exemple de plus près.

Supposons qu'on veuille écrire un programme pour déterminer si un entier naturel n est premier ou non. Dans un premier temps, on peut chercher à utiliser directement la définition de nombre premier et compter, parmi les entiers de 1 à n, le nombre de diviseurs de n : n sera premier si et seulement si ce nombre de diviseurs est de 2. Mais on est vite déçu par la lenteur du programme en question : par exemple, sur la calculatrice graphique TI-84 Plus, un tel programme met presque 20 secondes pour déterminer que 1021 est un nombre premier.

En y réfléchissant un peu, on peut facilement rendre notre programme plus efficace. Dans un premier temps, on note qu'on peut se limiter à chercher un diviseur parmi les nombres suivants : 2 et les nombres impairs entre 3 et $n - 1$: n sera premier si et seulement si il n'y a pas de diviseur parmi ces nombres. *Grosso modo*, on vient de diviser le nombre de cas à considérer par deux. Mais un moment de réflexion nous montre qu'on peut remplacer la borne $n - 1$ par $\sqrt{n}$: en effet, si l'on suppose que l'on puisse exprimer n comme un produit $a \times b$, alors il est clair que a et b ne peuvent être tous les deux strictement plus grands que $\sqrt{n}$ (puisque, dans ce cas, leur produit serait strictement plus grand que n), et il est donc établi que l'un des facteurs devra être plus petit ou égal à $\sqrt{n}$. Ici, le nombre de cas à considérer est réduit de façon draconienne : *grosso modo* à la moitié de $\sqrt{n}$. Un nouveau programme, écrit en tenant compte de ces nouvelles spécifications, mettra moins d'une seconde pour déterminer que 1021 est un nombre premier. On voit donc qu'un peu de réflexion mathématique peut améliorer considérablement la performance de certains programmes, ce qui peut, dans certains cas, faire la différence entre un programme utile et un programme inutilisable en pratique.

5.3.2. Les représentations informatiques d'objets mathématiques

Nous connaissons tous de nombreux exemples illustrant la richesse de telles représentations, que ce soit les nombres en virgule flottante dans les calculatrices et les tableurs, les graphes de fonctions dans les calculatrices graphiques, les objets géométriques simples (droites, cercles, coniques, lieux) dans les logiciels de géométrie dynamique, les courbes et les surfaces de Bézier dans les logiciels graphiques vectoriels, ou même les représentations spatiales des logiciels de lancer de rayons (*Ray Tracing*).

Nous sommes maintenant habitués au dynamisme présent lors de nos interactions avec ces représentations, mais nous découvrons à peine la liberté de créer des représentations moins usuelles, pouvant servir nos objectifs pédagogiques[8]. Par exemple, dans le cours « Théorie des équations », je me suis vite rendu compte qu'une preuve du théorème fondamental de l'algèbre était hors de portée de nos étudiants, du moins dans le temps que je désirais consacrer à ce sujet. J'ai alors voulu leur faire vivre une expérience « immersive » leur permettant de bâtir une forte intuition non seulement de la véracité du théorème en question, mais aussi d'une démonstration possible. La figure 6 illustre, hélas, de façon statique, le genre de représentation utilisée. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter la page Web associée au présent texte (Boileau, 2011).

8. Le lecteur intéressé à d'autres exemples pourra jeter un coup d'œil aux pages Web suivantes :
   - sur les transformations de Moebius : <http://www.ima.umn.edu/~arnold/moebius/> ;
   - sur la quatrième dimension : <http://www.dimensions-math.org/> ;
   - sur les dallages non périodiques : <http://penrose.dmf.unicatt.it/>.

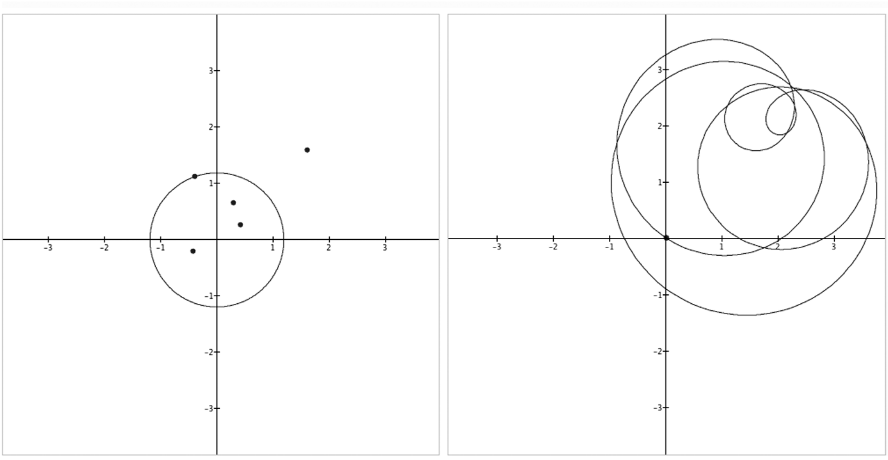


FIGURE 6
REPRÉSENTATION INFORMATIQUE DE L'IMAGE D'UN CERCLE CENTRÉ À L'ORIGINE PAR UN POLYNÔME À COEFFICIENTS COMPLEXES

> Le dynamisme de cette représentation peut aider à construire une intuition pouvant être réinvestie dans une preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

5.3.3. Mathématiques expérimentales

Par ses diverses représentations d'objets mathématiques, la technologie est susceptible de mettre à la disposition des étudiants un laboratoire virtuel où l'on peut expérimenter en mathématiques. Toutefois, il ne faut pas oublier de rappeler à ceux-ci que la technologie n'est pas toujours transparente (reportez-vous à la figure 4), et qu'on doit apprendre à bien interpréter et à bien utiliser toutes ces représentations (voir Boileau et Garançon, 2009). De plus, ce genre de démarche ne peut généralement qu'engendrer une compréhension partielle, en développant des intuitions qu'il reste encore à vérifier rigoureusement (pour un exposé « élémentaire » de cette problématique, voir Boileau, 2009).

Compte tenu de ces *caveats*, il peut être très enrichissant de conduire diverses explorations mathématiques à l'aide de la technologie. On peut ainsi arriver à résoudre avec une précision suffisante certains problèmes (comme le calcul des remboursements hypothécaires) en réduisant le niveau mathématique requis (voir Boileau et Garançon, 2007), mais on peut aussi illustrer de façon spectaculaire que de telles approximations ne sont pas toujours suffisantes, et qu'une solution mathématique exacte est parfois irremplaçable (voir la figure 7 et le site Boileau [2011] pour une démonstration interactive).

5.3.4. Applications des mathématiques

Compte tenu de la variété et de l'omniprésence des applications des mathématiques dans notre monde moderne (cryptage des informations lors de leur échange sur Internet, calculs effectués par les GPS, algorithmes de compression-décompression de contenus audiovisuels, etc.), il est toujours surprenant d'entendre nos étudiants (et leurs élèves) s'enquérir de l'utilité des mathématiques. Il faut aussi savoir interpréter cette question au second degré, comme une indication de leur manque de motivation à étudier le type de mathématiques qu'on leur présente. Mais cela reflète aussi le niveau de complexité élevé de plusieurs applications mathématiques réalistes, qui nous empêche de leur faire une place plus grande dans l'enseignement.

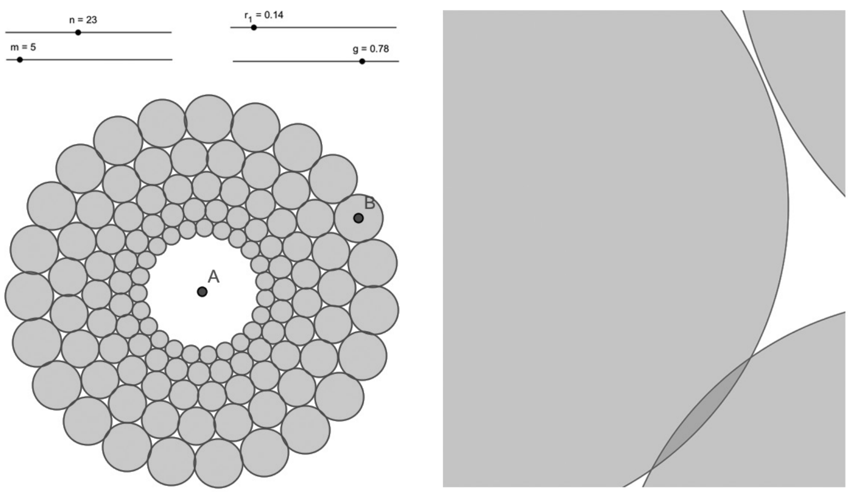


FIGURE 7

À gauche, l'utilisateur a donné des valeurs aux divers paramètres en espérant créer une figure où les cercles seraient tangents. En y regardant de plus près (à droite), il constate qu'il n'a pas réussi.

La source traditionnelle d'applications des mathématiques était la physique élémentaire (par exemple, le mouvement uniforme ou uniformément accéléré). Pour des raisons qui ne sont pas totalement claires à mes yeux, certains de nos étudiants sont peu ouverts à tout ce qui touche de près ou de loin la physique. Cependant, quelques essais très limités me laissent croire que l'utilisation de la technologie, avec ses sondes et ses logiciels de mesure à partir de vidéos, pourrait aider à réduire certaines réticences.

Soulignons que la technologie semble aussi, en elle-même, une source inépuisable d'exercices et de problèmes mathématiques, et que le graphisme informatique se prête particulièrement bien à un traitement assez simple pour être accessible. On peut penser tant à des situations isolées (comme celle illustrée à la figure 5) qu'à des démarches plus globales : je cherche encore à trouver le temps de mettre au point et de donner un cours « Algèbre linéaire et géométrie vectorielle » basé essentiellement sur la problématique de la représentation plane d'objets tridimensionnels (voir Boileau [2006a] et Boileau [2006b] pour quelques pas dans cette direction).

6. Conclusion

Dans ce qui précède, j'ai voulu indiquer quelques pistes pour décrire ma vision de la formation mathématique des futurs enseignants dans cette discipline au secondaire. Mais enseigner est une activité complexe, qui engage l'individu dans sa totalité. Toutes ses expériences (qu'elles soient mathématiques, didactiques, affectives ou autres) peuvent être mises à contribution, et il serait bien présomptueux de prétendre cerner toutes les influences qui sont à l'œuvre.

Complément sur le Web du présent texte : <http://www.math.uqam.ca/~boileau/Formation_Mathematique.html>.

Réaction 1 au texte d'André Boileau

Quatre points autour de la formation mathématique des enseignants de mathématiques au secondaire

Alejandro S. González-Martín
Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation
Université de Montréal
a.gonzalez-martin@umontreal.ca

1. Introduction

L'article d'André Boileau intitulé « Point de vue sur la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire » soulève une question qui me semble fondamentale : celle de la formation mathématique des enseignants de mathématiques au secondaire, et plus particulièrement concernant l'approche que les cours de mathématiques devraient avoir dans une telle formation. Cette question n'est toutefois pas nouvelle (voir Adler *et al.*, 2005), mais il ne semble pas y avoir de consensus entre les différents formateurs d'enseignants de mathématiques quant aux contenus, aux objectifs, ainsi qu'aux approches à privilégier dans les cours de mathématiques pour futurs enseignants (Ball et Bass, 2003 ; Ball, Lubienski et Mewborn, 2001 ; Davis et Simmt, 2006 ; Ingersoll, 1999). J'articule ma réaction autour des quatre points suivants :

- l'épistémologie dominante pour l'enseignement des mathématiques dans la formation des enseignants de mathématiques ;

- les formateurs, c'est-à-dire ceux qui donnent en général les cours de mathématiques dans la formation des enseignants de mathématiques ;
- les mathématiques nécessaires aux futurs enseignants ;
- le besoin d'un cadre théorique autour des connaissances des enseignants de mathématiques.

2. Épistémologie dominante dans la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques

Si nous voulons parler de la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire, il est utile de connaître les bases épistémologiques sur lesquelles une telle formation s'appuie. Dans Giraldo, González-Martín et Santos (2009), nous discutons d'un paradigme, d'une épistémologie, que nous jugeons dominant dans la formation de maîtres, qui s'aligne avec ce que Ball (1988) établit comme trois suppositions tacites dominantes dans les programmes de formation initiale de maîtres aux États-Unis :

1. les contenus appris à l'école sont simples et communément compris ;
2. les futurs enseignants n'ont donc pas besoin de les réapprendre à l'université ;
3. la formation donnée dans les cours de mathématiques de niveau universitaire outille les futurs enseignants avec une compréhension ample et profonde des contenus mathématiques.

Ces suppositions sous-entendent que l'habileté à donner des réponses adéquates à des questions sur des contenus mathématiques avancés prépare les futurs enseignants à enseigner les mathématiques au secondaire. Ces trois suppositions repérées par Ball il y a plus de 20 ans semblent encore présentes dans plusieurs programmes de formation initiale de maîtres de mathématiques au secondaire. L'organisation des cours dans ces programmes de formation est, en général, constituée d'un grand nombre de cours en mathématiques avancées auxquels on « accole » des cours généraux à contenu pédagogique (psychologie, système scolaire, pédagogie générale, sociologie de l'éducation, etc.). Dans ce modèle, peu de relations existent entre les cours à contenus disciplinaires et les cours de pédagogie. De plus, comme on peut le prévoir, les futurs enseignants développent peu de connaissances didactiques au regard des contenus (ou *Pedagogical Content Knowledge* ; voir Shulman, 1986), et ce, même pour ceux ayant le mieux réussi les cours disciplinaires en mathématiques avancées.

Dans ce sens, des travaux de recherche ont déjà montré qu'une maîtrise du contenu disciplinaire (exprimée, par exemple, par de bonnes notes dans les cours de mathématiques avancées) n'assure pas une connaissance suffisante sur le plan didactique (voir Agathocleous, 2011). Certains auteurs ont même affirmé que les cours de mathématiques avancées offerts par des mathématiciens et pour des mathématiciens pourraient ne pas être utiles pour les futurs enseignants et que ceux-ci pourraient même avoir des effets négatifs sur leurs approches pédagogiques (Cooney et Wiegel, 2003).

Il semble alors qu'en général les cours de mathématiques pour futurs enseignants n'assurent pas le développement d'habiletés pour enseigner les mathématiques du secondaire. *Est-ce que la structure des programmes est la seule raison expliquant ce fait ?* Tout comme le fait André Boileau dans son article, on peut se demander si ces cours de mathématiques sont adaptés aux futurs enseignants de mathématiques. Regardons alors le profil des personnes qui donnent ces cours.

3. Qui donne les cours de mathématiques dans la formation des futurs enseignants ?

Généralement, comme je l'ai mentionné précédemment, les cours de mathématiques dans les programmes de formation des futurs enseignants sont des cours donnés par des mathématiciens. Cela pourrait être vu comme un avantage, dans le sens où on peut s'attendre à ce que ces cours donnent une vision profonde des contenus mathématiques à l'étude. Cependant, à mon avis, ce qui joue un rôle décisif dans ce que les futurs enseignants retirent de ces cours est le paradigme d'enseignement. Et il semble que, en général, ces cours de mathématiques avancées sont donnés par des mathématiciens *pour des mathématiciens*. Je m'explique.

Barquero, Bosch et Gascón (2011) ont fait une étude sur les restrictions institutionnelles qui ont une influence sur la diffusion des pratiques de modélisation mathématique dans les systèmes éducatifs actuels. Leur étude se centre sur une analyse de matériel utilisé dans l'enseignement des cours de mathématiques universitaires dans les filières scientifiques (sciences naturelles). Leur travail s'appuie sur l'approche anthropologique de Chevallard (1985) et sur les notions de *transposition didactique* et d'*organisations didactiques*. Ils montrent que dans les universités étudiées, les cours d'analyse pour les filières de sciences naturelles sont souvent donnés par des mathématiciens, et que la structure de ces cours est souvent la même, suivant une *épistémologie dominante* dans l'institution universitaire, définie comme la façon dont l'Université en tant qu'institution, et plus précisément la communauté d'enseignants universitaires (et d'étudiants), considère les mathématiques et leur relation avec les sciences naturelles. Cette *épistémologie dominante* a un effet sur les pratiques d'enseignement, qui en général s'articulent selon le modèle d'un cours offert à des futurs mathématiciens : un enchaînement de définitions, de propriétés et de résultats présentés de façon rigoureuse. Les applications sont vues, si temps il y a, à la fin des sections théoriques. Ce modèle, appelé *applicationnisme*, est défini comme suit :

> D'abord, les outils mathématiques sont construits dans le domaine des mathématiques et après ils sont « appliqués » pour résoudre des questions problématiques d'autres disciplines, mais cette application ne produit aucun changement significatif, ni en mathématiques ni dans les autres disciplines où les questions à étudier apparaissent. L'« applicationnisme » suppose ainsi une séparation stricte entre les mathématiques et les autres disciplines. Par exemple, dans la majorité des cours des universités espagnoles que nous avons examinés, l'étude des dynamiques de population est un sujet localisé dans le secteur des équations différentielles sous l'étiquette d'« application », comme si certaines lois dynamiques pouvaient exister sans aucun outil mathématique pour les décrire et, de la même façon, comme si les équations différentielles pouvaient exister indépendamment de quelque problème extra-mathématique à résoudre (Barquero, Bosch et Gascón, 2011, p. 3, traduction libre).

Mes propres recherches (González-Martín, 2010), réalisées auprès d'un groupe d'enseignants du collégial sur la notion de série numérique, semblent indiquer que ces enseignants ont une vision de la notion de série qui est une image presque identique à la façon dont les séries sont présentées dans les manuels scolaires. On pourrait dire, d'une part, que les séries sont présentées dans les cours en suivant l'organisation didactique proposée dans les manuels et, d'autre part, que la conception des enseignants à propos des séries est identique à ce qu'ils présentent en classe et, par conséquent, est identique à ce que l'on retrouve dans les manuels, c'est-à-dire que, pour ces enseignants, 1) les séries sont un objet avec peu d'applications pratiques, 2) apprendre les séries équivaut à connaître les critères de convergence et 3) les séries sont un outil pour définir les séries de Taylor. On peut s'attendre chez ces enseignants à des pratiques qui suivent leur conception de l'objet mathématique.

Cela pourrait être l'une des raisons pour lesquelles il semble être assez courant que les cours mathématiques offerts dans les universités suivent une structure semblable, indépendamment des étudiants à qui l'on dispensera ces cours. Évidemment, on peut se demander quelle est l'utilité pour un futur biologiste de connaître tous les critères de convergence des séries que doit connaître un futur mathématicien. De la même façon, je pense qu'on doit se demander si le modèle épistémologique et les contenus qui semblent appropriés pour un futur mathématicien doivent être les mêmes pour un futur enseignant de mathématiques du secondaire. *Est-ce qu'un futur enseignant se verra confronté aux mêmes questions qu'un futur mathématicien ?* Ou, à l'inverse, *est-ce qu'un futur mathématicien se verra confronté aux mêmes questions qu'un futur enseignant ?* Si la réponse est non, la formation offerte aux futurs mathématiciens peut difficilement préparer les futurs maîtres à bien exercer leur métier. Cela m'amène à la question suivante : *Quelles mathématiques doivent alors être enseignées aux futurs enseignants ?*

4. Quelles mathématiques pour les futurs enseignants ?

Comme le montre André Boileau dans son article, je suis aussi sensible à la question de la place de la formation mathématique dans un programme de formation d'enseignants de mathématiques. Ma position face à cette question est ferme : les futurs enseignants ont besoin de mathématiques différentes de celles des futurs mathématiciens. Ce point de vue personnel a été développé à travers mes années d'expérience ; il est aussi en conformité avec des études significatives sur cette question (voir Ball et Bass, 2000, 2003 ; Ball *et al.*, 2001 ; Davis et Simmt, 2006).

Par exemple, Davis et Simmt (2006) suggèrent que la connaissance mathématique des enseignants n'est pas une question de « plus » ou de « plus loin », mais une question de qualité. Leurs connaissances doivent favoriser une compréhension des mathématiques dans un sens profond et unificateur, les rendre capables de faire des liens entre les domaines mathématiques et leur permettre d'aider leurs élèves à construire des connaissances mathématiques cohérentes. De plus, les enseignants doivent être capables d'anticiper la façon dont les idées mathématiques changent et émergent, en plus de faire des liens à travers ces changements. Cela a été décrit par Ball et Bass (2003) comme : « un type de connaissances connectées et longitudinalement cohérentes avec les idées mathématiques fondamentales » (p. 4, traduction libre).

Étant donné les difficultés que la littérature souligne chez les enseignants avec des notions mathématiques comme celle de fonction continue (Hitt, 1994), de division de fractions (Hill *et al.*, 2007) ou de nombre irrationnel (Fischbein *et al.*, 1995), il semble que les cours de mathématiques offerts n'aident pas à construire une connaissance comme celle décrite par Davis et Simmt (2006) dans le paragraphe précédent. Peut-être que le problème ne se réduit pas à la seule question des contenus mathématiques à offrir, mais aussi à l'approche et à l'épistémologie de ces contenus. Dans ce sens, le type de regard et de questions que l'on suscite chez les futurs enseignants semble avoir une importance primordiale.

Vergnaud (1991) propose qu'un concept soit défini, entre autres, par l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept. Je pense que cette question est quelquefois absente dans les cours de mathématiques offerts aux futurs enseignants. Ici encore, je soulève la question : *Est-ce que les problèmes rencontrés par les futurs mathématiciens relatifs à un concept mathématique seront les mêmes que ceux auxquels seront confrontés les futurs enseignants ?* Il est nécessaire que les contenus mathématiques soient enseignés avec une approche qui permette aux futurs maîtres de développer la dimension explication/interprétation en plus des dimensions outil et objet généralement travaillées. Les futurs enseignants devront enseigner les mathématiques, et cela nécessite une dimension d'explication ; or si cette dimension n'est pas travaillée dans la formation initiale, il n'y a pas de raison pour que les futurs maîtres la développent.

En plus de revoir l'approche utilisée dans les cours à contenus mathématiques, je soutiens l'approche d'André Boileau selon laquelle il est nécessaire d'ajouter une dimension culturelle, humaine et historique à ces cours. Voici quelques raisons qui me semblent justifier l'inclusion de cette dimension dans les cours de mathématiques :

- les contenus présentés dans les cours de mathématiques sont le produit d'un processus de transposition didactique. Ces contenus sont dépourvus des problématiques qui les ont fait apparaître, des difficultés que les mathématiciens ont éprouvées à leur égard, etc. Une dimension historique aide à replacer ces contenus dans leur contexte initial et à l'intérieur du paysage mathématique, à comprendre les besoins qui ont amené leur apparition et à comprendre comment s'est construit le réseau de concepts mathématiques ;
- un grand nombre d'élèves (et d'enseignants !) réduisent les mathématiques aux mathématiques scolaires[1]. Alors, pour bien transmettre aux élèves ce que sont les mathématiques (y compris leurs contextes historiques et sociaux, les personnes-clés, les besoins et les usages qui les justifient, etc.), une dimension historique s'avère nécessaire ;
- on ne veut plus que les élèves conçoivent les mathématiques comme une discipline insipide consistant à résoudre de longues listes d'exercices. On veut qu'ils voient les mathématiques comme utiles pour la vie et pour résoudre des problèmes, et qu'ils les voient comme une production sociale et culturelle qui évolue. L'histoire peut aider à développer cette vision ;
- certains obstacles dans l'apprentissage des mathématiques sont classés comme « épistémologiques », propres aux notions mêmes.

1. Cet aspect me semble clair dans le texte d'André Boileau, lorsqu'il dit que les étudiants futurs maîtres s'enquièrent de l'utilité des mathématiques. Seront-ils en train de penser que les mathématiques scolaires (probablement, les seules mathématiques qu'ils connaissent) sont « les mathématiques » ?

Une connaissance de l'évolution des mathématiques comme discipline peut aider à mieux comprendre la nature de ces obstacles épistémologiques ;

- certains résultats de recherche indiquent que les capsules historiques captivent les élèves, qui aiment découvrir le visage humain des mathématiques. Un enseignant avec une telle formation peut s'en servir pour motiver ses élèves.

Le débat me semble alors ouvert et je pense que, en tant que communauté de formateurs de futurs enseignants, nous devrions faire progresser notre réflexion sur les contenus mathématiques à enseigner, sur le regard à développer sur ces contenus, ainsi que sur l'inclusion d'une dimension culturelle et historique, et ce débat doit nous mener à développer la meilleure formation possible à offrir à nos futurs enseignants.

Sur cette dernière question, je suis en désaccord avec un des points du texte d'André Boileau. Lorsqu'il dit : « Mon expérience avec les étudiants arrivant à l'Université du Québec à Montréal (UQAM) me montre clairement qu'il ne faut pas placer la barre trop haut si l'on désire qu'une portion non négligeable des arrivants puisse compléter avec succès leur scolarité, pour contribuer ainsi à fournir à la société québécoise les enseignants dont elle a besoin » (p. 70-71), je ne peux pas éviter de me dire : « Je ne crois pas que la société a besoin d'enseignants pour lesquels on a baissé la barre ! » Je pense qu'on doit se mettre d'accord sur le profil, les connaissances et les compétences attendus chez les finissants de nos formations et qu'après on doit étudier les mesures à mettre en place pour aider les plus faibles à atteindre ce niveau attendu. La question qui se pose maintenant est d'établir le niveau attendu pour les finissants, ou du moins, travailler à définir ce niveau.

5. Besoin d'un cadre théorique sur les connaissances des enseignants de mathématiques

Ma principale réserve par rapport à l'article d'André Boileau touche à l'absence de cadre théorique. En effet, l'article présente la conception d'un cours, et il me semble que les choix faits sont justifiés par l'expérience personnelle ou par des ouvrages sur des questions philosophiques et épistémologiques. Je pense que pour aborder ces questions fondamentales sur les connaissances à développer chez les futurs enseignants, ainsi que pour justifier la structure d'un programme de formation, d'autres outils sont nécessaires. Adler *et al.* (2005) donnent un aperçu des travaux réalisés dans la communauté internationale sur la formation des enseignants et montrent l'importance de l'utilisation de cadres théoriques. Une des questions posées est : « Quelle recherche est produite qui puisse contribuer au besoin massif de soutenir l'apprentissage et la formation des enseignants ? Nous étions intéressés à des questions de deux types : *comprendre* comment les enseignants apprennent, à partir de quelles situations et sous quelles conditions ; et *améliorer* les conditions d'apprentissage des enseignants » (p. 363, traduction libre). Le deuxième volet (*améliorer*) découle, à mon avis, du premier (*comprendre*). Or pour développer cette compréhension, je pense que des outils théoriques sont nécessaires. La littérature a déjà produit et offert certains outils théoriques, et je trouve que nos discours et efforts pour offrir la meilleure formation possible doivent être basés sur de tels outils.

6. Considérations finales

La question de la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire est loin d'être résolue. Il y a beaucoup d'éléments intervenant, et j'en ai cité quelques-uns : l'institution, le paradigme d'enseignement, les conceptions sur l'activité mathématique chez les acteurs qui enseignent et forment, les difficultés propres aux notions, les contextes d'apprentissage. Le texte d'André Boileau montre bien les changements qui peuvent s'opérer dans un cours de mathématiques à forte saveur axiomatique, lorsqu'on essaie de prendre en compte les étudiants auxquels s'adresse ce cours, en plus d'adopter une position didactique et épistémologique différente. Parmi les questions à nous poser comme communauté de formateurs, les deux suivantes m'apparaissent importantes :

1. Quels sont les contenus à enseigner aux futurs maîtres ?
2. Quel regard et épistémologie devons-nous développer chez les futurs maîtres par rapport à ces contenus ?

Je crois sincèrement que l'utilisation d'un cadre théorique facilitera notre discussion et nos débats autour de ces questions, nous permettant ainsi d'avancer sur celles-ci.

Réaction 2 au texte d'André Boileau

L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur

Anna Sierpinska
Département de mathématiques et de statistiques
Université Concordia
sierpins@mathstat.concordia.ca

1. La « structure de surface » du texte d'André Boileau

En surface, le texte offre un bref compte rendu d'une longue expérience d'enseignement d'un cours particulier de mathématiques pour futurs enseignants du secondaire. Il nous fait part des choix mathématiques, didactiques et pédagogiques qui ont été faits lors de sa conception et tout au long de son évolution dans le temps (plus de 30 ans déjà !). Sans justifier ses choix d'une manière systématique, en se basant sur une théorie ou une idéologie didactique, l'auteur indique cependant les sources qui l'ont inspiré à prendre un chemin plutôt qu'un autre. Il mentionne aussi quelques idées générales qui ont guidé ses choix, la principale étant, *grosso modo*, que les concepts mathématiques les plus sophistiqués ont leur source dans des activités humaines pratiques telles que le dénombrement, la mesure, le repérage, la recherche des algorithmes permettant d'accomplir des tâches fastidieuses à caractère répétitif, la construction de machines qui remplaceraient l'homme dans leur exécution, et l'utilisation intelligente de ces machines une fois qu'elles ont été construites. L'auteur explique aussi les contraintes institutionnelles qui l'ont amené, à contrecœur parfois, à faire ce qu'il savait ne pas être le meilleur moyen de faire apprécier les mathématiques aux étudiants.

André Boileau ne prétend pas croire ou savoir que son choix de contenus et son approche didactique soient efficaces, dans les conditions institutionnelles données, pour la formation de futurs enseignants des mathématiques au secondaire. Il ne nous rend pas compte de recherches empiriques qui auraient mis ses choix à l'épreuve. Si le cours « marche » pour lui, il me semble que c'est parce qu'il sent que ce qu'il enseigne a du sens pour les étudiants tout en étant mathématiquement honnête, correct et pertinent pour les mathématiques, pour leurs applications et utilisations, et pour leur enseignement au secondaire.

2. Une excursion vers la « structure profonde » du texte

À part l'artère principale esquissée plus haut, le texte d'André Boileau compte aussi plein de courants latéraux. Il est comme un arbre banyan : il ouvre sur une multitude de sujets qui engendrent d'autres sujets, eux-mêmes poussant des racines profondes et devenant des sujets intéressants en soi.

La lecture de chaque paragraphe du texte m'invitait à aller chercher des informations supplémentaires, à lire d'autres articles et livres, à jouer avec des logiciels ou à m'amuser avec les mathématiques. Dans la suite de cette réaction, je vais donc parler d'une de ces « excursions intellectuelles » que j'ai faites en lisant le texte d'André Boileau. Cette excursion a été déclenchée par la référence aux écrits didactiques d'Henri Lebesgue (Lebesgue, 1932). Cette référence m'a menée à découvrir un Lebesgue autre que le concepteur de l'intégrale et de mesure qui portent son nom : un Lebesgue-mathématicien pratique et un Lebesgue-didacticien.

2.1. Henri Lebesgue – mathématicien pratique

André Boileau dit avoir été « séduit par [l']approche épistémologique de la construction des réels [de Lebesgue] ». Ma première réaction à cet aveu était l'étonnement : *comment peut-on être séduit par un tel formaliste ?* Dans les tréfonds de ma mémoire, Lebesgue est fortement associé au formalisme, car c'est dans une présentation excessivement formelle de l'intégrale de Lebesgue, à base d'une théorie axiomatique de mesure, que cette notion m'a été présentée pour la première fois dans le cours d'analyse que j'ai suivi à l'Université de Varsovie dans les années 1967-1968. J'aurais dû me douter que ce n'était pas l'auteur de l'intégrale de Lebesgue qui était formaliste – peu de grands mathématiciens le sont – mais bien mes professeurs qui, comme beaucoup d'autres à cette époque, étaient fascinés par les possibilités de rigueur et de précision qu'offrait le langage ensembliste.

Cette fascination était dans l'air car, dans les années 1960, c'était aussi le temps du courant de « mathématique moderne » – phrase qui servait d'étiquette et de slogan aux réformes scolaires qui recommandaient l'introduction du langage ensembliste déjà à l'école maternelle. André Boileau évoque ce courant dans son texte, mais il utilise le pluriel, « mathématiques modernes ». C'est peut-être le nom qu'on lui donne aujourd'hui, mais à l'époque, en France surtout et en Belgique, on insistait sur le singulier : il s'agissait d'en finir une fois pour toutes avec une pluralité des mathématiques de l'école : arithmétique, algèbre, géométrie, avec chacune de ces mathématiques découpées en chapitres isolés (nombres entiers, fractions, équations, trigonométrie, etc.). Ce devait désormais être une seule Mathématique, depuis la maternelle jusqu'à la fin des études universitaires ; un édifice purement théorique, imposant et cohérent, posé sur les bases solides de la théorie des ensembles. Les nombres naturels, entiers, rationnels et réels n'étaient rien d'autre que ces « structures numériques » qui figurent encore aujourd'hui dans le titre du cours dont parle André Boileau. Dans certains manuels pour le collège en France, donc pour les élèves entre 12 et 15 ans, on introduisait même les rationnels comme le corps des fractions de l'anneau des entiers (Chevallard, 1984, p. 67).

Dans l'état d'esprit qui régnait à cette époque, mes professeurs à l'université se souciaient bien peu d'aider les étudiants à développer une intuition de l'intégrale de Lebesgue. Pourtant, comme le suggèrent Baggett et Ehrenfeucht (2008), l'idée sous-jacente est plutôt naturelle. Dans leur cours « Calcul différentiel et intégral », à la New Mexico State University de Las Cruces, destiné aux futurs enseignants du secondaire, ils introduisent la notion d'intégrale d'une fonction sur un intervalle comme la moyenne des valeurs de la fonction sur cet intervalle multipliée par la mesure de l'intervalle, $(b-a)$. Cette notion se trouve équivalente à l'intégrale de Lebesgue et non à l'intégrale de Riemann, qui est traditionnellement enseignée dans de tels cours[1]. L'intégrale de Lebesgue a plus de sens dans leur cours, disent-ils, car elle est basée sur la notion de nombre comme mesure, adéquate dans ce cours qui est organisé autour de la construction d'objets matériels où interviennent sans cesse des problèmes de mesure. Dans l'activité de mesure de grandeurs, la question d'unité de mesure est importante. Cela rend l'intégrale de Lebesgue plus sensée pour les étudiants que l'intégrale de Riemann, qui est normalement introduite comme représentant « l'aire entre la courbe et l'axe des x », ce qui suggère une unité de mesure qui n'est pas toujours appropriée à la situation modélisée.

Prenons, par exemple, la situation classique du projectile lancé dans les airs. On connaît le temps du parcours et la vitesse du projectile en fonction du temps, et on veut calculer la distance parcourue. Dans un cours classique de calcul, cette distance est calculée avec l'intégrale définie au moyen de la fonction primitive. On obtient un nombre abstrait. Tout va bien tant qu'on ne s'occupe pas des unités utilisées pour mesurer le temps, la vitesse et le parcours. En pratique, cependant, on ne peut pas se passer des instruments de mesure et donc des unités. On mesure le temps avec un chronomètre qui nous donne le résultat en heures, en minutes ou en secondes. On mesure la vitesse avec un compteur qui nous donne le résultat en kilomètres par heure, ou mètres par seconde, ou quelque autre unité. La mesure du parcours doit être donnée en unités de longueur, ce qui est

1. [*T*]*he main difference between this course and other calculus courses is in the way the concepts of derivatives and integrals are introduced. Usually the derivative is described as the slope of a line tangent to a graph of a function, and the integral is the signed area between the graph of a function and the x-axis. These definitions create serious conceptual problems when calculus is applied. In applications we use denominate numbers, and we require that students always use appropriate units. But in the task* [*of calculating the length of a string wrapped tightly about a can of soup using an integral formula, and comparing the result with the result of direct measurement of the material object*] *the result is measured in centimeters or inches. If the integral is introduced as an area, the result is expressed in the wrong units. Such discrepancies are endemic, but they can be avoided when we use more abstract definitions of derivatives and integrals which are not tied to any specific physical quantities. So we may define the derivative as the rate of change of one variable relative to another, when the first one is a function of the second. And we may define the integral of a function, where x varies between a and b, as the average of values times b – a. After working with several different applications of derivatives and integrals, even students with a weak math background have found these definitions intuitive and not difficult. But it is worth mentioning that this concept of integral is equivalent to the Lebesgue integral* […] *and not the Riemann integral, which is usually used in undergraduate calculus courses* (Baggett et Ehrenfeucht, 2008, p. 3).

contradictoire avec la visualisation de l'intégrale comme aire. Par contre, si l'on pense l'intégrale comme produit de la valeur moyenne de la vitesse sur l'intervalle du temps par la mesure appropriée de cet intervalle, le résultat est représenté en bonnes unités : unités de longueur. Par exemple,

$$\frac{\text{vitesse – moyenne}}{1 \, ^{m}\!/_{s}} \times \frac{\text{temps}}{1s} = \frac{\text{distance}}{1m}$$

Les rapports dans la « formule » ci-dessus représentent les mesures des grandeurs calculées avec les unités indiquées au dénominateur. Dans des cas concrets, les étudiants peuvent calculer une approximation numérique de la valeur moyenne d'une grandeur qui les intéresse[2].

2.2. Henri Lebesgue – didacticien

L'« approche épistémologique » de Lebesgue, qui a tant inspiré André Boileau dans sa conception du cours « Structures numériques », consiste à reconnaître la source du concept de nombre dans l'activité de mesurer, qui implique celle de dénombrement. Pourtant, dans l'enseignement, on présente le nombre naturel « comme un être bien mystérieux », une « entité métaphysique », qui « résulte, par abstraction, de l'idée d'une collection d'objets distincts [...], indépendante de la nature et de l'ordre de ces objets » (Lebesgue, 1932, p. 176). André Boileau mentionne dans son texte à quoi cette approche « métaphysique » à la notion du nombre naturel a mené les mathématiciens désireux d'établir l'arithmétique sur un fondement rigoureux : une définition récursive de ces nombres comme une suite d'ensembles, construite à partir de l'ensemble vide. Lebesgue dit que cette définition a peut-être servi à quelque chose dans le développement de la logique mathématique, mais elle est inutile pour la compréhension du nombre naturel : « c'est parce que nous disposons [déjà] d'une définition complète du nombre : la description de l'opération qui le fournit » (*Ibid.*). Cette opération, c'est le dénombrement.

Les choix épistémologiques d'André Boileau dans son cours sont bien plus clairs lorsqu'on sait qu'il s'est inspiré de Lebesgue, qui explique sa position en grande profondeur. Je pense en particulier à sa décision de

2. Pour ceux qui s'intéressent à l'organisation d'un cours de calcul autour de l'intégrale de Lebesgue, je recommande aussi l'article de Bressoud (2011) et le livre du même auteur (2008), cité dans Baggett et Ehrenfeucht (2008).

baser la notion de nombre réel sur l'idée de mesure et sur leur représentation décimale. Personnellement, dans un cours intitulé « Introduction to Mathematical Thinking » que nous avons instauré à l'Université Concordia, visant à familiariser les étudiants de première année avec les diverses techniques de preuve en mathématiques dans le contexte théorique des nombres naturels, et leurs extensions aux nombres entiers, rationnels et réels, je construis l'extension des rationnels aux réels à l'aide des suites de Cauchy. L'ensemble des réels est clos sous l'opération de prendre la limite des suites de Cauchy, alors que l'ensemble des rationnels ne l'est pas. Ainsi, on a une justification homogène des extensions successives des nombres naturels : chaque fois, on veut obtenir un système clos sous plus d'opérations. André Boileau dit qu'un de ses collègues faisait quelque chose de semblable dans son enseignement des structures numériques, mais, bien évidemment, l'approche par les suites de Cauchy reflète une position épistémologique très différente de celle qu'il a choisie : les mathématiques comme un système théorique clos et autoréférentiel. Une position « structuraliste » ou presque, en bref. C'est sans doute depuis cette position que le cours a d'abord été conçu et nommé avant qu'André Boileau commence à l'enseigner en 1977. C'était bien la position dominante dans les réformes de mathématique moderne.

L'exposition de Lebesgue de sa conception du nombre réel en termes de l'activité de mesurer des longueurs, à l'aide d'une unité dans le contexte de comparaison des distances (Lebesgue, 1932, p. 182-188), m'a fait penser au curriculum de V.V. Davydov (Davydov et Steffe, 1991). En effet, dans le processus de conception de l'enseignement de la notion de nombre au primaire, comme dans celui de l'introduction de chacune des opérations arithmétiques, Davydov (1991) cherche d'abord à établir la structure des activités humaines qui justifient le besoin de l'invention ou l'utilisation de ces objets culturels :

> [*O*]*ne of the main problems of research in the psychology of teaching consists in discovering the structure of activities common to all men, embodied in the objects of culture, and determining how to make the activities of children themselves equivalent to them* (Davydov et Steffe, 1991, p. 2).

Dans le cas de la multiplication, la situation « fondamentale » – le terme de Brousseau (1997, p. 30) s'applique très bien ici – déterminée par Davydov est celle du problème de mesurer une quantité de quelque chose lorsque l'unité qui nous est donnée en forme d'un étalon n'est pas appropriée (trop petite ou trop grande) et le travail de prendre la mesure de la quantité serait énorme ou imprécis. La solution est de changer d'unité de mesure, tout en calculant la relation entre la nouvelle et l'ancienne unité[3], ce qui implique l'opération de multiplication. L'inspiration de Lebesgue dans cette conception est claire et explicite chez Davydov, qui dit :

> *In examining the content of multiplication as an operation, it is important to bear in mind the statement by the well-known French mathematician, H. Lebesgue, who wrote that, « Every question that results in multiplication is a problem in changing the system of units : 5 sacks with 300 apples in each (transfer from sacks to individual apples) ; 2.75 meters of material, when 1 meter costs 28.45 francs (we were previously calculating in meters, but now we are using francs, and so on)* » (Davydov, 1991, p. 30)[4].

Je me demande si Brousseau, dans ses conceptions de « situation d'action » et de « situation fondamentale », ainsi que dans ses recherches sur les décimaux (Brousseau, 1997), et Vergnaud dans son travail sur les « structures multiplicatives » (Vergnaud, 1983), se sont aussi inspirés des articles didactiques de Lebesgue.

---

3. Ainsi, lorsqu'on veut savoir combien il y a de sous dans un gros sac ou un récipient, il est utile de peser le gros sac au lieu de compter les sous un par un, après avoir déterminé combien de sous pèsent, par exemple, 1. Alors, si le gros sac pèse k kg, et le nombre de sous pesant 1 est k, le nombre de sous dans le gros sac est le produit $k \times m$. Dans ce produit, le nombre k est le rapport entre l'ancienne unité (nombre de sous) et la nouvelle (poids de 1 kg). La structure de l'activité qui donne sens à la multiplication est donc composée de quatre phases : 1) on constate l'impossibilité de mesurer une quantité A en termes d'une unité donnée ; 2) on change d'unité de mesure (b) et on établit le rapport $k = b/a$ entre la nouvelle et l'ancienne ; 3) on mesure la quantité avec la nouvelle unité ; le résultat représente le rapport $m = \mathrm{A}/b$ entre la quantité à mesurer et la nouvelle unité ; 4) on résout le problème en composant une formule avec les nombres obtenus auparavant : $\mathrm{A}/a = k \times m$ (Davydov, 1991, p. 19-20). Dans son curriculum, Davydov construit les leçons sur la multiplication en deuxième classe du primaire suivant ces quatre phases. Dans les expérimentations de ce curriculum, la phase 1 est conduite très soigneusement, très lentement, et sur plusieurs problèmes de mesure, avant de passer aux autres phases. Le calcul des rapports prend aussi beaucoup de temps. Dans l'enseignement usuel, le passage par les phases 1, 2 et 3, si on ne s'en occupe pas du tout, est tellement rapide que les enfants n'ont jamais l'occasion d'en prendre conscience.
4. Dans l'original, le texte cité par Lebesgue apparaît dans une note de bas de page : « La multiplication des entiers est supposée avoir été définie en termes analogues à ceux qu'on va lire. Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet : 5 sacs de 300 pommes ; 2 m 75 d'étoffe à 28 francs 45 le mètre. » (Lebesgue, 1932, p. 185.)

3. Conclusion

La référence à Lebesgue dans le chapitre sur la multiplication de Davydov m'a échappée lors de ma première lecture de ce chapitre, il y a une quinzaine d'années. Une référence aux mêmes écrits de Lebesgue chez Chevallard (1985, p. 65) ne m'a pas incitée à lire ces articles non plus. *Pourquoi ai-je soudain fait attention à cette référence chez André Boileau ?*

Je pourrais expliquer ce mystère par le fait que Davydov et Chevallard me renvoient à des publications en forme de livres introuvables dans les bibliothèques auxquelles j'avais accès à l'époque où je lisais leurs articles. La citation de Lebesgue chez André Boileau est accompagnée de l'adresse du site Web d'où « La mesure des grandeurs » peut être facilement téléchargée. Une conclusion de cette expérience est que l'accessibilité des références sur Internet change la façon dont nous pouvons maintenant lire les articles ; elle élargit grandement leurs horizons de sens et de signification.

D'autre part, mon expérience semble confirmer le principe, si bien exprimé par Umberto Eco, que « le texte est un mécanisme paresseux qui vit sur la *plus-value* des sens introduits par le destinataire » (Eco, 1979, p. 52, traduction libre). Donc, ce que j'ai lu dans le texte d'André Boileau n'est qu'un résultat fortuit de mon état d'esprit actuel et ne reflète que très peu les contenus « objectifs » de ce texte. D'autres lecteurs y verront sans doute autre chose. Ce qui est sûr, cependant, est que chacun y trouvera quelque chose qui piquera son intérêt : il y en a en effet pour tous les goûts !

SECTION 2

Texte plénier 2

Formation mathématique pour les enseignants de mathématiques du secondaire

Croisement des regards du mathématicien et du didacticien

Frédéric Gourdeau
Département de mathématiques
et de statistique
Université Laval
frederic.gourdeau@mat.ulaval.ca

Jérôme Proulx
Groupe de recherche sur la formation à
l'enseignement des mathématiques – GREFEM
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
proulx.jerome@uqam.ca

Avec la collaboration de

Jean-François Maheux
Groupe de recherche sur la formation à
l'enseignement des mathématiques – GREFEM
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
maheux.jean-francois@uqam.ca

Bernard R. Hodgson
Département de mathématiques
et de statistique
Université Laval
bernard.hodgson@mat.ulaval.ca

1. Préambules

1.1. Préambule 1 : Petit mot du comité organisateur

La nature de ce texte prend sa source dans l'invitation qui a été faite par le comité organisateur du colloque à Frédéric Gourdeau. Il est assez connu que des choses intéressantes sont mises en route à l'Université Laval au Département de mathématiques pour les futurs enseignants du secondaire (voir par exemple Hodgson, 2001 ; Gourdeau, 2010). Le comité organisateur a donc trouvé pertinent de contacter Frédéric pour qu'il présente les orientations des travaux faits dans leur programme de formation des maîtres lors de ce colloque portant spécialement sur la formation *mathématique* des enseignants. Lorsque Frédéric a été contacté, sa réponse a été assez intéressante pour le comité organisateur. En effet, il nous a dit que durant sa carrière, il avait fréquemment expliqué, de différentes façons et à différentes personnes, ce qu'ils faisaient dans leurs cours. Et, malgré le fait qu'il en a retiré quelque chose chacune de ces fois, il en voulait maintenant plus et il avait envie de faire plus que « d'expliquer » ou « d'entretenir » sur ce qu'ils font à l'Université Laval. Il voulait que tout cela le fasse réfléchir et avancer davantage, que cette expérience réussisse à le questionner. Frédéric voulait en fait une collaboration avec un didacticien, pour discuter de perspectives de formation en mathématiques et en didactique : de réfléchir à ses cours de mathématiques en discutant des cours, de ce qui se fait en didactique des mathématiques et de ce qui est fait en recherche sur ces questions de formation. Comme comité organisateur, l'idée a alors été lancée qu'un de nous (par conséquent ici Jérôme) collabore avec Frédéric sur ces réflexions et sur l'écriture du texte pour la plénière. Ce qui suit est donc le fruit de leurs discussions, discussions qui ont eu lieu à la suite des quelques visites de Jérôme dans les cours de mathématiques que donne Frédéric aux futurs enseignants de mathématiques, et des nombreux questionnements subséquents à ces rencontres. Le texte prend donc la forme d'un dialogue et de questionnements entre Frédéric et Jérôme sur les perspectives de formation mathématique, sur la recherche, sur la didactique des mathématiques, sur les mathématiques à la formation et sur la formation des enseignants du secondaire.

1.2. Préambule 2 : La collaboration s'élargit

Les visites de Jérôme à l'Université Laval auront aussi été l'occasion pour lui d'assister à des cours de mathématiques donnés par deux autres enseignants à l'Université Laval : Bernard R. Hodgson et Jérôme Soucy. De plus, lors de la dernière visite de Jérôme à l'Université Laval, Jean-François Maheux (Université du Québec à Montréal – UQAM) s'est joint à lui. Finalement, tous ont pris part, à différents moments et de différentes façons, à des discussions avec Jérôme et Frédéric. À ce titre, certains propos de Jean-François Maheux ont été repris dans ce texte.

1.3. Préambule 3 : Contexte de formation mathématique des enseignants du secondaire au Département de mathématiques de l'Université Laval

Le programme de baccalauréat en enseignement secondaire (BES) en mathématiques de quatre ans compte présentement 15 cours de mathématiques, statistique et informatique obligatoires, dont six sont des cours dédiés (ou spécifiques) pour les étudiants du BES. Ils sont suivis tout au long de la formation de quatre ans. La formation mathématique de base est assurée par les premiers cours du cheminement, et les cours spécifiques au BES sont généralement suivis par la suite. Ainsi, les étudiantes et les étudiants ont acquis un meilleur bagage mathématique et une plus grande maturité lorsque les cours spécifiques sont abordés. Cela permet de pousser davantage la réflexion sur les thèmes proches de l'enseignement secondaire dans ces cours, tout en portant une attention accrue à l'adaptation de l'enseignement et à sa dimension culturelle[1].

Les cours de base sont :

MAT-1200	Introduction à l'algèbre linéaire (*Session 1*)
MAT-1110	Calcul des fonctions de plusieurs variables (*Session 1*)
MAT-1300	Éléments de mathématiques (*Session 1*)
IFT-1701	Introduction à l'algorithmique et à la programmation (*Session 3*)
MAT-1100	Analyse I (*Session 2*)

Les cours de base dont les thèmes sont plus proches de thèmes ou d'objets mathématiques vus au secondaire sont :

MAT-1500	Géométrie (*Session 1*)
MAT-1310	Mathématiques discrètes (*Session 2*)
MAT-2310	Théorie des nombres (*Session 3*)
STT-1000	Probabilités et statistique (*Session 4*)

1. Trois cours de didactique des mathématiques (Didactique des mathématiques I, II et III) sont aussi suivis dans le cadre du BES : DID-2030, DID-2031 et DID-3030.

Les cours de mathématiques et statistique spécifiques au BES sont, dans l'ordre où ils sont suivis :

MAT-2904	Complément d'analyse (*Session 3*)
MAT-2906	Mathématiques fondamentales pour l'enseignement (*Session 4*)
MAT-2901	Mathématiques et technologie (*Session 4*)
MAT-2903	Thèmes mathématiques pour l'enseignement (*Session 5*)
STT-2902	Modélisation statistique (*Session 5*)
MAT-3900	Évolution des idées en mathématiques (*Session 8*)

2. Mise en contexte des perspectives de formation mathématique

2.1. Questions de départ

Au-delà des prescriptions ministérielles, *pourquoi avoir des cours de mathématiques avancées et/ou pourquoi avoir des cours de mathématiques dédiés pour les enseignants de mathématiques du secondaire ? Quel rationnel guide ces choix ? Quels avantages ? Quels inconvénients ?*

2.2. Réponse 1 de Frédéric

L'enseignant de mathématiques du secondaire a une tâche complexe à accomplir, et il est seul maître à bord – en un certain sens – lorsqu'il enseigne. Pour pouvoir donner toute son attention aux élèves et à leur compréhension, il doit pouvoir se baser sur une compréhension riche et solide des mathématiques présentes dans le cursus du secondaire. Il doit pouvoir choisir les explications qu'il donne, bâtir des activités d'apprentissage, passer sous silence certaines difficultés réelles du contenu à enseigner (telles que les difficultés liées aux nombres irrationnels, et ce, dans un grand nombre de situations) et choisir lesquelles expliquer (en partie ou en totalité).

Une absence de maîtrise suffisante des mathématiques peut amener à rigidifier son enseignement, par exemple à le réduire à une suite d'algorithmes à maîtriser, ou encore amener à accepter des dérives mathématiques sans trop savoir quoi faire.

Les cours habituels de mathématiques ne préparent à cela que partiellement. Dans les meilleurs scénarios, le futur enseignant maîtrisera extrêmement bien les mathématiques savantes et pourra même expliquer leur utilité dans le corpus mathématique ou en vue d'applications. Il aura une maîtrise algorithmique sans faille et pourra résoudre des problèmes complexes en faisant appel à son bagage mathématique. Mais, du même souffle, il aura sans doute eu à obtenir une excellente maîtrise en utilisant un langage mathématique clair et efficace, mais qui n'est généralement pas accessible aux étudiants du secondaire. Il aura donc à faire la transition entre cette maîtrise personnelle des mathématiques et l'apprentissage par les élèves du secondaire. De plus, on ne lui aura pas enseigné avec comme objectif (partiel) de percevoir en quoi une notion peut être difficile mais, au contraire, en essayant de la présenter de telle sorte que les difficultés soient évitées (autant que possible).

Un exemple me semble pertinent ici pour illustrer mes propos. Dans un des cours dédiés aux étudiants du BES à l'Université Laval, un travail important de résolution de problèmes est fait. *En quoi cela est-il différent du travail que l'on demanderait à des étudiants du baccalauréat en mathématiques ?* Ici, une différence essentielle a trait à l'objectif principal : pour les étudiants du baccalauréat en mathématiques, devenir meilleurs en résolution de problèmes est l'objectif principal ; pour ceux du BES, comprendre ce processus, ses étapes, pour être en mesure d'intervenir auprès des élèves est l'objectif principal. Dans les deux cas, un journal de résolution de problèmes sera réalisé.

De plus, dans ce cas, le travail de résolution de problèmes permettra aussi aux étudiants du BES d'apprendre en le vivant ce qu'est une partie de l'activité mathématique authentique. Ils pourront approfondir leur conception des mathématiques en ayant la possibilité de travailler de manière créative en mathématiques, pendant des heures, des jours, voire quelques semaines. Ils pourront mieux comprendre et apprécier le rôle de l'exemplification, de la généralisation et des conjectures. Et la liste pourrait se poursuivre.

2.2.1. Quels avantages ?

Un des avantages est que dans un cours dédié, on peut choisir de structurer les cours sans que le contenu mathématique le dicte exclusivement. On peut par exemple faire ressortir des thèmes unificateurs de différentes natures, tels que le raisonnement, l'infini ou les coniques. Ainsi, dans une partie de cours portant sur le raisonnement, on peut aborder des matières différentes en même temps, car un raisonnement mathématique important s'y retrouve. Prenons par exemple la différence entre la définition de certains concepts ou de certaines notations et la preuve de certains résultats : on peut penser à la confusion qui surgit si on demande comment prouver $a^0 = 1$. *Est-ce qu'on le prouve ?* Il y a aussi le passage des rationnels aux réels, présent dans plusieurs thèmes mathématiques et qui, pour des enseignants du secondaire, a sans doute avantage à être exploré en évitant les coupures de Dedekind mais en utilisant le concept de limite (sans nécessairement faire tous les découpages d'epsilon qui seront autant de passages obligés pour les étudiants du baccalauréat en mathématiques).

2.2.2. Quels inconvénients ?

Le principal auquel je pense a trait au manque de liens entre les cours de didactique et les cours de mathématiques. Les raisons de ces manques de liens sont multiples, provenant par exemple de la structure organisationnelle (cours qui relèvent de différentes unités, enseignants qui ne sont pas toujours les mêmes) et de la culture universitaire (liberté universitaire, individualisme). Il pourrait être intéressant de concevoir des cours dans lequel il y a du *team teaching*. Nous en sommes présentement loin, en général.

Ce manque de liens et de cohérence est en partie apparent pour les étudiants. Ceux-ci sont habitués à voir la réussite de leurs études comme une suite de réussites isolées, un examen à la fois, un travail à la fois, un cours à la fois. Mais nous espérons tous qu'il en est, en fait, autrement. Par contre, dans mon expérience, il n'existe pas (ou peu) d'approche programme dans laquelle les enseignants des cours de mathématiques et des cours de didactique élaborent, à partir d'objectifs communs, des objectifs pour chacun des cours qui vont au-delà d'une liste de points à couvrir ou de grands objectifs nobles. Je ne veux cependant pas rester général ici, car ce genre de propos peut couvrir des situations très différentes. Je vais présenter deux exemples que je trouve pertinents, à la suite des discussions que nous avons eues.

2.2.3. Exemples génériques

Jérôme, lors de tes visites, tu as réagi fortement et positivement à l'une de mes interventions dans le cours de géométrie, intervention dans laquelle je touchais à l'idée d'exemple générique. Discuter des exemples génériques dans un cours de géométrie ou dans un cours de mathématiques dédié aux étudiants du BES peut facilement être fait dans une approche mathématique : les exemples abondent et on peut traiter des thèmes mathématiques en faisant ressortir cet aspect. *Est-ce que cela est utile aux cours de didactique qui suivent ? Quel type de réflexion serait-il utile que les étudiants aient fait ou amorcé dans un contexte mathématique et poursuivent dans un cours de didactique ? Quels sont les autres types de raisonnement mathématique qui sont les plus porteurs en didactique et que serait-il intéressant que l'on ait vu en maths à ce sujet ?* Il me semble qu'il serait important que les enseignants des cours de mathématiques et de didactique discutent de cela.

2.2.4. Écriture mathématique

L'aller-retour entre la considération de cas particuliers et la formulation de généralisation s'accompagne d'un recours plus ou moins important à une écriture symbolique. La capacité de faire ce travail dans les deux sens me paraît essentielle pour un enseignant de mathématique. *Comment cet aspect est-il abordé, s'il l'est, dans les cours de didactique ? Comment tenir compte de ce qui a été fait ou sera fait en didactique lorsqu'on aborde ce thème en mathématiques ?*

2.3. Réponse 1 de Jérôme

Je crois que nous avons une vision similaire de la tâche complexe mathématique que l'enseignant du secondaire doit accomplir et qu'il doit être drôlement outillé pour l'accomplir. Par contre, entrons dans le vif du sujet et de la question. Le point sur lequel je me questionne est le suivant. Tu soulignes plus haut que l'enseignant du secondaire :

> doit pouvoir se baser sur une compréhension riche et solide des mathématiques présentes dans le cursus du secondaire. Il doit pouvoir choisir les explications qu'il donne, bâtir des activités d'apprentissage, passer sous silence certaines difficultés réelles du contenu à enseigner

(telles que les difficultés liées aux nombres irrationnels dans un grand nombre de situations) et choisir lesquelles expliquer (en partie ou en totalité).

Je jongle personnellement depuis un bout de temps avec la question suivante, qui te paraîtra peut-être naïve: *En quoi précisément les cours de mathématiques avancées peuvent aider à faire ceci ?* Mes visites dans tes cours de mathématiques avancées et tes cours de mathématiques dédiés aux futurs enseignants m'ont beaucoup fait réfléchir et je veux tenter de répondre à la question en lien avec ce que je vois dans les cours de mathématiques que tu donnes et auxquels j'ai assisté, mais je veux aussi parler de certains aspects que je retrouve dans la recherche et qui me semblent intéressants à aborder.

En premier, je veux te parler un peu de la recherche. Actuellement, l'intérêt d'avoir des cours de mathématiques avancées à la formation des enseignants du secondaire est remis en question dans certains milieux. Dans un premier temps, on s'est longtemps demandé si ces cours étaient pertinents, certains disant oui et d'autres disant non. Plusieurs critiques et arguments ont été avancés, par exemple concernant la nature formelle, symbolique et compacte des contenus abordés à l'intérieur des cours de mathématiques avancées. Toutefois, la critique qui m'apparaît la plus pertinente ici est celle qui concerne la façon dont les mathématiques se font dans ces cours et le mode d'enseignement qui y est souvent privilégié.

En fait, une critique importante adressée aux cours de mathématiques académiques concerne la manière même dont ces cours sont souvent approchés. Comme l'expliquent Bauersfeld (1994) et Burton (2004), la façon usuelle dont les cours universitaires en mathématiques sont donnés se caractérise souvent par un style magistral et une exposition de savoirs mathématiques (concepts, définitions, axiomes, théorèmes, etc.). Les façons de faire et les habitudes mathématiques développées dans ces cours renvoient donc davantage à un corpus de «savoirs réifiés» qu'à une participation à un *processus de mathématisation*[2]. On assiste alors à un important choc de cultures – ou au renforcement d'une culture de classe caractérisée par une

2. Évidemment, ce ne sont pas tous les cours de mathématiques avancées qui reproduisent ce modèle, on pense par exemple ici à des gens qui font autrement comme W. Whiteley à York ou A. Schoenfeld à Berkeley.

exposition de savoirs, éloignée des approches contemporaines potentiellement riches pour l'enseignement des mathématiques, diraient plusieurs. Pour Bauersfeld (1994), les enseignants ont besoin d'être immergés dans une certaine culture mathématique, dans une pratique à l'intérieur de laquelle les mathématiques sont travaillées, sont vivantes, plutôt que d'être introduits à un corpus de connaissances objectives où les mathématiques sont vues comme des absolus épistémologiques.

L'étude que Burton (2004) a conduite avec des mathématiciens est parlante à cet effet. Elle met en évidence (dans l'analyse du discours des mathématiciens) des différences entre leurs cultures d'enseignement et celle de production mathématique. Plusieurs des mathématiciens interviewés font ainsi ressortir de façon ironique l'incohérence entre leurs pratiques professionnelles de mathématiciens lorsqu'ils *font* des mathématiques et leurs pratiques d'enseignement axées sur des cours axés sur une exposition des concepts, qui donnent une vision statique et préexistante des mathématiques, prêtes à être apprises ; alors qu'eux-mêmes voient les mathématiques comme étant en constante évolution et nécessitant une construction personnelle continuelle chez le mathématicien ou l'étudiant. Ainsi, les mathématiciens eux-mêmes affirment que les pratiques mises en place dans leurs cours universitaires ont peu à voir avec la façon dont les mathématiques sont produites. Cette analyse vient questionner la formation donnée dans ces cours, très loin selon eux du véritable travail de production mathématique. Elle renforce le fait que l'enseignement donné dans ces cours académiques paraît peu préparer les enseignants au processus de construction des concepts en mathématiques, aux façons de faire les mathématiques – et par le fait même contribue peu chez eux au développement de pratiques mathématiques riches et de compétences professionnelles pertinentes pour la pratique de classe.

Personnellement, et c'est ce qui m'a intéressé, je ne trouve pas que cette critique s'applique à tes cours. Ainsi, l'aspect que j'ai trouvé très intéressant dans ton cours de mathématiques avancées auquel j'ai assisté, et celui dédié, concerne l'idée de « faire des mathématiques ». Toutefois, je ne parle pas ici de « faire des mathématiques » dans le sens que « les étudiants faisaient des mathématiques dans ton cours », mais plutôt sous l'angle du « discours sur l'activité mathématique » que tu tenais fréquemment. Je m'explique. Götz Krummheuer (par exemple, 1992) a souligné l'importance des formats d'argumentation de l'enseignant qui orientaient la façon de faire et d'argumenter en mathématiques dans la classe. Cela permettait de montrer, par exemple, que la façon de faire les mathématiques de l'enseignant (les arguments, les exemples, les explications, les insistances, les preuves, etc.) communiquait aux élèves, parfois bien implicitement, comment faire les mathématiques ou du moins comment les mathématiques devaient se faire dans sa classe. Je l'ai personnellement senti de façon très forte dans tes cours, alors que tu prenais souvent le temps d'expliquer aux étudiants comment on faisait les mathématiques (ce qu'on pouvait se donner le droit de faire, ce qu'on ne pouvait pas, etc.). Parfois, cela pouvait te sembler personnellement anodin, mais je trouvais qu'il y avait une belle richesse sous-jacente à tout cela. Tu parlais par exemple de cas d'exceptions qu'on pouvait mettre de côté et s'y intéresser plus tard ou simplement ne pas considérer, de définitions qu'on pouvait adapter, etc., ainsi que des façons de résoudre le problème en partant à l'envers, par exemple en considérant ce qu'on cherchait comme étant connu, de partir de nos intuitions et de les vérifier, etc. Aussi, ce qui m'apparaissait particulièrement intéressant est que tu te plaçais souvent en rupture, au niveau de ton discours, avec certaines pratiques mathématiques de l'école secondaire, mais cela permettait de rendre plus « vivante » toute l'activité mathématique. Des exemples concrets :

- tu as établi la différence entre une symétrie et une réflexion, deux termes souvent pris pour la même chose à l'école secondaire ;
- tu as établi la différence entre une construction géométrique et la justification de cette construction ;
- tu as établi la différence entre la définition d'un concept et son résultat ou sa formule ;
- tu as travaillé sur des exemples génériques pour prouver des conjectures, en les contrastant avec la recherche d'un exemple simple et d'une preuve générale ;
- tu as, avec une simplicité incroyable, expliqué aux étudiants que dans des triangles semblables on n'a besoin que du cas AA pour prouver que les triangles sont semblables (contrastant avec l'idée que AAA est la propriété) ;
- et bien d'autres exemples…

Cela m'a semblé un des beaux apports d'avoir un mathématicien professionnel comme enseignant qui explique comment les mathématiques se font. Et ce mathématicien peut le faire, car c'est ce qu'il fait chaque jour.

Un autre point m'interpelle aussi dans ce que tu as avancé plus haut. Tu mentionnes, en parlant de l'enseignant en formation : « Il aura donc à faire la transition entre cette maîtrise personnelle des mathématiques et l'apprentissage par les élèves du secondaire. » Cela m'a amené à me questionner, parce que je me demande si la formation ne devrait pas intervenir, ou du moins aider, dans cette transition. À la vue de certains résultats de recherche dans lesquels les enseignants n'arrivent que difficilement à faire cette transition (voir Pian, 1999, cité dans le rapport de la Commission Kahane, 2003), cette perspective de transition laissée sur les épaules des étudiants-maîtres me laisse songeur.

Toutefois, certaines pistes ont été explorées, si ce n'est qu'en théorie du moins. Une des pistes explorées lors du Groupe de travail n^{o} 1 au colloque « Espace mathématique francophone » en 2009 (voir Hache, Proulx et Sagayar, 2009) était l'idée de créer des cours de mathématiques avancées (donc touchant à des contenus postsecondaires) travaillant de façon explicite les liens et filiations existant entre les notions travaillées dans les cours et celles vues au secondaire. Je me rappelle que lorsque nous en avons parlé à l'hiver 2010, cela t'avait intéressé. Nous avions aussi discuté de concepts susceptibles de faire apparaître ces filiations, par exemple le lien entre le taux de variation et les notions de dérivées ; de tangentes et tangentes sous la courbe, etc. Voici en fait un passage qui ressort du groupe de travail mentionné ci-dessus concernant cette perspective :

> L'idée est de travailler les mathématiques académiques universitaires, mais en établissant, *in situ*, des liens explicites avec les contenus tels qu'enseignés aux élèves. Ici encore, l'idée est de permettre l'accès à des mathématiques de haut niveau, de permettre à l'enseignant d'en savoir plus que ce sur quoi il enseigne et d'offrir une vue d'ensemble de l'édifice mathématique à l'intérieur duquel les concepts travaillés/à enseigner s'insèrent. Par contre, l'ajout se situe au niveau des liens faits de façons explicites entre les contenus universitaires, secondaires et primaires. À titre d'exemple, lors des cours de calcul différentiel et intégral, des liens importants peuvent être faits avec la notion de fonction, de taux de variation, de continuité et discontinuité, de tangente, etc., telles qu'abordées dans le secondaire ; le même type de travail

> peut être mené sur la nature des concepts étudiés en géométrie au début des études secondaires. Ainsi, la différence majeure […] se situe au niveau de l'établissement explicite des liens entre les concepts des deux ordres d'enseignement. Ces liens ne sont pas perçus ici comme évidents et laissés à la charge de l'enseignant en formation, mais plutôt perçus comme quelque chose qui doit être travaillé lorsqu'on aborde les concepts universitaires *avec des futurs enseignants*. L'intention derrière cette deuxième perspective est de tenter de rendre explicites les liens entre les concepts mathématiques universitaires et les concepts mathématiques enseignés dans le primaire ou le secondaire, ainsi que de montrer explicitement comment s'insèrent et comment s'articulent les concepts travaillés dans le primaire ou le secondaire à l'intérieur du panorama mathématique. Il y a donc ici une finalité d'explicitation évidente, que la perspective 1 n'avait pas nécessairement en termes de formation mathématique pour de futurs enseignants (Hache, Proulx et Sagayar, 2009, p. 2-3).

Nous avons souvent discuté de ces aspects lors de mes visites. Ces discussions me sont apparues importantes, car elles m'ont particulièrement aidé à voir les liens que tu voyais et ceux que tu trouvais importants. Je me rappelle entre autres une discussion durant laquelle Bernard R. Hodgson a insisté sur le fait que les mathématiques que vous avez décidé de travailler à l'intérieur des cours de mathématiques dédiés devaient être en lien (de près ou de loin, mais en lien) avec les mathématiques du secondaire que les futurs enseignants enseigneront dans leurs classes. Toutefois, nous avions aussi discuté du sens à donner à l'expression « être en lien » avec les mathématiques du secondaire, particulièrement sous l'angle « de près ou de loin ». Il y avait à mon sens l'idée que ces cours ne travaillent pas les mathématiques pour les mathématiques, mais que les mathématiques travaillées devaient avoir une certaine pertinence pour la pratique future des enseignants. On voulait donc travailler des mathématiques qui avaient des filiations avec ce qui se faisait au secondaire, et ce, de près ou de loin. Par contre, je me rappelle aussi que cette réponse était insatisfaisante, car il y avait en effet des moments où ce n'était pas les mathématiques elles-mêmes qui étaient en lien, mais plutôt ce qui était fait avec elles. Entre autres, tu insistais sur l'idée de faire « vivre » aux futurs enseignants certaines expériences mathématiques et de les familiariser avec certains aspects mathématiques que tu considérais comme importants. En creusant un peu, tu nous as aussi expliqué que ce qui t'importait était « l'expérience » mathématique que tu leur faisais vivre (parfois indépendamment des contenus eux-mêmes). Il semblait y avoir, dans tes choix, et cela m'intéresse beaucoup, une idée de « faire vivre une expérience mathématique » aux étudiants futurs maîtres. Ainsi, on ne peut pas dire que cette « expérience mathématique » est en « lien » avec les mathématiques du secondaire, mais elle l'est peut-être au niveau de l'expérience mathématique elle-même. En fait, je trouve que cette idée d'expérience mathématique rejoint d'une certaine façon l'idée du discours sur les mathématiques pour faire réfléchir à ce qu'on peut ou ne peut pas, ce qu'on peut se permettre et faire, etc., donc à ce qui est fait lorsqu'on fait des mathématiques.

2.4. Réponse 2 de Frédéric

Je reprendrai trois points, en débutant par une suite à la discussion portant sur mon affirmation voulant que l'enseignant aura donc à faire la transition entre cette maîtrise personnelle des mathématiques et l'apprentissage par les élèves du secondaire. Je suis certainement en accord avec ce que tu écris à ce sujet et je ne souhaitais pas suggérer que cette transition devait être le seul fait du travail de l'enseignant, une fois sa formation terminée. Il m'apparaît toutefois que la maîtrise personnelle des mathématiques est généralement une condition préalable à l'enseignement. Il me semble de plus que la didactique doit jouer un rôle très important dans le travail qui consiste justement à établir des conditions permettant l'apprentissage des mathématiques par les élèves. Je me permets ici de revenir sur une partie du texte que tu as citée plus haut :

> Par contre, l'ajout se situe au niveau des liens faits de façons explicites entre les contenus universitaires, secondaires et primaires. À titre d'exemple, lors des cours de calcul différentiel et intégral, des liens importants peuvent être faits avec la notion de fonction, de taux de variation, de continuité et discontinuité, de tangente, etc., telles qu'abordées dans le secondaire […]

Cet ajout de liens importants est certainement intéressant. De plus, lorsqu'il peut être fait avec les étudiants de sorte que ceux-ci comprennent comment les mathématiques vues au niveau collégial ou universitaire sont le fruit de réflexion ou de problèmes qui trouvent leur origine dans des thèmes mathématiques vus au secondaire, alors je crois que l'on ajoute vraiment à la formation. On peut à la fois comprendre d'où sont venues les questions et les réponses et mieux comprendre comment une certaine idée mathématique simple est en fait le début de quelque chose d'important : par exemple, étudier la différence entre les termes consécutifs d'une suite à la recherche d'un terme général et chercher à déterminer une fonction à partir de son taux de variation. Ici encore, la collaboration entre didacticiens et mathématiciens peut être porteuse. Quels sont ces liens, ces filiations entre les éléments du cursus secondaire, qui sont importants selon les recherches didactiques ? Les experts du cursus secondaire, au Québec, ne sont pas les mathématiciens. Par contre, les mathématiciens sont sans doute bien placés pour percevoir et exploiter ces liens avec des contenus plus avancés et voir leur pertinence au-delà du secondaire.

Je sens toutefois le besoin de préciser que je ne crois pas qu'un ajout de liens soit suffisant si cet ajout est fait uniquement comme un ajout de contenu. Il faut encore ici que cela fasse « vivre une expérience mathématique », sinon on risque de se retrouver avec une nouvelle couche de connaissance, mal maîtrisée et vite oubliée. Je me retrouve donc à nouveau autour de l'importance de faire vivre une « expérience mathématique » aux futurs enseignants. Au-delà de l'édifice mathématique qui a été érigé, et dont on pourrait souhaiter qu'il soit connu de tous et en particulier des enseignants, il y a une manière de faire, de comprendre et de créer qui est « mathématique ». Une expérience personnelle aussi profonde que possible de ce que cela représente et une maîtrise personnelle de cette manière mathématique de faire et de comprendre me paraissent importantes. De plus, pour un enseignant, une articulation cohérente de certains des éléments de cette manière de faire et de comprendre, tel que cela est fait dans *L'esprit mathématique* (Mason, avec Burton et Stancey, 1994) pour certains aspects liés à la résolution de problèmes, me paraît aussi importante.

2.5. Réponse 2 de Jérôme

Ce lien entre mathématiciens et didacticiens (ou cours de mathématiques et cours de didactique) m'interpelle. Je crois qu'il y a quelque chose d'intéressant à creuser là-dessus. Pour le faire, j'avancerai sur ce qu'une de mes collègues à l'UQAM, Mireille Saboya, a avancé dernièrement concernant ses cours de didactique des mathématiques. Chez nous aussi, à l'UQAM, au Département de mathématiques, nous avons développé des cours de mathématiques que nous appelons adaptés (voir à ce sujet le chapitre de Boileau dans ce recueil). Ce qui m'apparaissait important dans les propos de ma collègue Mireille, et que je reprends ici bien évidemment à ma façon et pour le but présent, est qu'il existe une certaine filiation entre les cours de mathématiques adaptés, donnés aux étudiants en début de programme, et les cours de didactique qui les suivent. En effet, pour elle, ces cours de mathématiques adaptés (par les contenus touchés et les façons de travailler ce contenu – encore ici on peut se référer au chapitre de Boileau dans ce recueil) aidaient beaucoup le travail didactique dans les cours de didactique, parce qu'une réflexion et une sensibilité aux raisonnements mathématiques est démarrée. Et cela sans compter le travail des contenus qui est abordé dans une optique que certains qualifieraient davantage de « didactique », dans le sens que l'accent est constamment mis sur le sens des concepts et leur justification, explication et représentation en mots, en dessins ou avec les outils mathématiques disponibles (symbolisme, graphiques, etc.)[3]. Il semble donc y avoir une importance, du moins pour la formation didactique qui s'en suit, de développer ces cours dits adaptés. Mais, surtout, de développer une cohérence entre ces cours de mathématiques pour futurs enseignants et les cours de didactique. Tu parlais plus haut d'une approche programme et je crois que cette cohérence est au cœur d'une approche programme de ce type. Il semble y avoir un intérêt à mailler les expertises de mathématiciens et de didacticiens pour avancer sur la formation mathématique des enseignants du secondaire.

Cela m'amène à une nouvelle question à laquelle j'ai fait allusion plus tôt : *Qu'est-ce que le mathématicien professionnel peut apporter, en donnant des cours, à des futurs enseignants ?* Je crois que tu apportes beaucoup aux futurs enseignants, et quelque chose de différent, en étant un mathématicien professionnel qui parle de mathématiques (ce qui est ton objet de travail). Je vois un lien avec l'idée bien répandue de faire intervenir de vrais enseignants praticiens à différents endroits et moments à l'intérieur des cours donnés à

3. On pourrait évidemment argumenter qu'il n'y a rien en soi de « didactique » dans cette idée, alors que c'est le quotidien de l'enseignement des mathématiques de faire cela. En fait, tu es bien placé Frédéric pour le savoir, car c'est ce que tu fais dans tes cours, qui ne sont pas des cours de didactique. Par contre, certains pourraient dire qu'il y a des éléments de réflexion didactique dans tes cours et qu'en ce sens ils ont une vertu didactique. J'ai toujours trouvé cet argument intéressant et louable.

la formation des enseignants (par exemple, faire intervenir des enseignants du secondaire), parce qu'ils sont des professionnels de l'enseignement qui peuvent parler d'enseignement (ce qui est leur objet de travail). Que penses-tu de ce lien et de cette idée ? Je sais que pour ton collègue Bernard Hodgson, il y avait quelque chose d'important dans le fait que des mathématiciens donnent les cours aux futurs enseignants – mais je me rappelle aussi qu'on avait changé de sujet (dommage…) et que j'aurais aimé en savoir plus. Mon intuition m'amène à être d'accord avec Bernard… mais je ne sais pas exactement pourquoi, c'est plus une intuition que j'aimerais creuser. Et je crois que ce n'est pas une question que le mathématicien professionnel apporte *plus* que le didacticien sur les mathématiques, ce n'est pas une question de mieux ou de moins bon. C'est surtout, selon moi, une question que le mathématicien professionnel apporte quelque chose de différent, tout simplement, de ce que le didacticien ou l'enseignant peut apporter. Et ce « quelque chose » m'apparaît être porteur et important à fouiller…

2.6. Réaction 1 de Jean-François

Sur un ton très personnel, comme vous le faites également, ma réaction à vos propos s'enracine dans mes propres expériences et réflexions. Au nombre de celles-ci, deux me semblent importantes à souligner : 1) le fait d'avoir été étudiant au BES dans les cours de Frédéric et 2) celui d'avoir par la suite poursuivi ma formation jusque dans un doctorat où je me suis beaucoup interrogé sur les liens entre les différentes personnes engagées dans l'éducation mathématique (en particulier les chercheurs, les enseignants, les élèves… mais cela pourrait aussi s'appliquer aux formateurs, qu'ils soient didacticiens ou mathématiciens !).

En lisant vos échanges, je suis frappé par un aspect à la fois fondamental et un peu invisible tellement il saute aux yeux. Vos conversations, peut-on lire, ont pour point de départ une volonté, de la part de Frédéric, de réfléchir, d'avancer et de questionner. Une envie qui, il faut bien le dire, est le fruit d'une longue participation et d'un intérêt soutenu pour la formation des futurs enseignants du secondaire. Cette dimension « personnelle » me semble d'une grande importance, et pourtant un peu masquée par la réflexion qui se développe autour de la « formation », des « cours », des « expériences vécues », des « habiletés à développer », des « rôles » des uns et des autres en tant que « mathématiciens » ou « didacticiens », et ainsi de suite. On parle bien de formation, de cours, d'expériences, de connaissances, et ainsi de suite, mais on parle surtout *d'une formation en particulier*, de quelques cours conçus et mis en œuvre par une personne particulière et qui se trouve, qui plus est, être celle-là même qui, bien que mathématicien professionnel, se demande comment des mathématiques plus avancées que celles travaillées au secondaire peuvent servir les (futurs) enseignants.

Je ramène ici une idée, formidable, qui court à travers vos propos : celle de faire vivre aux futurs enseignants des expériences mathématiques d'une qualité particulière en les faisant rencontrer le travail du mathématicien, de sorte que des filiations s'établissent entre leur travail mathématique, celui de leurs (futurs) élèves et celui de ceux dont développer les mathématiques est le métier. Comme vous le notez si bien, pour vivre une telle expérience, il faut d'une part avoir une certaine familiarité avec les mathématiques et, d'autre part, que les moments déclencheurs de cette expérience s'inscrivent dans un « programme » qui fournit des conditions favorables. Comme observateur aujourd'hui, et comme ancien étudiant de ces cours au BES alors, ce qui me frappe néanmoins ce sont les formidables *manières d'être* des personnes qui *font* (comme dit Jérôme) ces cours et ces programmes, et avec qui se *vivent* effectivement ces expériences.

Je veux dire ici qu'on ne peut pas penser faire reposer tout cela sur le fait d'avoir un mathématicien qui donne des cours bien adaptés et à l'intérieur d'un programme bien pensé. Le « bien adapté » et le « bien pensé », c'est surtout dans la rencontre entre l'étudiant futur maître et le formateur qu'on *le* rencontre, qu'*il* prend corps et qu'*il* se transforme en expérience mathématique d'une qualité particulière. C'est, dans mon cas, la *rencontre* avec (un) Frédéric, avec sa démarche et ses nuances, ses pauses bien aménagées et ses « vous travaillerez là-dessus » ou ses « mais attendez un peu, c'est pas tout à fait ça… » joués au bon moment, son habileté à écouter, à relancer, à être exigeant, à voir au-delà, à réinterpréter telle ou telle idée… c'est la rencontre avec toute cette richesse qui, pour moi, a fait de *ces* cours de mathématiques des expériences dont je garde le souvenir précieux d'avoir goûté ce fruit magnifique dont le mathématicien professionnel fait son pain quotidien.

En trois mots, je réalise (à nouveau ?) que si intéressantes que soient les questions de savoir « quelles mathématiques » offrir aux futurs enseignants, « comment » le faire, pour quelles « raisons » et avec quels « avantages » ou quels « risques », il ne faut pas perdre de vue l'essentiel. Et cet essentiel pour moi se trouve *dans la rencontre avec le formateur*, dans le moment de vivre l'activité mathématique. Et cela pour une raison toute simple : apprendre, connaître, se former, pratiquer son métier (d'étudiant, d'enseignant, de formateur, etc.) sont d'abord et avant tout des manières d'être ensemble. Exactement comme il le fait ici en venant nous parler au colloque, Frédéric donne pour moi un exemple formidable en ce sens : celui d'un mathématicien qui vient, et *véritablement*, à la rencontre de l'autre, qu'il soit futur enseignant… ou didacticien de profession.

2.7. Réaction de Bernard

J'ai finalement lu tout votre texte (et les ajouts de Jean-François) avec grand plaisir, avec un immense intérêt. J'aurais sans doute des choses à dire, des nuances à esquisser, mais mes contraintes de travail ne m'en laissent présentement pas du tout le temps. Je me permets de réagir à un élément, magnifiquement soulevé par Jean-François : l'enseignement et l'apprentissage en tant que rencontres entre individus. Bien sûr, il y a le « savoir » qui imprègne le tout. Mais c'est d'abord et avant tout de relations, de contacts entre êtres humains dont il s'agit. Oui aux livres, oui aux documents de toutes sortes, oui à Internet. Mais surtout oui aux contacts et aux rencontres… entre personnes en chair et en os ! Là-dessus je vous laisse, je dois retourner à mes oignons…

2.8. Réaction 2 de Jean-François

Je trouve les quelques lignes de Bernard magnifiques ! Cela fait un peu comme Fermat et ses notes dans les marges : « Oh, il y a ici quelque chose de fondamental, mais hélas ! je n'ai pas le temps de vous dire quoi. »

3. Conclusions

3.1. Conclusion hâtive de Frédéric, car le colloque approche…

Le colloque approche et je dois remettre un texte. Je laisserai donc des questions en suspens, dont la dernière de Jérôme : *Qu'est-ce que le mathématicien professionnel peut apporter, en donnant des cours, à des futurs enseignants ?* J'ai bien essayé de répondre. Dans mes tentatives, j'ai l'impression de me répéter ou de dire des lieux communs. Lorsque je réfléchis à la comparaison entre cette contribution et celle que feraient des enseignants praticiens dans la formation, comme le demande Jérôme, je vois un élément qui me paraît particulièrement intéressant. Dans les deux cas, l'intervenant peut puiser dans son expérience personnelle pour voir comment aborder une situation. Par contre, la nature même de ce dont ils sont experts me paraît si différente que je ne saurais m'avancer plus loin sur cette route. Peut-être le colloque sera-t-il un lieu d'échanges propice à cela ?

Toutefois, où en sommes-nous au terme de ces échanges ? Le point de départ était bien simple : Jérôme assistait à des cours, puis nous discutions. Nos premières conversations ont sans doute fait trop de place à la terminologie, les mathématiques avancées de l'un n'étant pas celles de l'autre : il aura été plus utile et plus facile de discuter autour de l'idée de *faire des mathématiques*, ce qui se présentait notamment en opposition avec la présentation de mathématiques réifiées. L'idée de la classe comme lieu d'activité mathématique est aussi apparue importante, comme en fait foi la réaction de Jean-François, qui mentionne une habileté à relancer, à être exigeant, à voir au-delà, à réinterpréter telle ou telle idée…

Mon principal objectif était que la plénière nous permette d'aller au-delà de la simple présentation de ce qui est fait à l'Université Laval. Je souhaitais mieux comprendre ce qui pouvait être intéressant ou particulier dans ce que nous faisons à l'Université Laval, et ainsi mieux savoir quoi présenter. Le texte que vous venez de lire est certainement très différent de ce que j'aurais écrit seul ! Je crois donc que l'objectif est atteint. Nos conversations ont touché la nature des cours dédiés, leurs objectifs, mais aussi la rencontre entre des personnes qui est au cœur de cette formation. J'espère que le colloque saura faire de même.

3.2. Conclusion de Jérôme, réfléchissant au colloque

La question de Frédéric à savoir si l'objectif de cet exercice de collaboration a été atteint est pertinente. De mon côté, je n'avais pas d'objectifs précis au début de cette aventure, si ce n'est que d'en apprendre encore plus sur ce qui se fait à l'Université Laval, sur la formation mathématique des enseignants et surtout, sur Frédéric lui-même comme formateur et mathématicien professionnel. Sur tous ces plans, j'ai été hautement satisfait et j'en sors enrichi, comme l'explique cette citation tirée d'un livre né d'échanges entre l'évêque Jean-Michel di Falco et l'écrivain Frédéric Beigbeder, qui se réclame mécréant :

> De ces rencontres, que Frédéric aurait préféré voir se tenir à trois heures du matin plutôt qu'à dix, chacun ressortait non point meilleur, mais enrichi (Di Falco et Beigbeder, 2004, p. 14).

Je ne saurais dire qui était l'évêque croyant et qui était le mécréant durant nos rencontres (que j'ai trouvées extraordinaires), et j'oserais dire que ces rôles se sont souvent inversés selon les sujets et les thèmes abordés. C'est probablement ce qui pour moi en a fait la richesse, dans ces croisements continus de regards et aussi dans les mises en parallèle alors que le croisement n'apparaissait pas nécessaire.

Finalement, en réfléchissant sur nos rencontres et nos discussions, je réalise que celles-ci illustrent d'une belle façon le but du colloque et de ce collectif, qui veut réunir et faire interagir des gens et des écrits d'horizons et d'intérêts différents au sujet de la formation mathématique des enseignants. Je ne peux donc que remercier Frédéric de m'avoir permis de vivre cette expérience et d'avoir pu m'enrichir grâce aux gens avec lesquels j'ai interagi au Département de mathématiques de l'Université Laval. Mais il n'y a pas que moi comme individu, car j'espère aussi que « nous » en sommes ressortis grandis, et c'est en fait ce que je souhaite à chacun, mais aussi au groupe de participants de ce colloque (et bien sûr aux lecteurs !).

Réaction 1 au texte de Frédéric Gourdeau *et al*.

Frontière floue entre didactique et mathématiques

Claudine Mary
Département d'études sur l'adaptation scolaire et sociale
Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences, technologies et mathématiques – CREAS
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke
claudine.mary@usherbrooke.ca

1. Introduction

Le texte auquel je réagis consiste en un dialogue entre un mathématicien et un didacticien, tous deux préoccupés par la formation mathématique des futurs enseignants. J'ai parfois eu envie de m'immiscer dans la conversation en posant des questions de clarification ou en interrogeant les interlocuteurs sur la portée de leurs propos. Je me contente ici cependant d'une réaction autour d'une question que m'a inspirée ce texte, à savoir, pour le type de cours de mathématiques qui est décrit: *Quelle est la frontière entre ce qui est du rôle du mathématicien qui enseigne aux futurs enseignants et celui du didacticien qui enseigne à ces mêmes futurs enseignants?* J'amorce une réponse à cette question qui n'est pas indépendante de mon expérience comme formatrice de futurs enseignants généralistes, et donc je m'éloigne parfois du contexte de départ qui est celui de la formation d'enseignants de mathématiques du secondaire. Tout d'abord, je débute en reprenant quelques idées émises dans le texte qui servent de toile de fond pour la suite.

2. Quelques idées clés du texte

Frédéric Gourdeau, mathématicien préoccupé par la formation mathématique des futurs enseignants des mathématiques au secondaire, souligne l'importance d'une compréhension riche et solide des mathématiques présentes dans le cursus du secondaire pour faire des choix éclairés (choix d'explications, choix d'activités d'apprentissage, choix de difficultés conceptuelles à traiter), compréhension sans laquelle on risque de « réduire [son enseignement] à une suite d'algorithmes à maîtriser ou à accepter des dérives mathématiques sans trop savoir quoi faire » (p. 104). Pour Frédéric Gourdeau, des cours de mathématiques dédiés aux futurs enseignants peuvent contribuer à enrichir cette compréhension.

Je retiens du texte les idées suivantes en lien avec ce que permet le cours décrit ou ce que peut permettre un cours de mathématiques dédié aux futurs enseignants de mathématiques : une attention accrue (par rapport aux cours de mathématiques non dédiés) à des thèmes proches de ceux de l'enseignement secondaire, à la dimension culturelle des mathématiques, aux difficultés conceptuelles inévitables ou bien à passer sous silence selon le niveau scolaire, à la transition nécessaire entre les mathématiques formelles (que les étudiants ont appris au cégep et qu'ils continuent à apprendre dans leurs cours de mathématiques non dédiés) et des mathématiques pour les élèves du secondaire. Aussi, des cours dédiés aux futurs enseignants donnent la possibilité de faire des liens entre les contenus enseignés à l'école et ceux des cours de mathématiques universitaires, et de situer ces contenus à l'intérieur du grand édifice mathématique. Surtout, c'est l'occasion de faire vivre aux étudiants une activité mathématique authentique, créative, et d'apprécier le rôle de certains processus tels l'exemplification, l'émission de conjectures et la généralisation. En reprenant les mots de Frédéric Gourdeau en conclusion, c'est l'occasion de mettre en évidence cette manière de faire, de comprendre et de créer qui est « mathématique ».

Le didacticien, Jérôme Proulx, attentif à la manière de faire du mathématicien-formateur, apprécie le caractère didactique des explications de celui-ci sur la manière dont on fait des mathématiques. Manière de faire didactique, dans le sens qu'elle cherche les conditions favorables pour faire comprendre ce que sont les mathématiques. Des exemples qui sont donnés par Jérôme Proulx émerge toutefois la question énoncée plus tôt : *Quelle est* *donc la frontière entre ce qui est du rôle du mathématicien qui enseigne aux futurs enseignants et le didacticien qui enseigne à ces mêmes futurs enseignants ?* Qui pourrait aussi se prolonger comme ceci (ou inversement peut-être) : *Dans quelle mesure la responsabilité de la formation mathématique est-elle ou doit-elle être ou ne pas être à la charge du didacticien ?* Poser ces questions ainsi est aussi poser la question des contenus des cours de didactique, un aspect fortement repris dans le colloque de Proulx et Gattuso (2010). Précisons que par didactique, j'entends le contenu des cours dédiés à l'enseignement des mathématiques dans nos programmes de formation de premier cycle au Québec, et je ne réfère pas aux théories didactiques qui sont le plus souvent abordées durant les cycles d'études supérieures.

3. Le travail du formateur-mathématicien et celui du formateur-didacticien

Les auteurs eux-mêmes posent des questions auxquelles ils ne répondent pas. De mon côté, je réponds partiellement, très partiellement, à un certain nombre des questions que j'ai soulevées plus haut en me positionnant, souvent, comme formatrice de généralistes.

3.1. Une intersection

Les exemples donnés par Jérôme Proulx, qui illustrent quelques bons coups du mathématicien-formateur qu'est Frédéric Gourdeau, sont-ils à caractère didactique ou mathématique ? Porter un regard critique sur les définitions fournies dans les manuels scolaires, réfléchir sur les conditions suffisantes pour obtenir des triangles semblables, distinguer l'activité de construction d'une figure selon une procédure de celle qui s'appuie sur des propriétés, sont des activités à dimension mathématique qui sont aussi effectuées dans les cours de didactique. Certainement, en l'absence de cours de mathématiques semblables à ceux décrits par Frédéric Gourdeau, la responsabilité de discuter de ces aspects est à la charge du didacticien qui enseigne aux futurs enseignants.

Pour les programmes de formation à l'enseignement qui forment des généralistes, toutes les occasions sont bonnes pour entreprendre une réflexion mathématique avec les étudiants. Je prends comme exemple une équipe d'étudiants qui devait se prononcer sur un énoncé. Une discussion s'engage entre les membres de l'équipe, incapables de faire consensus. L'observation des étudiants m'a permis de constater que pour certains, la réponse ne pouvait se trouver que dans un livre ou dans des notes de cours, et que les exemples ou contre-exemples, que les uns et les autres proposaient, étaient refusés. La situation dans laquelle les étudiants se sont trouvés a permis, en partie, de *vivifier*, peut-être, l'activité mathématique. De mon point de vue, une grande partie des situations mises en place dans les cours de didactique doivent être pensées de manière à contribuer au développement de l'esprit mathématique des étudiants-maîtres et à enrichir leurs connaissances mathématiques… *a fortiori* si aucun cours de mathématiques *dédié* n'existe dans le programme.

Toutefois, il m'apparaît que ce message n'est pas forcément explicite auprès des étudiants et qu'il mérite d'être plus amplement mis de l'avant.

3.2. Des visées différentes

Cependant, dans le cours de didactique, l'élève et l'enseignement sont au cœur des préoccupations de l'étudiant-maître et des objectifs du cours de formation. Dans ces cours, sauf avis contraire, une grande part est accordée aux stratégies et aux difficultés des élèves pour un concept donné et aux interventions visant à donner du sens à ce concept pour les élèves dans différents registres sémiotiques. Centré sur ces préoccupations, certains processus mathématiques peuvent passer au second plan, surtout si les étudiants ont peu d'expérience en mathématiques. Même dans le cas où des cours de mathématiques auraient permis de travailler certains processus mathématiques, ceux-ci doivent être revisités dans les cours de didactique, car les choix faits pour l'enseignement sont conditionnés par des considérations autres que seulement mathématiques, à tort ou à raison. Par exemple, les futurs maîtres peuvent choisir de valider par quelques exemples par souci de démontrer la vraisemblance d'un énoncé, en pensant strictement aux savoirs mathématiques visés, en négligeant ainsi les processus de généralisation et de preuve à développer. Je me souviens de cette étudiante qui refusait d'envisager autre chose que des exemples pour valider un énoncé parce qu'elle était convaincue du résultat, et que ses élèves seraient satisfaits de cette preuve.

Bien sûr, nous pouvons considérer que les processus de preuve et de généralisation, pour ne citer que ceux-là, doivent aussi être pris en compte dans les cours de didactique et qu'ils se traduisent en objectifs clairement énoncés. Malgré cela, je pense que souvent, pour la formation des généralistes, peut-être à cause de leur transversalité, ils ne le sont pas assez. Il m'apparaît que les formations continues sont l'occasion de redonner de l'importance à ces idées transversales.

3.3. Des positions distinctes

Au baccalauréat en adaptation scolaire et sociale, nous avons créé un cours intitulé «Activité et culture mathématique» (Mary et Squalli, 2006) qui présente quelques ressemblances avec celui décrit par Frédéric Gourdeau. Il s'agit du premier cours du volet mathématique du programme, et c'est aussi le seul cours non didactique de celui-ci. En effet, les élèves et l'enseignement y sont peu présents. Dans ce cours, les étudiants sont placés en activité de résolution de problèmes et, alors, différents raisonnements mathématiques et certaines idées clés telles l'exemplification, l'émission de conjectures, la généralisation sont explorés, comme en parle d'ailleurs Frédéric Gourdeau. Les étudiants sont aussi amenés à apprécier des résolutions de problèmes historiques ou des résolutions par des personnes non scolarisées. Ils ont également à réfléchir sur le lien entre mathématiques et réalité en réalisant une exposition sur l'utilisation des mathématiques dans le monde d'aujourd'hui. Ce type de cours de mathématiques permet à l'étudiant de prendre une posture d'apprenant des mathématiques en s'écartant pour un temps (pas complètement, mais quand même suffisamment) de la posture de futur enseignant qu'il adopte assez rapidement. Dans le cours de didactique, comme l'élève et l'enseignement sont au cœur du discours, la position est davantage celle de futur enseignant.

Le cours permet donc de prendre une distance par rapport à l'enseignement, de dégager la réflexion de l'intervention enseignante, qui parfois voile la lunette mathématique (distance nécessaire même en début de parcours). Bien sûr, il y a une question de pertinence à défendre. Pour de futurs généralistes qui veulent enseigner à des enfants ou à de jeunes adolescents, la préoccupation est d'abord et avant tout l'élève, ce qui peut être différent pour les futurs enseignants du secondaire qui ont choisi l'enseignement des mathématiques en particulier. En adaptation scolaire, le tout est encore plus flagrant, puisque la motivation est avant tout celle d'aider les élèves.

Ce cours de mathématiques vaut deux crédits. C'est bien peu, mais il apparaît crucial pour, d'une part, marquer la place des mathématiques dans le programme et sa place comme cadre de référence et, d'autre part, pour augmenter un tant soit peu la culture mathématique des futurs enseignants. Personnellement, avoir un lieu où les étudiants ont à faire des activités mathématiques pour elles-mêmes m'apparaît primordial. Toutefois, cela n'est sans doute pas encore suffisant… d'autant plus qu'il faut composer avec la dimension affective et permettre à nos étudiants d'apprécier l'activité mathématique que nous leur proposons.

3.4. Une nouvelle intersection

Les défis de l'enseignement des mathématiques s'accentuent. L'extrait suivant d'un texte publié par l'UNESCO, rédigé par Michèle Artigue, en donne une idée :

> Il ne suffit plus aujourd'hui de maîtriser les savoirs basiques concernant les nombres et les grandeurs qui ont longtemps constitué la condition mathématique de l'intégration sociale.
>
> Aujourd'hui, la littératie mathématique doit en particulier permettre aux individus de comprendre, analyser, critiquer des données multiples dont la présentation engage des systèmes de représentation divers et complexes, numériques, symboliques et graphiques, le plus souvent en interaction. Elle doit leur permettre de faire des choix raisonnables, en s'appuyant sur la compréhension, la modélisation, la prédiction, et de contrôler leurs effets, dans des situations inédites et souvent empreintes d'incertitude. Il est donc essentiel notamment que tout individu soit, au cours de sa scolarité de base en mathématiques, progressivement mis en contact avec la complexité du monde numérique actuel, apprenne à s'y repérer et y agir, qu'il se familiarise avec la diversité des modes de représentation qui y sont utilisés. Il importe qu'il soit aussi progressivement familiarisé avec les modes de raisonnement probabilistes et statistiques qui sont nécessaires pour mettre la pensée mathématique au service de la compréhension des nombreux phénomènes qui, dans les sciences comme dans la vie sociale, font intervenir l'incertain et le risque. (Artigue, 2011, p. 14.)

Parmi les idées à traiter en mathématiques, il y a certainement celles de modèle. Le plus souvent, les concepts et les modèles mathématiques restent les portes d'entrée de l'enseignement des mathématiques. Le processus même de modélisation est encore peu présent dans l'enseignement. Des formations données auprès d'enseignants du secondaire (formation continue) révèlent que faire entrer la modélisation dans les pratiques ne va pas de soi. Cela s'observe même lorsqu'une discussion sur les modèles mathématiques à utiliser dans un problème de la vie courante s'impose (Theis et Mary, à paraître).

Dans le programme de formation à l'enseignement auquel j'appartiens, il existe un cours de didactique de la statistique et des probabilités. L'ajout de ce cours dans le programme a été motivé entre autres, pour la statistique, par son ancrage dans le monde réel d'aujourd'hui, par le type de raisonnement qu'elle permet et par les possibilités qu'elle offre de contribuer à des projets multidisciplinaires. Ce cours est particulièrement propice pour faire entrer les étudiants dans un processus de problématisation et de choix d'outils pour répondre aux questions qu'ils se posent. C'est le choix didactique que nous avons fait comme porte d'entrée. Or ce n'est pas simple. Les étudiants trouvent le cours très difficile. Les processus à mettre en œuvre correspondent pourtant à ceux inscrits dans le programme d'études. Souvent, les étudiants appliquent la moyenne, le mode ou la médiane sur n'importe quelles données numériques de façon non pertinente au lieu de chercher à répondre à la question posée. Ils ont pourtant, pour une grande partie, suivi des cours de méthodes quantitatives au cégep. En statistique, les recommandations pour l'enseignement, provenant du programme d'études ou des didacticiens de la statistique, s'expriment en matière de développement d'une pensée statistique et, pour ce faire, de situations statistiques authentiques. Pour pouvoir suivre ces recommandations, il faut, me semble-t-il, que les étudiants aient eu des expériences dans ce sens. Est-ce que cela peut se faire seulement dans un cours de didactique des mathématiques ? Pour faciliter les choses, dans le cours de mon programme, la tentation peut être de revenir à une organisation consistant à enseigner les concepts et ensuite faire de l'analyse de données réelles en fonction de questions que l'on se pose. Je ne pense pas que cela règle le problème, au contraire.

Si les futurs enseignants ont comme mandat de développer une pensée statistique ou, plus généralement, mathématique chez les élèves, il apparaît important de miser sur le développement de cette pensée chez nos étudiants. Est-il utopique de vouloir le réaliser, compte tenu des expériences mathématiques antérieures de nos étudiants ?

3.5. Une expertise mathématique souhaitée

Je poursuis ma réflexion en lien avec le développement d'une pensée statistique, sujet de la section précédente. Lors de la conception de situations d'enseignement-apprentissage permettant à mon sens le développement de cette pensée, il m'est arrivé de me demander ce qu'un statisticien professionnel en dirait. Ce n'est là qu'un exemple. Je rejoins donc les propos de Frédéric Gourdeau sur la nécessaire collaboration entre mathématicien et didacticien. Dans le texte de l'UNESCO (Artigue, 2011) cité plus haut, cette collaboration est souvent soulignée :

> […] le défi d'une éducation mathématique de qualité pour tous nécessite la mise en synergie d'une diversité d'expertises, celles des mathématiciens, des enseignants, des formateurs d'enseignants et des didacticiens, notamment (p. 33).

3.6. Les mathématiques comme cadre de référence

Frédéric Gourdeau mentionne que les étudiants doivent avoir une bonne compréhension des mathématiques pour éviter une *algorithmisation* à outrance de l'enseignement et comme rempart aux dérives. J'ai parlé plus haut des mathématiques comme cadre de référence pour l'intervention. Le cadre de référence mathématique n'est pas celui qui guide d'emblée les futurs enseignants généralistes et ceux en adaptation scolaire en particulier. En effet, soucieux d'adapter leur enseignement pour aider les élèves et de trouver des moyens pour qu'ils réussissent, ils sont souvent à la recherche de façons de faire qui vont parfois à l'encontre du développement de la pensée mathématique. Je vais donner un exemple qui n'est pas précisément mathématique, mais qui permettra de comprendre. Une étudiante veut travailler avec ses élèves un lien de causalité à travers de petites histoires formulées sous forme d'images sur trois cartons : 1) un enfant avec les mains sales, 2) un enfant qui se lave les mains au lavabo, 3) un enfant avec les mains propres. Après avoir consulté des experts et avoir effectué une réflexion personnelle, elle décide de ne garder que deux images, puisque ses élèves ont une déficience intellectuelle, et que trois images, c'est trop pour eux. Elle conserve les images 1 et 3. Face à mon étonnement, elle m'indique que « ces élèves ne pensent pas comme nous ». Chez cette étudiante, c'est le type d'élèves qui guide le choix sans vigilance didactique (Butlen et Masselot, 2011). Dans la formation à l'enseignement en adaptation scolaire, là peut-être plus qu'ailleurs, il importe de forcer l'analyse de tâches en fonction des enjeux d'apprentissage.

4. Conclusion

Pour l'enseignant au secondaire, la question posée est *Quelle formation mathématique pour les enseignants ?* Le texte de Frédéric Gourdeau et de Jérôme Proulx fait des propositions en ce sens. Pour la formation du généraliste, la question se pose en ces termes : *Est-ce que la responsabilité de la formation mathématique est entre les mains des didacticiens ?* Dans l'état actuel des choses, la formation mathématique des généralistes se fait en grande partie par l'intermédiaire des cours de didactique. Toutefois, *est-ce qu'elle devrait l'être ?* Ma position est que oui, du moins en partie, mais il semble aussi important de ménager des espaces pour promouvoir une réflexion qui soit strictement mathématique.

Former à la didactique tout en formant aux mathématiques, c'est le défi que plusieurs tentent de relever. Le défi est grand, mais il faut compter sur la formation continue, qui permet de reprendre la réflexion sur des plans différents et multiples. Peut-être faut-il aussi poser la question de la formation préalable ! Lors d'une consultation de didacticiens des mathématiques sur la formation mathématique de nos étudiants en adaptation scolaire, la proposition de notre équipe a été celle d'une formation accrue au cégep, par l'intermédiaire de cours de résolution de problèmes. Nous n'avons pas eu de nouvelles depuis cette consultation…

En terminant, je dirai que, dans le texte auquel j'ai réagi, je me suis intéressée aux caractéristiques du cours de mathématiques dédié de Frédéric Gourdeau, dont certaines caractéristiques pouvaient s'appliquer à des cours pour généralistes, sans sous-estimer le niveau avancé des mathématiques dont il pouvait être question. La question que je pose maintenant à Frédéric Gourdeau est celle-ci : *Est-ce que son cours de mathématiques dédié, avec ses caractéristiques, pourrait exister sans les autres cours de mathématiques ?* Je pose également la question pour la formation de généralistes : *À quel niveau de mathématiques les cours de didactique ou les cours de mathématiques doivent-ils mener les étudiants ?*

Réaction 2 au texte de Frédéric Gourdeau *et al.*

Mathématiques de l'explorateur ou du bâtisseur ?

Deux perspectives incompatibles ?

Denis Tanguay
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
tanguay.denis@uqam.ca

1. Introduction

Le texte de Frédéric Gourdeau et de Jérôme Proulx soulève beaucoup de questions intéressantes, mais fait aussi référence à des contextes institutionnels particuliers, qui rendent les généralisations difficiles, notamment quand on ne connaît pas ces contextes. Comme le souligne Jean-François Maheux (aux pages 116-118 du texte), les expériences personnelles de chacun prennent une certaine place dans le texte et je mets donc cartes sur table à cet égard : je connais (très) bien le contexte de la formation des enseignants du secondaire à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), mais pas celui de l'Université Laval, où je n'ai ni étudié, ni enseigné. Je n'ai jamais assisté à un cours de Frédéric Gourdeau et je ne connais de lui que des interventions – toujours pertinentes et intéressantes – dans des colloques.

Avec l'idée de ne pas trop me disperser, je fais dans un premier temps l'exercice d'établir et de reformuler quelques questions clés auxquelles j'essaierai de réagir. Il y a déjà là un élément de subjectivité : mes questions clés ne sont pas nécessairement celles des autres, mais ce sont celles qui m'intéressent le plus, à propos desquelles mes réflexions ont le plus de chances d'être intéressantes, voire judicieuses. Je préviens sans ambages qu'il ne s'agit pas là de la seule composante subjective de ma réaction, loin de là ! Voici donc les questions retenues, des plus générales aux plus particulières.

- Quelle sorte de maîtrise mathématique attend-on des (futurs) enseignants du secondaire ? Les cours de mathématiques plus « avancés » sont-ils pertinents pour obtenir d'eux cette maîtrise ?
- Ces cours avancés sont-ils plus efficaces s'ils sont adaptés aux programmes de formation à l'enseignement, cours que le texte dénomme des « cours dédiés » ? Si oui, en quoi doivent (ou plus modestement peuvent) consister ces adaptations ?
- De telles adaptations portent-elles uniquement sur les contenus ? L'explicitation des liens, de la filiation entre les contenus avancés et les mathématiques du secondaire y est-elle souhaitable, voire nécessaire ?
- Ne peut-on également envisager des adaptations sur les manières de faire des mathématiques, sur les manières de faire *vivre* les mathématiques aux étudiants futurs maîtres ? Les cours de mathématiques dédiés doivent-ils, d'une façon ou d'une autre, initier ces étudiants à la *recherche* en mathématiques ? Si oui, jusqu'où peut ou doit aller cette initiation ?
- Et la didactique des mathématiques dans tout cela ? Peut-on en intégrer des éléments dans de tels cours ? Où et comment les cours de didactique des mathématiques contribuent-ils à la maîtrise mathématique visée ? Quel arrimage doit-il y avoir entre la didactique et la formation mathématique ? De l'extérieur ou de l'intérieur des cours de didactique ?

2. Une maîtrise mathématique nécessaire ?

Comme Frédéric Gourdeau, j'ai d'abord une formation de mathématicien, et ce n'est sans doute pas étranger à ma conviction profonde qu'une maîtrise mathématique solide est nécessaire – sans être suffisante – à l'enseignant de mathématiques compétent. Frédéric Gourdeau explique bien que cette maîtrise n'est pas essentielle que du strict point de vue mathématique, elle l'est aussi du point de vue didactique : pour bâtir les activités, organiser les explications, pour ordonner, agencer, enchaîner de façon cohérente les contenus et les raisonnements sous-jacents… À cela j'ajoute le point de vue *pédagogique* : être à l'aise avec les élèves, ne pas être constamment sur la défensive, sur le mode « réaction » et ne pas enseigner avec la crainte paralysante des questions et des problèmes embarrassants. Non pas que ceux-ci ne surviendront plus, mais je reste persuadé qu'il faut avoir entraperçu les extraordinaires foisonnement, intrication et complexité des mathématiques avancées – disons minimalement celles du XVIII^e siècle – pour mesurer sereinement sa propre indigence et l'accepter.

Je ne crois pas du tout à cette idée, qui refait surface invariablement quand il est question d'enseignement, qu'un enseignant puisse être trop « calé » en maths, que des connaissances mathématiques trop « savantes » puissent inhiber la capacité à comprendre les élèves et à donner des explications bien adaptées. Je n'y crois pas, d'abord parce que mon expérience d'étudiant m'a mis en contact avec plusieurs excellents enseignants qui étaient par ailleurs des mathématiciens chevronnés, et même des chercheurs renommés. Je n'y crois pas parce que mon expérience personnelle avec les mathématiques avancées n'a toujours induit chez moi qu'une clarification des concepts situés plus « bas » dans l'édifice, et que cette clarté des idées donne accès, selon mon évaluation et ma compréhension, à de meilleures explications.

Frédéric Gourdeau donne l'exemple de la règle $a^0 = 1$. Comment expliquer aux étudiants ou aux élèves qu'on ne peut, à proprement parler, « prouver » cette règle, qu'il s'agit d'une convention, mais que par ailleurs c'est la « bonne » convention, celle qui donne lieu à des structures (algébriques) qui se tiennent, à des mathématiques riches et qui fonctionnent bien. Comme la plupart, j'ai été instruit au secondaire des arguments standard par lesquels on justifie cette règle : régularité dans des suites, conservation de la règle $a^n \times a^m = a^{n+m}$ pour n et m entiers, etc. Mais ce n'est véritablement qu'à l'université, à travers l'étude des structures algébriques et de l'isomorphisme entre $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{R}^{*+}, \times)$ réalisé par toute exponentielle de base $a > 0$, que j'ai eu la conviction d'appréhender cette règle dans toute sa profondeur et de comprendre véritablement l'identité des structures en cause. Et je me crois nettement mieux outillé pour expliquer la règle depuis. La mise au point suivante m'apparaît cruciale : cela ne veut par ailleurs absolument pas dire que mon éventuelle explication passerait par l'explicitation de cet isomorphisme !

J'ai parlé d'une maîtrise nécessaire mais non suffisante. J'ai parlé de professeurs de mathématiques calés et en même temps, excellents pédagogues, mais nous avons tous aussi en tête quelque excellent mathématicien incapable de « sortir de sa bulle », comme le dit de façon si imagée ma collègue Mireille Saboya. Les formateurs que nous sommes avons tous côtoyé des étudiants et stagiaires antérieurement formés en mathématiques pures, en physique ou en génie, incapables de se dépêtrer du formalisme où ils enfermaient les mathématiques, qu'ils cherchaient à transmettre comme ils les avaient apprises à l'université. Plus de connaissances mathématiques ne signifient pas (toujours) une meilleure compréhension. Mais nous côtoyons aussi chaque jour des étudiants chez qui les carences mathématiques hypothèquent sérieusement tout travail didactique viable. Des mathématiques avancées pour les futurs enseignants, oui, mais lesquelles et comment ?

3. Quelles mathématiques ?

La question des contenus mathématiques de tout programme est toujours difficile, et l'est d'autant que les mathématiques sont de plus en plus vastes, de plus en plus variées, avec des domaines considérés auparavant comme marginaux qui prennent soudain une place importante : on n'a qu'à penser aux mathématiques discrètes, entraînées par l'essor de l'informatique. Devant les choix à faire en vue d'élaborer un programme de formation à l'enseignement, sachant qu'on devra de toute façon laisser de larges secteurs de côté, il n'y a de prime abord aucune raison pour ne pas privilégier les mathématiques qui sont plus directement en lien avec celles à enseigner. Mais le problème est en partie là : comment déterminer ce qui est en lien et ce qui ne l'est pas, ou pas suffisamment ? Des liens, on peut toujours en trouver… Doit-on s'en tenir aux domaines centraux que sont l'arithmétique (et les nombres), l'algèbre (incluant les fonctions) et la géométrie ? Quelle place donner aux probabilités, aux statistiques, à la logique, à l'analyse, aux mathématiques discrètes, à la théorie des graphes ? Doit-on d'emblée exclure tout ce qui apparaît de prime abord éloigné des mathématiques du secondaire, comme les équations différentielles, le calcul à plusieurs variables ou la géométrie différentielle ? C'est le choix qui a été fait à l'UQAM, et il semble bien que celui de l'Université Laval soit moins catégorique. Chaque choix a des répercussions sur l'ensemble du cursus, et tout cours de mathématiques prend nécessairement la place d'un cours de didactique, de psychopédagogie ou d'informatique. Au Québec, d'une université à l'autre, il y a de grandes variations sous ce rapport et en fin de compte, je suis de l'avis de mon collègue André Boileau pour qui c'est très bien ainsi, parce que cette diversité est une richesse. Une richesse à préserver…

La place est comptée, on est bien d'accord ! Raison de plus pour maximiser l'efficacité des cours de mathématiques dans les programmes en enseignement, ce qui semble plaider pour des cours de mathématiques adaptés, ou dédiés, et met à l'avant-plan la question du comment. Il y a alors à mon avis deux écueils dont il faut se méfier.

4. Comment les aborder ?

Je me méfie de la présomption qu'on peut indéfiniment creuser les mathématiques du secondaire en restant au même niveau, qu'on peut pousser systématiquement l'analyse très pointue des concepts élémentaires sans faire de pas de côté, sans se donner de poussées vers le haut, pour regarder les choses de plus haut, justement. Le risque est alors grand de provoquer chez les étudiants futurs maîtres un effet de saturation, de lassitude qui nuit au travail efficace, voire à la compréhension. Un tel effet, je l'ai plus d'une fois observé dans nos cours de didactique au Baccalauréat en enseignement au secondaire, concentration mathématiques à l'UQAM. Il est important de savoir laisser un sujet pour y revenir plus tard, avec de meilleurs outils. Tout l'apprentissage des mathématiques se fait d'ailleurs ainsi. S'il fallait, au primaire, ne délaisser les explications sur la multiplication des entiers que quand les jeunes en ont compris à fond les moindres détails, décortiqué les moindres procédures et algorithmes, personne ne dépasserait jamais la sixième année !

C'est souvent une caractéristique de l'élève ou de l'étudiant fort que d'avoir la capacité de travailler avec un concept ou un processus avant d'en avoir clarifié toutes les zones d'ombre ; d'être prêt à avancer dans l'in-connu, en terrain instable, en acceptant qu'une part de la compréhension ne viendra que « plus tard » ; de « faire confiance », en quelque sorte, aux mécanismes d'apprentissage se déroulant sur un temps long. De faire confiance, également et par conséquent, à ses enseignants ; et l'on rejoint alors les propos de Jean-François Maheux, pour qui la relation d'enseignement est avant tout une rencontre : cette rencontre n'est selon moi pleinement profitable qu'à travers la *confiance mutuelle*. Les étudiants futurs maîtres doivent faire confiance aux formateurs quand ceux-ci leur proposent un travail dont le lien avec les mathématiques qu'ils seront appelés à enseigner n'est pas immédiat. Mais ces formateurs doivent en retour gagner et entretenir cette confiance :

- en choisissant judicieusement et soigneusement les sujets et le travail mathématiques proposés, pour que ceux-ci soient accessibles, soient dans cette « zone proximale de développement » qu'a caractérisée Vygotski ;
- en sélectionnant dans ces sujets des aspects, des caractéristiques, des éléments de connaissance, des perspectives qu'on peut mettre en lien, direct ou indirect, avec la matière du secondaire ; en mettant en valeur ces aspects ;
- en prévoyant une organisation du travail permettant une exploration de ces liens, un réinvestissement possible des mathématiques traitées dans une réflexion, apte à approfondir les mathématiques situées en amont.

5. Un deuxième écueil

Des mathématiques avancées, ou peut-être simplement « plus » avancées (que celles du secondaire), ou des mathématiques adaptées, dédiées ; oui, mais pas n'importe lesquelles et pas n'importe comment. Il y a aussi le danger selon moi que par crainte des théories trop élaborées, trop abstraites, on s'en tienne au tourisme, on « butine », on cherche à toucher à trop d'aspects particuliers – parce qu'on voit ici ou là un élément important des mathématiques du secondaire, une difficulté particulièrement tenace chez les élèves, ou même simplement un sujet « à la mode », accrocheur pour les élèves – en perdant de vue la qualité architectonique de l'édifice mathématique, les relations d'enchaînement des concepts, des définitions, des justifications ou même des preuves, tout ceci n'étant véritablement mis en relief qu'à travers une construction rigoureusement agencée et échafaudée de la matière elle-même. Or, c'est en grande partie cette qualité architectonique qui fait la beauté des mathématiques, et il faut à mon avis donner aux étudiants futurs maîtres accès à cette beauté, en espérant qu'ils sauront la faire partager aux élèves.

Cette sensibilité à la qualité architectonique des mathématiques, cette capacité à avoir une vision minimalement holistique de l'édifice mathématique, peut être considérée comme faisant partie de ce qu'au Groupe de travail 7 du colloque *Espace mathématique francophone*, en 2009, nous avons appelé les « aptitudes et compétences mathématiques transversales », celles qui sont plus ou moins indépendantes des sujets particuliers (Azrou, Tanguay et Vandebrouck, 2009). D'autres parmi ces aptitudes transversales sont : la capacité à poser et à résoudre (si possible) un problème, à rechercher exemples et contre-exemples, à expérimenter, généraliser, modéliser, définir, conjecturer, prouver, formaliser, abstraire… Pour peu qu'on soit constructiviste, on cherchera à développer ces aptitudes en faisant vivre aux étudiants futurs maîtres une activité mathématiquement signifiante. Selon l'hypothèse de recherche d'une équipe comme celle de *Maths-à-modeler* (voir, par exemple, Godot et Grenier, 2004, ou Tanguay et Grenier, 2010), ces aptitudes se développent au mieux quand l'activité de l'étudiant est aussi proche que possible de celle d'un véritable chercheur en mathématiques ; ce que Frédéric Gourdeau décrit comme « une activité mathématique authentique » et que, si j'ai bien compris ses propos, il cherche lui-même à faire vivre à ses étudiants.

6. La quadrature du cercle…

On peut alors être porté à voir un paradoxe, une incompatibilité : d'un côté l'activité du chercheur, certainement dans les phases heuristiques initiales, est avant tout ouverte, flexible, divergente (ou centrifuge), inventive, avec des outils d'exploration, d'analyse et de validation (provisoire) qui incluent les raisonnements inductif et abductif, le recours aux analogies et aux métaphores, à des représentations intuitives souples et variées ; mais de l'autre côté l'appréhension architectonique dont j'ai soulevé l'importance est le fruit d'une activité où l'on « met son énergie à rendre les arguments mathématiques plus explicites et formels » (Thurston, 1994, p. 169), où l'on cherche à resserrer, refermer, solidifier les constructions, une activité convergente (ou centripète) et synthétique, donnant une place centrale au raisonnement déductif et à la démonstration. Le travail de Bourbaki au XX^{e} siècle en est l'exemple paradigmatique. Les curriculums des années 1970, issus du mouvement dit des « mathématiques modernes », mettaient clairement l'accent sur des démarches de ce second type. Les curriculums qui les ont suivis ont marqué un retour du balancier, et une revalorisation des démarches plus ouvertes du premier type. La plus récente réforme québécoise représente peut-être le point au bout de la course du pendule, dans ce mouvement de retour.

Doit-on privilégier l'une des deux démarches en formation des maîtres au détriment de l'autre ? Mais sont-elles vraiment incompatibles, ou en compétition ? N'est-il pas important de sensibiliser les étudiants à ces deux pôles de l'activité mathématique ? Dans Durand-Guerrier *et al.* (à paraître), nous faisons valoir que l'activité de preuve – la preuve comme processus, qui inclut les phases de recherche, avec ce que les didacticiens conviennent maintenant d'appeler l'*argumentation,* à savoir le discours informel de justification ; mais qui inclut également les phases d'élaboration et d'écriture des raisonnements plus formels – résulte essentiellement d'allers et retours entre une exploration sémantique des objets mathématiques en cause et un travail syntaxique sur les définitions, propriétés, théorèmes et formules liés à ces objets :

> *In sum, students need to experience two main practices : a divergent exploratory one and a convergent validating one. They would then become familiar with the openness of exploration, that is, its « opportunistic » character and the flexibility of its validation rules, but they would also learn the rigorous rules needed to write a deductive text and the strict usage they must ascribe to words, symbols and formulas when constructing or organizing a theory.* […] *It seems clear to us that isolating one to the detriment of the other weakens both, because in our view they are related dialectically. And in any case, once we consider exposing students to a wide range of experiences, it is crucial to help them face the contradictory differences within the diversity of practices used in argumentation and proof and to make them aware of when and how they can be used.* (Durand-Guerrier *et al.*, à paraître.)

7. … serait-elle résolue ?

Autrement dit, les deux démarches seraient, de façon essentielle et dialectique, inter-reliées. Et il s'agirait alors de voir comment les deux peuvent être abordées et travaillées dans ce que seraient les cours de mathématiques « dédiés » des programmes de formation. On peut certainement envisager des cours de résolution de problèmes, au sens de Mason, Burton et Stancey (1994) ou de Pólya (1962), où l'aspect recherche est priorisé et en parallèle des cours ciblant des sujets plus précis, autant que possible liés aux contenus du secondaire, mais où des échafaudages théoriques plus vastes sont proposés : géométrie synthétique ; géométries analytique et vectorielle avec éléments d'algèbre linéaire ; arithmétique et théorie des nombres ; théorie des équations avec éléments d'algèbre abstraite ; les fonctions, la variation, l'infini, les limites, avec éléments d'analyse, etc.

Pour ces cours, j'ai parlé de s'appliquer à réinvestir le travail dans l'approfondissement des mathématiques du secondaire, et Frédéric Gourdeau donne des pistes pour mettre en œuvre un tel réinvestissement. Plus pragmatiquement, sans chercher à spéculer sur ce que doivent être les contenus des cours, on peut certainement envisager à l'intérieur d'un même cours des allers et retours entre ce que j'ai décrit comme les deux pôles de l'activité mathématique, des phases en alternance, des discussions, des considérations « méta » sous forme de bilans, à condition toutefois de maintenir une certaine cohérence au cours, en cherchant à y dérouler un « fil conducteur ». En veillant aussi à ce que le méta, les considérations extra- ou paramathématiques ne prennent pas toute la place, n'engendrent pas un « bruit » qui finisse par entraver le travail proprement mathématique (Azrou, Tanguay et Vandebrouck, 2009). Après tout, il faut bien ***aussi*** faire des maths !

8. Et la didactique dans tout cela ?

Peut-on également envisager de faire de la didactique dans de tels cours ? Certainement oui, à mon avis :

- en explicitant la filiation avec les mathématiques du secondaire ;

- en liant certaines difficultés des élèves à la complexité mathématique même, certaines de leurs conceptions aux obstacles qui se sont érigés à la naissance du concept, à travers une analyse historique ou épistémologique ;
- en établissant les raisonnements clés, les enchaînements clés ;
- en travaillant des définitions équivalentes, en examinant à quels développements alternatifs certains choix conventionnels ou axiomatiques peuvent donner lieu ;
- en variant les modes de représentation, les justifications, les explications, etc.

L'inverse est également vrai selon moi : on fait et on doit faire des mathématiques dans les cours de didactique, notamment, mais pas uniquement, ces mathématiques du « pedagogical content knowledge » (Shulman, 1986) dont a parlé Nadine Bednarz dans sa conférence d'ouverture (voir Préliminaires). Bien que ce soit lié à ce qui précède, il s'agit d'un vaste et autre sujet, que la place ici impartie – notamment ces marges qu'on m'impose, beaucoup trop étroites ! – ne me permet pas de développer plus avant.

SECTION 3

Texte plénier 3

Quelle articulation entre formation mathématique et formation à l'enseignement des mathématiques ?

Essai d'analyse et point de vue d'un didacticien des mathématiques

Hassane Squalli
Département de pédagogie
Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences, technologies et mathématiques – CREAS
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke
hassane.squalli@usherbrooke.ca

1. Introduction

> Soit $\boldsymbol{a} = \mathbf{0{,}12345678910111213\ldots}$, l'écriture décimale du nombre $\boldsymbol{a}$ est formée des termes de la suite des entiers naturels écrits en base dix. Calculez $\mathbf{3}\boldsymbol{a}$.

Cette question me fut posée par Alain Bouvier lors d'un stage de formation des formateurs à Grenoble à la fin des années 1980. D'abord surpris par la nature de la question, ma fierté de jeune mathématicien en a pris un coup quand après quelques minutes, je n'arrivais pas à donner de réponse. Qui plus est, je venais de soutenir six mois auparavant une thèse de troisième cycle en théorie des nombres ! L'idée qu'un élève du secondaire pouvait répondre à cette question, alors que je n'y arrivais pas, me hantait. Car après tout, la question aurait bien pu être posée à un élève du secondaire !

J'ai informé M. Bouvier que j'allais réfléchir tranquillement à la question en soirée après la fin des ateliers et lui revenir le lendemain avec le fruit de mes réflexions. Alors que mes collègues profitaient des activités socioculturelles proposées par les organisateurs de la formation, je tentais, dans ma chambre d'étudiant, de relever le défi. Et c'est là que j'ai fait une découverte importante : je ne connaissais pas suffisamment les nombres, malgré mes sept ans de cours universitaires de mathématiques[1] ! J'assiste régulièrement à des prises de conscience du même type chez certains de mes étudiants dans les cours de didactique des mathématiques, lorsqu'ils se heurtent à la difficulté de répondre à une question en lien avec les contenus mathématiques du secondaire !

Cette anecdote met en évidence le décalage entre une formation universitaire en mathématiques dans une logique purement disciplinaire et une formation universitaire en mathématiques dans la perspective de leur enseignement. Qu'est-ce qui explique ce décalage ? Comment peut-on le réduire ? Par quel dispositif de formation ? Quel est le rôle des cours de didactique des mathématiques ? Ces questions rejoignent le problème de la nécessaire articulation entre une formation mathématique et une formation à l'enseignement des mathématiques.

Le but de ce texte est de contribuer à la réflexion autour de ces questions en se limitant au cas de la formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire, dans le contexte des programmes de formation de l'Université de Sherbrooke, mon institution d'attache.

2. Éléments de contexte

L'étude de la question de l'articulation entre une formation mathématique et une formation à l'enseignement des mathématiques nécessite la prise en compte du contexte du système de formation.

À l'instar d'autres professions, le niveau minimal de compétences exigé pour être qualifié d'enseignant, dans nos sociétés d'aujourd'hui, est si haut que personne ne peut se proclamer enseignant sans une robuste formation professionnelle initiale qui doit se continuer tout au long de la

1. Des éléments de réponse à la question sont donnés à la fin du texte, en appendice.

carrière. Cette exigence est dictée par les grands défis posés à la profession enseignante. Il n'est pas possible d'en faire ici un inventaire complet, mais parmi les défis les plus importants, on peut citer ceux-ci :

- *Le passage d'une logique d'enseignement à une logique d'apprentissage.* Enseigner n'est pas une fin en soi, ce n'est qu'un moyen pour favoriser les apprentissages des élèves, de tous les élèves, même ceux éprouvant des difficultés. Cette ouverture à l'apprentissage de tous confronte l'enseignant à la diversité des apprenants ; à prendre en compte les connaissances personnelles des élèves.
- *Le passage d'une pédagogie centrée sur la réponse à une pédagogie centrée sur les problèmes.* Enseigner n'est pas transmettre des savoirs homologués, mais créer un lieu favorisant la construction des connaissances par les élèves. Le rôle de l'enseignant est de proposer aux élèves des tâches riches en constructions mathématiques et de gérer de façon pertinente les activités des élèves engendrées par ces tâches.
- *Le recours à un enseignement interdisciplinaire*, principalement entre mathématiques et sciences et technologie, exige de l'enseignant des connaissances fines des connexions fécondes qu'entretiennent les mathématiques avec d'autres disciplines.
- *La contextualisation des situations d'apprentissage dans des « domaines généraux de formation[2] ».* Ces domaines renvoient à des problématiques auxquelles les jeunes doivent faire face dans différentes sphères importantes de leur vie et sont porteurs d'enjeux importants pour les individus et pour les collectivités (Gouvernement du Québec, 2003). Cela exige de l'enseignant des connaissances du rôle des mathématiques comme un outil pour appréhender des phénomènes du monde réel.
- *L'insistance sur le développement de la pensée mathématique* et non uniquement sur l'acquisition d'habiletés techniques. Bien qu'il ne les définisse pas de manière explicite, le renouveau pédagogique fait

---

2. Cinq domaines généraux de formation sont visés dans le renouveau pédagogique : 1) santé et bien-être ; 2) orientation et entrepreneuriat ; 3) environnement et consommation ; 4) médias ; 5) vivre-ensemble et citoyenneté.

appel à la pensée algébrique[3], à la pensée probabiliste[4], à la pensée géométrique et au sens spatial[5], quand il présente les concepts et les processus associés aux différents domaines de contenus. Par ailleurs, les trois compétences mathématiques sont vues comme faisant partie de la pensée mathématique : « Bien que les trois compétences du programme soient concrètement réunies dans la pensée mathématique, elles se distinguent par le fait qu'elles en ciblent différents aspects. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 232.)

- *L'intégration de la technologie dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*. Bien que nous vivions dans un monde de plus en plus technologique, l'intégration de la technologie dans les pratiques d'enseignement reste encore marginale.

La structure actuelle du dispositif de formation. Deux voies mènent actuellement à l'obtention du brevet d'enseignement :

1. Le baccalauréat en enseignement au secondaire (BES). Il s'agit d'une formation de premier cycle, comportant une formation en mathématiques, une formation pratique et une formation en éducation, dont des cours de didactique des mathématiques.
2. La maîtrise en enseignement secondaire (MES). Il s'agit d'un programme de formation professionnelle de deuxième cycle destiné à des enseignants de mathématiques au secondaire non légalement qualifiés et débouchant sur l'obtention d'un brevet d'enseignement. Ces enseignants ont préalablement suivi une formation universitaire en mathématiques. Les personnes suivant cette formation ont donc une solide formation disciplinaire, souvent enrichie d'une expérience

3. « Pour construire sa pensée algébrique, l'élève observe des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons, comme des dessins, des tables de valeurs et des graphiques. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 254.)
4. « Dans la construction de sa pensée probabiliste, l'élève est initié au langage ensembliste, que l'on considère comme un outil de compréhension et de communication. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 256.)
5. « L'élève est incité à utiliser sa pensée géométrique et son sens spatial dans ses activités quotidiennes et différents contextes disciplinaires ou interdisciplinaires, tels que celui des arts ou de la science et de la technologie, ou encore dans différentes situations sociales, en réponse à certains besoins : se repérer dans l'espace, lire une carte géographique, évaluer une distance ou utiliser des jeux électroniques. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 260.)

de travail, et sont à la fois enseignant et étudiant universitaire se formant à l'enseignement en vue d'une qualification administrative. À l'été 2010, le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) annonçait, par la voie de sa ministre Courchesne, la levée du lien d'emploi comme condition à l'admission et au cheminement des études dans les programmes de maîtrise qualifiante. Cela signifie l'institutionnalisation d'une nouvelle voie de formation initiale en enseignement au secondaire. Cette décision remet à l'ordre du jour la question de l'articulation de la formation disciplinaire et de la formation à l'enseignement.

La formation mathématique des enseignants en formation. En tant que formateur, j'ai pu constater que la formation mathématique des étudiants avait des incidences de différents types selon le parcours scolaire de ceux-ci. Chez les étudiants dans les programmes d'adaptation scolaire et sociale, l'appréciation des activités dans les cours de didactique des mathématiques est influencée négativement par des compétences mathématiques faibles, mais surtout par un rapport aux mathématiques non aidant. Pour les étudiants du BES, la formation mathématique qu'ils suivent en parallèle avec leur formation en didactique, en psychopédagogie et en formation pratique renforce leur conception des mathématiques comme une discipline axiomatique et semble les empêcher d'engager des connaissances personnelles ou de comprendre celles de leurs élèves. Les étudiants de la MES, enseignants non légalement qualifiés avec une formation universitaire en mathématiques, et souvent avec une expérience professionnelle en dehors de l'enseignement, ont un rapport aux mathématiques semblable à celui des étudiants en mathématiques et, souvent, ne voient pas la pertinence de suivre une formation en éducation car, selon eux, leur aisance en mathématiques et l'expérience qu'ils ont acquise en enseignement sont suffisantes.

Quelle formation mathématique préparerait les enseignants en formation à relever les défis qu'ils affronteront dans l'exercice de leur métier ? Comment cette formation doit-elle s'articuler avec la formation en didactique des mathématiques en particulier ?

3. L'enseignant en formation : un complexe d'assujettissements institutionnels

Le dispositif de formation initiale à l'enseignement est un espace de confluence de différentes institutions où se jouent et se nouent des orientations et des confrontations épistémologiques : institution pédagogique universitaire, institution mathématique universitaire, institution didactique universitaire, institution de formation pratique universitaire et institution scolaire, de la pratique de l'enseignement. Chacune de ces institutions a sa propre culture qui véhicule des normes, des valeurs, des pratiques sociales de références particulières, des manières de voir, de dire et de faire le travail de l'enseignant (Saussez, 2005). L'enseignant en formation est alors exposé à ces différentes formes culturelles. Chacune de ces institutions tente de le formater à ses propres formes culturelles. C'est dans ce sens que nous parlons de l'enseignant en formation comme un complexe d'assujettissements institutionnels, expression que nous empruntons à Chevallard (1989a). Au cours de sa formation, l'enseignant en formation est alors appelé à adopter différentes postures épistémologiques (DeBlois et Squalli, 2002 ; Squalli, 2010) selon l'institution de référence de l'activité de formation dans laquelle il est enrôlé. Par exemple, la pression que subit l'enseignant en formation dans son assujettissement à l'institution scolaire le pousse souvent à s'attendre dans les cours de didactique des mathématiques, et de pédagogie, à développer des savoirs prêts à être utilisés dans la pratique d'enseignement, soit des savoirs pratiques ; alors que les savoirs visés dans les cours de didactique des mathématiques sont des savoirs sur la pratique ou des savoirs théoriques permettant d'éclairer la pratique. Dans Proulx (2010) et Squalli (2010) sont présentés plusieurs exemples de tensions que vit l'enseignant en formation attribuables à la confrontation de ces différentes postures épistémologiques. Mon postulat est qu'il est nécessaire de proposer des activités de formation conduisant à une confrontation des différentes postures épistémologiques du futur maître, où celui-ci est triplement sollicité : en tant qu'apprenant des mathématiques (ApM), en tant qu'enseignant des mathématiques (EnM) et en tant qu'étudiant universitaire réfléchissant sur les pratiques d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (EtU)[6].

6. Cette posture épistémologique fait référence à la fois à l'institution universitaire didactique et à l'institution universitaire pédagogique. Je ne fais pas de distinction ici, bien que ces deux institutions projettent des formes culturelles différentes sur l'enseignant en formation.

Dans cette modélisation de l'enseignant en formation, ce dernier est vu comme une entité multiple : ApM, EtU, EnM. Pour les besoins de la conceptualisation, considérons que ces trois entités soient distinctes. Mon postulat s'énonce alors comme la nécessité d'engager l'ApM, l'EtU et l'EnM dans des activités de partage de connaissances et d'apprentissage à partir d'intérêts communs. Dans la section qui suit, je présente quelques exemples d'exploitation dans des cours de didactique des mathématiques de la résolution de problèmes mathématiques ou didactiques qui vont dans le sens de ce postulat.

4. Étude d'un exemple : journal de bord en résolution de problèmes

J'utilise cette activité dans le premier cours de didactique des mathématiques au BES, DID-155, ainsi que dans le cours DID-855 du programme MES. Le cours DID-155 vise l'introduction des étudiants à une culture des mathématiques au secondaire et à une prise de conscience de leur rapport envers les mathématiques, leur enseignement et leur apprentissage. Par culture mathématique, j'entends :

- une culture des mathématiques en tant que discipline scientifique : apprécier les mathématiques comme activité humaine, vivante toujours en développement, avec une longue histoire, à laquelle ont contribué et contribuent plusieurs civilisations ; apprécier la diversité de ses raisonnements, son histoire ; comprendre que les mathématiques possèdent des applications dans divers domaines de la vie, et qu'elles peuvent aussi constituer un domaine d'esthétique et de beauté ;
- une culture des mathématiques en tant que discipline scolaire : comprendre l'évolution des programmes scolaires, les grands mouvements internationaux dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que leurs fondements ; comprendre la contribution de la formation mathématique dans la formation générale des jeunes ; dans la vie citoyenne ; avoir un regard critique sur les manuels scolaires, sur le matériel didactique en général ; suivre l'actualité portant sur les

enjeux sociaux liés à sa discipline, contribuer à la circulation du savoir professionnel (à travers la contribution à des revues et rencontres professionnelles) ;

- une culture de l'élève apprenant des mathématiques : connaître différentes conceptions, raisonnements, difficultés des élèves eu égard à différents concepts mathématiques ;
- et, finalement, le fait d'être conscient de son propre rapport aux mathématiques, à leur enseignement et à leur apprentissage.

Il est clair qu'un cours seul ne permettrait pas d'atteindre ces objectifs. En revanche, ce cours annonce le ton de la formation que suivra l'enseignant en formation, notamment dans les cours de didactique des mathématiques : susciter des interactions fécondes entre l'EtU, l'ApM et l'EnM dans des activités de formation visant le développement d'une culture mathématique chez l'enseignant en formation.

Le journal de bord en résolution de problèmes est un exemple de telles activités. Il est inspiré d'une activité conçue par Richard Pallascio, qui l'exploitait dans un cours de didactique des mathématiques dans le programme de baccalauréat en enseignement au préscolaire et au primaire (BEPP) à l'UQAM. Dans ce travail, les étudiants doivent décrire leur propre activité de résolution d'une banque de problèmes sélectionnés du chapitre 10 du livre *L'esprit mathématique* (Mason, Burton et Stancey, 1994), en laissant des traces en lien avec leurs processus de résolution. Ces traces doivent comporter des remarques de nature cognitive, métacognitive et affective. Plus précisément, le journal de bord comprend :

- une introduction présentant ses propres conceptions, attitudes, souvenirs, etc., à l'égard des mathématiques ;
- les traces écrites de la résolution, telle qu'elle a été réalisée, d'au moins cinq problèmes pris dans le chapitre 10 du livre *L'esprit mathématique* ;
- lorsque c'est opportun lors de la résolution de problèmes, des remarques de nature 1) *cognitive* en lien avec le processus de résolution, 2) *métacognitiv*e en lien avec le processus de résolution et 3) affective en lien avec le processus de résolution ;

- une conclusion rapportant l'effet qu'a eu ce travail sur sa propre culture mathématique, ainsi qu'une réflexion sur tout le processus effectué lors des résolutions de problèmes.

Il est précisé aux étudiants que l'évaluation du travail ne porte pas sur la justesse des solutions et la qualité des raisonnements, mais sur leur capacité à rendre compte de manière fidèle leur activité de résolution de problèmes. Dans ce qui suit, je présente quelques observations et commentaires tirés de journaux de bord en résolution de problèmes d'étudiants du cours DID-855 de l'automne 2009 du programme de MES. Rappelons que ces étudiants ont tous une formation universitaire de premier cycle en mathématiques.

Certains étudiants ont éprouvé de la difficulté à décrire de manière spontanée leur démarche de résolution. Leur journal de bord contenait peu de pistes non fructueuses, et rarement des manifestations affectives. Il semble que ces étudiants ont rédigé le journal de bord *a posteriori* une fois la solution au problème trouvée. Les traces décrivaient plutôt des démonstrations qu'une démarche de recherche. Les consignes étaient pourtant claires et les étudiants savaient que leur travail n'allait pas recevoir une bonne note selon les critères explicites de l'évaluation. En utilisant notre modélisation de l'enseignant en formation comme un triplet ApM, EtU et EnM, on peut interpréter cette difficulté comme celle d'engager une interaction féconde entre l'ApM et l'EtU et/ou l'EnM. À titre d'exemple, lorsque l'ApM refuse le regard analytique que pose l'EtU sur son activité personnelle de résolution de problèmes. On peut alors voir que ce comportement est une manifestation d'une certaine forme culturelle de l'institution mathématique universitaire, selon laquelle l'ApM n'a l'habitude de rendre publiques que ses démonstrations ; et non pas son activité intime de recherche, surtout quand celle-ci n'aboutit pas à la construction d'une solution mathématiquement acceptable.

Les problèmes du chapitre 10 du livre *L'esprit mathématique* sont des problèmes ouverts, présentant des défis et nécessitant souvent une longue démarche de recherche. Dans la majorité des journaux de bord, on peut relever une grande persévérance chez les étudiants dans la recherche de solutions. Certains expliquent qu'ils aiment relever les défis et d'autres affirment ne pas aimer rester sur un échec. Une des étudiantes, qui a tardé à remettre son travail, m'a avoué qu'elle ne pouvait pas me remettre son journal de bord avec des solutions inachevées ! Un autre parle d'une leçon d'humilité :

> Je dois avouer que l'activité fut une véritable leçon d'humilité. En effet, je ne sais pas si je suis la seule personne dans cette situation, mais j'ai trouvé la plupart des problèmes très difficiles à résoudre, beaucoup plus que ce que j'imaginais. Je ne sais pas si c'est parce que mes cours sont déjà loin, mais je peux affirmer avoir consacré beaucoup de temps à ce travail. Tellement qu'à certains moments je remettais mes aptitudes intellectuelles en question. J'ai décidé à un certain point d'arrêter de m'en faire et de simplement considérer le tout comme une activité d'apprentissage.

En utilisant notre modélisation de l'enseignant en formation comme un triplet ApM, EtU et EnM, on peut interpréter que cette citation décrit en fait une interaction entre l'ApM et l'EtU. Reprenons-la en associant le « je » à l'entité en question :

> [Je, **EtU**] dois avouer que l'activité fut une véritable leçon d'humilité **[pour l'ApM].** En effet, **[je, EtU]** ne sais pas si **[je suis, l'ApM est]** la seule personne dans cette situation, mais **[j'ai, ApM a]** trouvé la plupart des problèmes très difficiles à résoudre, beaucoup plus que ce que **[j', il]** imaginais. **[Je, l'EtU]** ne sais pas si c'est parce que **[mes cours, les cours de l'ApM]** sont déjà loin, mais **[je, l'EtU]** peux affirmer **[avoir, que l'ApM a]** consacré beaucoup de temps à ce travail. Tellement qu'à certains moments **[je, l'EtU]** remettais **[mes, ses]** aptitudes intellectuelles en question. **[J'ai, l'ApM]** décidé à un certain point d'arrêter de m'en faire et de simplement considérer le tout comme une activité d'apprentissage.

Cette prise de conscience importante de l'ApM est provoquée par l'analyse critique de l'EtU. D'autres étudiants affirment que cette activité leur a permis de prendre conscience de leurs propres stratégies de résolution : « de mieux se connaître en tant que mathématicien », a dit un étudiant.

D'autres commentaires d'étudiants peuvent être interprétés en termes d'interactions entre les trois entités ApM, EtU et EnM. Ainsi, certains pensent que cette activité leur a permis de mieux comprendre leur activité de résolution de problèmes et d'être ainsi mieux préparés à accompagner les apprentissages des élèves. Le commentaire suivant d'un étudiant en offre une illustration :

> Dans ce travail, **[j', EtU]** ai observé, **[j', EtU]** ai analysé et **[j', EtU]** ai réfléchi sur **[mes, ApM]** mécanismes cognitifs dans le but de comprendre comment s'articule **[mon, ApM]** raisonnement logique.

> De cette manière, **[je, EnM]** serai mieux outillée pour détecter et comprendre les méthodes de résolution de problèmes utilisées par **[mes, EnM]** élèves et, par conséquent, **[je, EnM]** pourrai les accompagner de manière plus efficace dans la construction de leurs apprentissages.

Il arrive quelquefois que l'étudiant ou l'étudiante explique le jeu d'interactions entre ses différentes postures épistémologiques de manière explicite, comme cette étudiante :

> **En tant qu'enseignante**, il **[m', EnM]** arrive à l'occasion d'expliquer une notion et de [**me, EnM**] dire : « Voyons, il **[me, EnM]** semble que ce n'est pas si compliqué… » et de ne pas comprendre pourquoi les élèves ne comprennent pas. Cette activité **[m', EnM]** a permis de **[me, EnM]** mettre dans la peau de **[mes, EnM] élèves,** c'est-à-dire de se retrouver face à une situation dont **[je, ApM]** n'avais aucune idée par où commencer et comment faire pour résoudre le problème. **[J', EtU]** ai pu voir comment un élève peut se sentir dans une telle situation, comment il se sent face au syndrome de la page blanche. Bien sûr, **[je, ApM]** ne veux pas dire que **[j', ApM]** ai toujours eu de la facilité à résoudre des problèmes mathématiques, au contraire, mais c'était la première fois que **[je, EtU] [me, ApM]** questionnais autant sur **[ma, ApM]** façon de penser et de chercher une solution.

Le commentaire suivant d'une étudiante illustre encore mieux les interactions entre ses différentes postures épistémologiques et l'émergence de connaissances, en acte, partagées. Voici quelques extraits, suivis d'éléments d'analyse.

> La réalisation du journal de bord n'a fait que me confirmer que nous disposons au fond de nous d'un processus métacognitif pour résoudre les problèmes que nous rencontrons tous les jours.

Dans cet extrait, l'EtU fait le constat que son analyse critique de l'activité de réalisation du journal de bord de l'ApM lui a confirmé que tout apprenant des mathématiques possède de manière naturelle des habiletés métacognitives de résolution de problèmes. L'étudiante parle de confirmation de cette idée, probablement parce qu'elle avait déjà été mise en contact avec cette même « connaissance » en tant qu'étudiante lors d'un cours de pédagogie du programme traitant de la métacognition ou en tant qu'enseignante dans son milieu professionnel. Cette connaissance est celle de l'EtU et non de l'EnM. Dans la suite de la citation, l'EnM fait alors remarquer que du point de vue de la pratique d'enseignement, l'enjeu est ailleurs :

> Mais le grand défi est de savoir comment transposer ces habiletés mentales à nos jeunes.

Et comme cela peut arriver chez le formateur didacticien ou pédagogue, l'EtU transforme une connaissance sur l'apprentissage en une connaissance pour l'enseignement ; il offre à l'EnM une solution à sa préoccupation (suite de la citation) :

> En obligeant les élèves à connaître les démarches de résolution de problèmes et à les utiliser fréquemment, on leur permet de gérer plus efficacement les diverses opérations cognitives d'ordre supérieur requises pour être efficaces, tout en stimulant leur esprit critique. C'est de la métacognition en action. Sans oublier l'apport psychologique que procure une résolution efficace d'un problème mathématique, à savoir une légitime fierté et une estime de soi de plus en plus considérables.

La solution offerte par l'EtU peut être une connaissance fausse, ou valide dans certaines conditions. Il n'en demeure pas moins qu'elle est partagée entre l'EtU, l'EnM et l'ApM, à la suite d'une activité les engageant tous, chacun mobilisant ses propres compétences. Il nous semble que cette connaissance est de ce fait robuste, car elle a un référent expérientiel (apporté par l'ApM), une justification épistémique (apporté par l'EtU) et une solution à un problème de pratique (conviction de l'EnM). Si l'on ne tient pas compte de la valeur des connaissances construites, cette action est une réussite du point de vue de l'articulation de la formation mathématique et de la formation à l'enseignement des mathématiques. Tout se passe comme si pour l'EnM la valeur pour la pratique d'une connaissance de l'EtU est renforcée quand celle-ci est validée par une expérience significative de l'ApM, et qu'une interaction est engagée entre ces trois entités à propos du sens de cette connaissance.

Voici un commentaire d'un autre étudiant qui se prête à une analyse semblable, mais à propos cette fois-ci du sens de l'enseignement par problème.

> L'approche par problème incite naturellement l'apprenant à se procurer les outils mathématiques nécessaires à la résolution dudit problème. L'utilité de ces outils ne fait alors plus de doute pour lui, ce qui augmente l'intérêt et la motivation pour la matière. En effet, lorsqu'on s'investit à fond dans un problème et qu'on arrive devant une impasse mathématique (les sommations du problème « somme des carrés » en sont de bons exemples), on ne veut pas en rester là. Il nous tient alors à cœur de comprendre comment surmonter cette impasse à l'aide de nouveaux outils mathématiques (ou des vieux outils oubliés dans mon cas). Il reste que le problème doit représenter un défi considérable, mais pas trop grand afin de ne pas décourager l'apprenant.

Ici encore, un événement expérientiel de l'ApM vient consolider le sens et la conviction de l'EnM d'une connaissance de l'EtU à propos de l'approche d'enseignement par problèmes.

Au terme de cette brève analyse, je veux tirer quelques conclusions en matière de conditions favorisant une articulation entre la formation mathématique et la formation à l'enseignement des mathématiques.

5. Rôle des cours de didactique des mathématiques et retour à la question de l'articulation entre la formation mathématique et la formation à l'enseignement des mathématiques

L'articulation de la formation mathématique et de la formation à l'enseignement des mathématiques devrait être une préoccupation à la fois dans les cours de mathématiques et dans les cours de didactique des mathématiques. Mais, à mon avis, cette responsabilité incombe de manière plus importante aux cours de didactique des mathématiques. En effet, la formation en didactique des mathématiques peut fournir des ressources nécessaires à la mise en rapport de la formation mathématique de l'enseignant en formation et de sa pratique d'enseignement. En d'autres termes, la négociation de sens nécessaire à la construction de connaissances partagées entre l'ApM et l'EnM dépend inévitablement des habiletés analytiques de l'EtU et de ses connaissances imbriquées des objets mathématiques de savoir, de leur épistémologie et des rapports de l'homme avec ces objets mathématiques dans une perspective de leur enseignement ou de leur apprentissage. Un des objectifs importants de la formation en didactique des mathématiques est de permettre à l'EtU d'entamer l'élaboration d'un cadre conceptuel de référence à propos d'un contenu mathématique à enseigner. Ce cadre comporte un ensemble de connaissances sur différents aspects liés à ces contenus mathématiques (disciplinaire, épistémologique, curriculaire, l'élève apprenant cet objet, l'enseignant enseignant cet objet, différentes ressources pédagogiques en lien avec l'enseignement et l'apprentissage de cet objet, etc.). Cependant, pour créer des conditions favorables à l'articulation de la formation mathématique et de la formation à l'enseignement des mathématiques chez l'enseignant en formation, mon postulat est que dans les cours de didactique des mathématiques, il est nécessaire de proposer des activités de formation qui permettent à l'ApM, l'EnM et l'EtU de s'engager mutuellement, c'est-à-dire avec leurs compétences complémentaires, et que cet engagement permette la construction de connaissances partagées. Le journal de bord en résolution de problèmes est un exemple d'activités organisées dans l'institution didactique universitaire et qui a permis, pour la majorité des enseignants en formation de mon échantillon, de convoquer l'ApM et l'EnM à une interaction féconde avec l'EtU. La question mathématique posée en introduction est un autre type de problème qui permet de convoquer l'ApM et l'EnM à une interaction avec l'EtU[7].

7. Voici d'autres exemples de telles questions qui déroutent mes étudiants du BES :
   1. Un de vos élèves vous demande : « Pourquoi y a-t-il des nombres qui se représentent par des chiffres, d'autres par des chiffres et des symboles (comme 2/3 ou encore $\sqrt{2}$) et d'autres avec des lettres comme π ? »
   2. Comparer 0,99999999… et 1.
   3. Supposons que les trois couleurs de base soient le jaune, le bleu et le rouge. Considérons les catégories suivantes de nombres représentés sur la droite réelle : les entiers ; les rationnels non entiers, les irrationnels. Aux entiers affectons le jaune, aux rationnels non entiers le bleu et aux irrationnels le rouge. Quelle serait la couleur de la droite réelle ? (Une version plus avancée serait de considérer les trois catégories suivantes de nombres : les rationnels, les irrationnels algébriques, les irrationnels transcendants.)
   4. Enfin, une autre formulation du problème est de dire : supposons que nous ayons une urne contenant l'ensemble des nombres réels et que l'on tire au hasard un nombre. Selon vous, le nombre tiré sera, presque sûrement : un rationnel, un irrationnel algébrique ou un irrationnel transcendant ?

6. Conclusion

La question de l'articulation entre la formation mathématique et la formation en enseignement des mathématiques est complexe. Je suis conscient que cet essai d'analyse ne tient pas compte de toute cette complexité. Je pense néanmoins avoir avancé sur au moins deux plans. Tout d'abord, cette articulation peut être favorisée en dehors des cours de mathématiques par des actions de formation, comme celle du journal de bord en résolution de problèmes, dans le cadre de cours de didactique des mathématiques. Bien sûr, il serait idéal que cette préoccupation soit aussi portée dans les cours de mathématiques. Mais cela peut ne pas être facile à réaliser, car cela nécessite de la part des formateurs de mathématiques d'intégrer dans leur enseignement des questions qui préoccupent l'enseignant des mathématiques ou l'étudiant didacticien des mathématiques. Finalement, d'un point de vue plus théorique, l'approche de l'enseignant en formation comme une entité multiple, chacun de ses éléments étant assujetti à une institution particulière, semble offrir un cadre d'analyse prometteur, qui mériterait d'être exploité et étudié davantage pour mieux comprendre ses apports potentiels.

Annexe

Élément de réponse à la question de l'introduction

Le nombre $\boldsymbol{a} = \mathbf{0{,}1234567891011113\ldots}$ est dit nombre de Mahler. Comme le nombre π, il est transcendant. Autrement dit, il n'existe aucun polynôme à coefficients entiers dont $\boldsymbol{a}$ serait un zéro. On ne peut donc pas calculer la valeur de $\mathbf{3}\boldsymbol{a}$ sans recourir à un processus infini (comme une série entière ou encore la limite d'une suite). Comme pour $\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}$, on se contentera de dire, pour un élève du secondaire qui poserait éventuellement la question, que $\mathbf{3}\boldsymbol{a}$ vaut $\mathbf{3}\boldsymbol{a}$.

Réaction 1 au texte d'Hassane Squalli

Sybil en formation des maîtres

Un cas de personnalités multiples

Sophie René de Cotret
Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation
Université de Montréal
sophie.rene.de.cotret@umontreal.ca

1. Introduction

La tâche demandée consiste à réagir au texte d'Hassane Squalli, à propos de l'articulation entre la formation mathématique et la formation à l'enseignement des mathématiques. C'est avec un grand intérêt que j'ai lu ce texte et y ai constaté une communauté de pensée avec mes travaux : nous considérons tous deux le futur maître comme un individu possédant des personnalités multiples, soit le Sybil de l'éducation ! Si nos visions se rejoignent, la façon dont nous souhaitons travailler la question des personnalités multiples n'est toutefois pas la même. Hassane Squalli vise à mettre en scène une confrontation entre les diverses postures épistémologiques de manière à construire des connaissances partagées, tandis que pour ma part je vise plutôt à ce que le futur maître puisse revêtir volontairement chacune des postures épistémologiques qu'il porte en lui afin d'éclairer de plusieurs feux le problème auquel il est confronté.

2. De la difficulté à résoudre un problème apparemment simple

L'anecdote racontée par Hassane Squalli en introduction de son texte rend compte d'un malaise qui a provoqué chez lui un choc : « L'idée qu'un élève du secondaire pouvait répondre à cette question, alors que je n'y arrivais pas, me hantait. Car après tout, la question aurait bien pu être posée à un élève du secondaire ! » (p. 143).

Ce choc l'a conduit à conclure « [qu'il] ne connaissai[t] pas suffisamment les nombres, malgré [ses] sept ans de cours universitaires de mathématiques ! » (p. 144). Et cette insuffisance de connaissances lui est apparue imputable à un « décalage entre une formation universitaire en mathématiques dans une logique purement disciplinaire et une formation universitaire en mathématiques dans la perspective de leur enseignement » (p. 144). Partant de là, il a cherché à expliquer ce décalage et à trouver des façons de le réduire.

J'ai aussi vécu un choc semblable – et je pense qu'il en est de même pour bon nombre de didacticiens. Ma façon de l'interpréter est toutefois différente de celle d'Hassane Squalli, et ce, sous deux aspects. D'une part, le choc ne m'apparaît pas lié à une insuffisance de connaissances. D'autre part, je ne vois pas de décalage entre les perspectives des formations universitaires en mathématiques, j'y vois plutôt des *usages différents* des mathématiques.

2.1. Des connaissances insuffisantes ou des usages différents ?

Le fait que le problème soumis en introduction trouve difficilement une réponse d'emblée[1], que ce soit par Hassane Squalli ou par quiconque, témoigne-t-il vraiment d'une connaissance insuffisante des nombres ? Pour répondre à cette question, il faudrait d'abord définir ce qu'on entend par une connaissance suffisante. S'agit-il d'une connaissance qui n'a aucun problème à son épreuve, c'est-à-dire une connaissance qui permet de répondre à n'importe quel problème mettant en jeu cette connaissance ? Et, en combien de

1. Déjà, le contexte dans lequel la question a été posée est un indice qu'on ne s'attend pas à ce qu'elle reçoive une réponse immédiate.

temps faut-il y arriver pour conclure à la suffisance ? Il apparaît impossible d'avoir une telle connaissance d'un concept donné. Il existera toujours des problèmes auxquels je n'arriverai pas à répondre ou pas assez rapidement pour conclure à une connaissance « achevée[2] ».

La connaissance d'un concept dont on dispose est faite, notamment, de l'ensemble des situations qui ont conduit à donner du sens à ce concept (Vergnaud, 1991). De ce fait, plus les situations rencontrées relatives à un concept donné seront nombreuses et variées, plus la signification qu'on accordera à ce concept sera riche. Comme dit Wittgenstein (voir Voizard, 2001), « la signification est l'usage ». Il importe donc de rencontrer divers usages d'un concept pour en développer une signification riche. Ainsi, si un nouvel usage est sollicité, comme ce fut sans doute le cas pour le problème qui a hanté Hassane Squalli, il peut être normal de ne pas pouvoir résoudre le problème, puisqu'il relève d'un usage qui n'a pas encore contribué à la signification du savoir en jeu. Dans le même esprit, lorsque les étudiants ne réussissent pas un problème inhabituel, il n'apparaît pas nécessairement légitime de dire qu'ils ont des connaissances insuffisantes, puisqu'il sera toujours possible de trouver un nouvel usage qui les « piégera ». En d'autres termes, le fait de ne pas pouvoir résoudre un problème qui fait appel à un savoir dont on dispose ne signifie pas nécessairement que l'on sait mal ou insuffisamment, mais simplement qu'il est impossible de savoir suffisamment pour résoudre tous les problèmes.

2.2. Des usages disciplinaires ou didactiques des mathématiques

Face à l'impossibilité de répondre à une question apparemment simple, Hassane Squalli conclut à un « décalage entre une formation universitaire dans une logique purement disciplinaire et une formation universitaire en mathématiques […] dans la perspective de leur enseignement » (p. 144). Pour ma part, je ne vois pas cela comme un décalage, mais simplement comme des usages différents d'un même savoir. Il devient alors intéressant

2. Par exemple : sans utiliser de calculatrice, trouvez un nombre entre π et $\sqrt{10}$. Trouvez-en trois autres. Auriez-vous une façon d'en trouver autant que vous voulez ? Laquelle ? (Problème emprunté à A. Mercier, INRP Marseille.) Bien que les étudiants disent maîtriser le concept utile à la résolution de ce problème, très peu arrivent à le résoudre.

de se demander à quels types d'usages des mathématiques une logique purement disciplinaire renvoie ? En quoi ces usages se distinguent-ils de ceux qui ont cours dans la perspective de leur enseignement ?

Les usages des mathématiques dans une « logique purement disciplinaire[3] » renvoient peut-être à des usages formels et à l'idée de démonstration, alors que les usages en vue de l'enseignement renvoient peut-être davantage à des usages qui cherchent à expliquer[4].

> « Expliquer pourquoi » est souvent compris dans l'énoncé des exercices ou des problèmes mathématiques dans le sens de « démontrer que ». En fait, une telle acception est trop étroite : nous dirons avec Piaget (1970) qu'expliquer, sur le terrain des sciences déductives, c'est d'abord dégager les « raisons » pour « répondre à la question du pourquoi ». Mais les raisons en tant qu'elles sont liées aux significations peuvent échapper à une démonstration par ailleurs très convaincante du point de vue de la logique [...] c'est par exemple l'aveu de Cantor quand il interpelle Dedekind à propos d'une démonstration qu'il vient d'écrire : « Je le vois mais je ne le crois pas » (Balacheff, 1982, p. 263).

Cette citation souligne le fait que l'explication et la démonstration se distinguent. Plus précisément, je dirais avec Balacheff qu'une explication est « un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis par le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat » (*Ibid.,* p. 263). Lorsque les explications sont acceptées et qu'elles revêtent une forme particulière, à savoir « une suite d'énoncés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme vrai, ou bien est obtenu à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini » (*Ibid.*, p. 263), on dira qu'il s'agit de démonstrations.

L'explication et la démonstration constituent donc des usages qui peuvent être différents, et il est possible que les cours de mathématiques à l'université sollicitent davantage de démonstrations que d'explications – ou du moins c'est la perception qu'en conservent plusieurs étudiants. Les cours de didactique, pour leur part, requièrent certainement des futurs maîtres

---

3. Que signifie une logique purement disciplinaire ? Comme cette expression ou des expressions semblables circulent dans la communauté didactique, il serait intéressant d'arriver à préciser collectivement ce qu'elles recouvrent.

4. Bien entendu, cela ne signifie pas que l'un exclut l'autre.

qu'ils puissent fournir des explications. Expliquer et démontrer sont deux usages différents qui engendrent des significations différentes des savoirs en jeu.

La citation de Cantor « Je le vois mais je ne le crois pas » illustre très bien le conflit affectif et cognitif qu'il peut y avoir entre la démonstration (je le vois) et l'explication (mais je ne le crois pas). On peut délibérément chercher à faire vivre ce type de conflit par les étudiants en formation des maîtres. En voici un exemple, par le problème suivant :

> Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ avec $a, b, c, d \in \mathrm{N}$, et $b, d \neq 0$, alors on a aussi : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.
> Est-ce vrai ou faux ? Justifiez. Comment pourriez-vous expliquer votre résultat à des élèves de deuxième secondaire ?

Souvent, les étudiants ne savent pas de prime abord si cet énoncé est vrai ou faux, mais après quelques manipulations algébriques, ils arrivent à démontrer qu'il est vrai. La difficulté survient lorsqu'ils doivent expliquer ce résultat : tout comme Cantor, ils le voient (avec leur tête), mais ils ne le croient pas (avec leurs tripes)[5]. Il leur faut alors trouver un moyen de réconcilier la tête et le cœur ou, en d'autres termes, trouver une explication qui leur fera croire en la démonstration. Pour ce problème, un exemple simple permet cette réconciliation : *Si l'on prend deux verres de jus de même concentration, un grand et un petit, que l'on verse dans un même pot, on obtiendra un pot de jus de même concentration !*

2.3. Des postures épistémologiques différentes chez un même sujet

Bien que tous les usages participent à la signification du concept, il n'en reste pas moins que, selon la situation dans laquelle est plongé le sujet, il ne convoque pas nécessairement l'entièreté du sens développé. Nos recherches sur la didactique du sens commun (René de Cotret, 2011 ; René de Cotret et Larose, 2005) ont donné lieu à diverses observations qui témoignent de ces convocations « ciblées ».

5. La situation est la même lorsqu'on demande aux étudiants d'expliquer pourquoi quand on divise par une fraction cela revient à multiplier par son inverse ou lorsqu'on demande d'expliquer le fonctionnement du produit croisé.

Un premier exemple concerne une étude en didactique de l'économie, à l'issue de laquelle le chercheur conclut que :

> Or, on constate que des savoirs scolaires sont bien enseignés et appris, mais qu'ils restent souvent des savoirs pour l'école et qu'ils sont peu « exportés » vers les savoirs sociaux « citoyens ». Il semble que ces deux genres de savoirs appartiennent à deux mondes qui coexistent sans que des savoirs scolaires interfèrent rapidement et directement avec les savoirs du jeune citoyen (Legardez, 2004, p. 660).

Cette conclusion illustre le fait que le sens du savoir économique développé à l'école ne semble pas nécessairement sollicité lorsque le sujet se retrouve dans une posture non plus scolaire mais citoyenne.

Une autre observation d'un tel phénomène a été faite auprès d'élèves marseillais de 13 ou 14 ans qui, après avoir travaillé plusieurs mois sur l'activité des boîtes flottantes (Chevallard, 1989b) afin de savoir pourquoi les gros bateaux flottent, en sont arrivés à constater que pour une boîte cubique dans un matériau donné, l'enfoncement est constant. Il en résulte donc que plus la boîte est grosse plus la partie émergente est haute, donc plus ça flotte. Une fois cette constatation faite, on leur a redemandé pourquoi les gros bateaux flottaient et ils ont redonné leur réponse initiale : « Il y a du métal autour de quelque chose qui flotte ou fait flotter dedans. » (René de Cotret, 2007, p. 307.) Il semble donc que la posture depuis laquelle ils ont répondu à la question, à l'issue de l'activité, soit une posture qui sollicite seulement une partie du sens développé relativement à la flottaison.

Ces deux exemples témoignent du fait qu'un sujet ne sollicitera pas de la même manière ses connaissances selon le contexte dans lequel il conçoit la question. C'est aussi ce qu'a très bien mis en évidence Hassane Squalli lorsqu'il modélise le futur maître comme un sujet de plusieurs institutions, un sujet qui adopte des postures épistémologiques différentes, tel un Sybil de la formation des maîtres avec trois personnalités : un étudiant universitaire, un apprenant de mathématiques et un enseignant de mathématiques. Ce découpage apparaît très utile pour décrire les façons dont les étudiants abordent les problèmes et montrer que, selon la posture qu'adopte le sujet, la signification accordée au concept ne sera pas la même.

Le point de vue d'Hassane Squalli et le mien se rejoignent à cet égard : nous considérons tous deux que le futur maître revêt différentes postures épistémologiques, lesquelles sont associées à un étudiant, un apprenant et un enseignant. Les façons dont nous travaillons avec ces personnalités multiples se distinguent toutefois.

3. Des problèmes semblables pour des visées différentes

Si Hassane Squalli cherche à générer une forme de confrontation entre les trois postures de manière à construire des connaissances partagées, je cherche pour ma part à faire en sorte que le futur maître passe volontairement d'une personnalité à une autre et qu'il puisse porter son regard sur un concept selon chacune de ses personnalités. À terme, je pense que nous visons tous deux à ce que l'enseignant de mathématiques puisse recourir de manière fluide à l'ensemble de ses connaissances pour assurer le meilleur enseignement possible à ses élèves.

3.1. Partir de problèmes pour générer une confrontation entre les trois postures et développer une connaissance partagée

Pour générer la confrontation entre les trois postures des futurs maîtres, Hassane Squalli leur propose des problèmes ouverts en leur demandant de les résoudre tout en notant dans un journal de bord leurs remarques de nature cognitive, métacognitive et affective en lien avec le processus de résolution. Ces problèmes sont vus comme des leviers pour réduire le décalage évoqué plus tôt, entre une formation mathématique disciplinaire et une formation mathématique pour l'enseignement, en appelant une interaction entre l'étudiant universitaire (EtU), l'apprenant de maths (ApM) et l'enseignant de maths (EnM). En plus de viser la prise de conscience de leurs propres stratégies par les futurs maîtres, le but de cette interaction est, notamment, de permettre la construction d'une connaissance partagée entre ces trois postures épistémologiques. La question se pose alors de savoir comment se définit cette connaissance partagée ?

Les extraits de journaux présentés illustrent des effets très intéressants du dispositif mis en place : une leçon d'humilité face à la difficulté à résoudre le problème, et une prise de conscience de sa propre activité de résolution de problèmes qui aidera à comprendre l'activité de ses élèves. L'analyse de quelques extraits de journaux de bord montre aussi que pour certains étudiants, « Tout se passe comme si pour l'EnM la valeur pour la pratique d'une connaissance de l'EtU est renforcée quand celle-ci est validée par une expérience significative de l'ApM et qu'une interaction est engagée entre ces trois entités à propos du sens de cette connaissance » (p. 154). Cette interaction entre les trois postures à propos d'une même connaissance semble effectivement pouvoir enrichir et valoriser la connaissance des futurs maîtres. Les exemples donnés concernent des connaissances de nature métacognitive. Y a-t-il eu aussi des manifestations semblables pour des connaissances de nature mathématique ou didactique ?

3.2. Partir de problèmes pour solliciter le recours aux différentes postures

Tout comme Hassane Squalli, je soumets aux étudiants en formation des maîtres des problèmes qui semblent *a priori* assez simples, mais qui causent généralement un choc lorsque ceux-ci s'aperçoivent qu'ils n'arrivent pas à les résoudre[6]. Je procède ainsi notamment dans le cours « Didactique de la proportionnalité » au baccalauréat en enseignement secondaire (BES) de mon institution. Lors de la première rencontre, après avoir présenté le plan de cours, je distribue un questionnaire comprenant 16 questions touchant toutes, de près ou de loin, à la proportionnalité. Les étudiants doivent répondre sur le questionnaire et me le remettre à la fin du cours. Le but de ce questionnaire est de :

6. En voici quelques exemples :
   - Vous savez que pour additionner des fractions on les met généralement au même dénominateur. Comment expliquer alors que quelqu'un ayant obtenu 7/8 au numéro 1 d'un devoir, 5/7 au numéro 2 et 3/5 au numéro 3 se retrouvera avec une note de : $\frac{(7+5+3)}{(8+7+5)} = \frac{15}{20}$?
   - Un magasin offre un rabais de 20 %. Est-il plus avantageux pour le consommateur que la taxe de 15 % soit appliquée avant ou après le rabais ? Justifiez.
   - Composez un problème « à contexte » qui demande comme solution la division 2/3 ÷ 3/5 et résolvez-le.

- faire prendre conscience aux étudiants qu'une question simple de prime abord ne l'est pas nécessairement lorsqu'on s'y attarde. La solution n'est pas aussi évidente que prévu ;
- faire adopter la position de l'élève pour comprendre ce qu'il vit face à un problème à résoudre ;
- amener les étudiants à réaliser que, même s'ils peuvent fournir une démonstration, ils ne saisissent pas pour autant les raisons qui peuvent les amener à fournir une explication (la tête n'est pas au même diapason que le cœur) ;
- faire réaliser aux futurs enseignants que « faire des erreurs » à des problèmes apparemment simples n'est ni exceptionnel ni un indice de mauvaise volonté et est simplement normal. Et, si faire des erreurs est normal pour eux, qui font des mathématiques depuis plus de 15 ans, alors *a fortiori* c'est normal pour des élèves du secondaire. D'ailleurs, ce sont souvent les mêmes erreurs…
- forcer l'étudiant à arrêter son regard et à réfléchir à ce que veut dire « être proportionnel » (ou tout autre concept) au-delà de sa définition et susciter le besoin d'une explication, en plus d'une démonstration ;
- fournir un ensemble de protocoles « crédibles », puisque ce sont les leurs, qui seront analysés pour en comprendre les erreurs et, le cas échéant, déterminer les différentes « connaissances-obstacles » des étudiants en formation des maîtres.

Si plusieurs de ces intentions rejoignent celles exprimées et réalisées par le dispositif d'Hassane Squalli, à terme, notre visée est toutefois différente. En effet, je cherche à faire en sorte que le futur maître parcoure ses différentes postures épistémologiques de manière volontaire, afin de :

- mettre à profit ses différentes postures (comprendre les mathématiques en faisant de la didactique ; s'expliquer à soi pour pouvoir expliquer aux autres ; expliquer avec des outils accessibles aux élèves, démontrer pour soi et pour les autres) ;
- résoudre les contradictions éventuelles entre ses différentes perceptions ;
- réconcilier la tête et le cœur (« je le vois mais je ne le crois pas » et aussi « je le crois mais je ne le vois pas ») ;

- enrichir les propositions d'usage ou les situations d'enseignement (concevoir des situations qui suscitent une signification explicative et non seulement démonstrative).

Le dispositif mis en place à cette fin dans mon cours de didactique consiste à demander à chaque équipe de quatre étudiants de travailler le raisonnement proportionnel à partir d'un des 16 problèmes du questionnaire initial, en proposant aux autres étudiants de la classe une brève leçon sur le sujet en jeu. Cette leçon doit s'attaquer à une connaissance-obstacle établie à partir de l'analyse des productions de tous les étudiants de la classe au problème retenu. La leçon devra permettre aux étudiants de vivre une séquence de situations, inspirées des situations de Brousseau, visant à faire évoluer la connaissance-obstacle retenue. Les étudiants doivent de plus remettre un travail présentant :

- la solution expliquée et validée, de même qu'une analyse des principales procédures adéquates et inadéquates répertoriées dans les productions des étudiants de la classe ;
- la connaissance-obstacle retenue et le savoir visé par la leçon ;
- le moyen choisi pour poser ou faire ressortir la connaissance-obstacle ;
- le moyen choisi pour invalider la connaissance-obstacle et développer le savoir visé ;
- une question visant à évaluer la progression des étudiants ;
- les liens entre la leçon et le programme du secondaire (contenus et compétences).

Pour inciter les étudiants à adopter de manière volontaire leurs différentes postures, je tente tout d'abord de leur faire vivre ces postures afin qu'ils puissent apprécier l'apport de chacune à la compréhension du savoir en jeu. Ainsi, si je m'inspire des distinctions d'Hassane Squalli, ils sont placés successivement en position d'élèves, quand ils tentent de résoudre les problèmes du questionnaire initial ; puis en position de « matheux », lorsqu'ils doivent étudier le concept en jeu et s'assurer de la validité des solutions proposées ; et, enfin, en position d'enseignant, lorsqu'ils analysent les erreurs et cherchent une mise en scène pour travailler le savoir. Chacune de ces postures offre un regard différent sur le savoir en jeu, sur les difficultés que peut représenter son apprentissage, sur ses fondements, sur les problèmes qu'il permet de résoudre, etc. En passant du rôle d'élève à celui de mathématicien, à celui d'enseignant, puis, ce faisant, à celui de didacticien, le futur maître enrichit sa vision tant des mathématiques que de leur enseignement, et c'est cette richesse de points de vue qu'il m'importe qu'il maintienne tout au long de sa formation et de sa carrière.

4. Conclusion

Peu importe les raisons qu'on en donne, il semble que les mathématiques apprises, que ce soit au baccalauréat, à la maîtrise ou au doctorat, ne permettent pas nécessairement de résoudre tous les problèmes liés aux concepts mathématiques appris, même si ces problèmes sont apparemment simples. Cela pourrait s'expliquer, d'une part, par le fait qu'il n'est pas possible d'avoir une connaissance « complète » d'un savoir et, d'autre part, parce que la position depuis laquelle on travaille ces problèmes est à prendre en compte. En effet, selon la position adoptée, la solution ne fera pas appel à la même signification du savoir. C'est pourquoi l'adoption de différentes postures dans l'étude d'un problème, que ce soit pour le résoudre ou pour en apprêter l'enseignement, apparaît profitable.

De ce point de vue, il devient inutile de reprocher aux étudiants ce qu'ils ne savent pas : il vaut mieux profiter du temps que l'on a pour leur proposer de nouveaux usages des savoirs, des usages que nous considérons utiles pour enrichir leur compréhension de ces savoirs et pour imaginer des mises en scène qui feront vivre aux élèves à leur tour des usages conduisant à des significations riches, utiles et pour lesquelles ils auront des outils de contrôle.

Pour Hassane Squalli, de tels usages sont liés à la confrontation et à l'interaction des postures épistémologiques des futurs maîtres dans le but de développer des connaissances partagées. Pour moi, ces usages sont liés au recours volontaire aux différentes postures dont dispose le futur maître afin qu'il puisse développer un regard riche et varié sur le savoir. Une approche est-elle meilleure que l'autre, je ne saurais pas dire. Elles sont sans doute complémentaires. Il serait toutefois intéressant de les étudier plus à fond pour mieux en connaître les rouages et les effets. Chacune soulève des questions de recherche qu'il vaudrait la peine d'examiner plus amplement.

Enfin, en ce qui a trait à l'articulation de la formation mathématique et de la formation à l'enseignement des mathématiques, Hassane Squalli propose qu'elle « devrait être une préoccupation à la fois dans les cours de mathématiques et dans les cours de didactique des mathématiques » (p. 155), bien que de façon plus importante dans les cours de didactique. Selon les organisations des universités, le défi peut être grand, mais je pense que dans tous les cas il est possible de varier les usages dans les cours de mathématiques pour solliciter peut-être davantage les explications, et ce, de manière profitable pour tous les étudiants, futurs maîtres ou non.

Réaction 2 au texte d'Hassane Squalli

De la formation mathématique à la formation à l'enseignement des mathématiques

Des préoccupations didactiques

Corneille Kazadi
Département des sciences de l'éducation
Laboratoire d'études et de recherches transdisciplinaires et interdisciplinaires en éducation – LERTIE
Université du Québec à Trois-Rivières
corneille.kazadi@uqtr.ca

1. Introduction

Ce texte contient ma réaction à celui d'Hassane Squalli « Quelle articulation entre formation mathématique et formation à l'enseignement des mathématiques ? Essai d'analyse et point de vue d'un didacticien des mathématiques ». Hassane Squalli part d'une anecdote qui met en évidence le décalage entre une formation universitaire en mathématiques dans une logique purement disciplinaire et une formation universitaire en mathématiques dans la perspective de leur enseignement. Il pose un certain nombre de questions qui me semblent très importantes en l'état actuel de la formation des enseignants des mathématiques du secondaire quant à ce décalage : Qu'est-ce qui explique ce décalage ? Comment peut-on le réduire ? Par quels dispositifs de formation ? Quel est le rôle des cours de didactique des mathématiques ? Ces questions rejoignent le problème de la nécessaire articulation entre une formation mathématique et une formation à l'enseignement des mathématiques. Je retiens et je fais miennes ces questions d'Hassane Squalli, et je vais, dans la mesure du possible, étayer ma réaction autour de certaines de ces questions.

Avant de réagir à ce texte, j'aimerais souligner que le thème de ce colloque tombe à pic pour qu'on s'interroge sur les pratiques, les orientations et les recherches en formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. En effet, la formation mathématique des futurs enseignants du secondaire que l'on forme et plus encore, des didacticiens des mathématiques qui interviennent dans la formation initiale, pose un certain nombre de problèmes déjà soulevés par Hassane Squalli (2010) en réaction au texte de Proulx (2010) sur l'articulation entre formation mathématique, formation didactique et formation pratique dans la formation des maîtres, et également par Proulx et Bednarz (2010) sur la formation mathématique des enseignants du secondaire.

2. Formation mathématique des enseignants en mathématiques au secondaire

Legrand (1997) souligne qu'« Enseigner les mathématiques n'est pas chose simple. On peut estimer qu'il faut dans la formation d'un professeur de notre discipline :

- de l'arithmétique, de l'algèbre, de l'analyse, des probabilités, des statistiques ;
- de la didactique des mathématiques, de la théorie de l'évaluation, des sciences de l'éducation ;
- des notions d'histoire et d'épistémologie des mathématiques ;
- un zeste de psychologie, de sociologie, de dynamique de groupe ;
- une solide information sur le système scolaire. »

Pour aller dans le même sens que Legrand, à l'Université du Québec à Trois-Rivières, comme dans la plupart des universités au Canada, nos futurs enseignants des mathématiques au secondaire sont formés en mathématiques au Département de mathématiques et d'informatique et en didactique des mathématiques au Département des sciences de l'éducation.

Je suis d'accord avec Hassane Squalli quand il souligne que « [p]our les étudiants du BES, la formation mathématique qu'ils suivent en parallèle avec leur formation en didactique, en psychopédagogie et en formation pratique renforce leur conception des mathématiques comme une discipline axiomatique et semble leur faire obstacle à engager des connaissances personnelles ou à comprendre celles de leurs élèves » (p. 147). J'ajoute aussi que ces étudiants ont certes une formation mathématique, mais il y a lieu de constater que lorsqu'ils arrivent dans leur premier cours de didactique des mathématiques, à l'hiver de la deuxième année de leur formation et après avoir suivi des cours de mathématiques (Logique et ensembles ; Géométrie analytique ; Géométrie euclidienne ; Probabilités ; Calcul ; Nombres et structures ; Statistiques ; Transformations géométriques ; Algèbre ; Algèbre linéaire et applications ; et finalement Applications mathématiques), certains ont des lacunes qu'on peut croire mineures mais qui, à la longue, peuvent faire obstacle à l'apprentissage des mathématiques chez leurs élèves du secondaire. Par exemple, certains de ces étudiants affirment :

1. Que la fraction $\frac{1}{3}$ est une fraction décimale, alors que pourtant $\frac{1}{3}$ n'est pas de la forme fractionnaire $\frac{a}{2^n\ 5^m}$, où a, n et m désignent des entiers naturels.
2. Que 0,7777…… (0,7 périodique) est un nombre décimal, alors que l'écriture fractionnaire de ce nombre est $\frac{7}{9}$ après sa transformation en fraction irréductible.
3. Que 0 est un nombre pair et impair, souvent par allusion au fait que 0 est négatif et positif.
4. Qu'entre 1,23 et 1,25 il existe un nombre décimal pair qui est 1,24, ce qui amène à se demander s'ils savent que la parité et l'imparité ne concernent que les nombres entiers.
5. Que 1 est un nombre premier, en ayant recours à l'aspect ordinal du nombre 1.
6. Que $-x$ est un nombre négatif, désignant une maîtrise inadéquate de la valeur absolue d'un nombre réel.
7. Que tous les « nombres à virgule » sont des nombres décimaux et que l'ensemble **Q** des nombres rationnels est inclus dans l'ensemble **Q'** des nombres irrationnels, dénotant une certaine méconnaissance des ensembles numériques.

On se retrouve alors devant des conceptions et des obstacles qui peuvent faire tomber une importante partie de la charpente mathématique.

Il faudrait aussi souligner que dans la formation mathématique de nos futurs enseignants, l'accent est souvent davantage mis sur les algorithmes, les procédures, les techniques et les actions mécaniques que sur la justification de ces algorithmes et techniques. Par exemple, ces questions restent souvent sans réponse : « Pourquoi quand on additionne ou on soustrait deux fractions, on les met au même dénominateur et quand on les multiplie, on ne les met pas au même dénominateur ? Pourquoi est-ce que le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif ? »

Les formateurs en mathématiques au Département des mathématiques et d'informatique se préoccupent souvent peu des instructions ministérielles, du système scolaire, des compétences professionnelles, des compétences disciplinaires, du Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ), ce qui fait dire à Hassane Squalli que « [l]a question de l'articulation entre la formation mathématique et la formation en enseignement des mathématiques est complexe » (p. 157). Il souligne par ailleurs que « cette articulation peut être favorisée en dehors des cours de mathématiques par des actions de formation, comme celle du journal de bord en résolution de problèmes, dans le cadre de cours de didactique des mathématiques. Bien sûr, il serait idéal que cette préoccupation soit aussi portée dans les cours de mathématiques. Mais cela peut ne pas être facile à réaliser, car cela nécessite de la part des formateurs de mathématiques d'intégrer dans leur enseignement des questions qui préoccupent l'enseignant des mathématiques ou l'étudiant didacticien des mathématiques » (p. 157).

De mon expérience, je pense que le rêve d'Hassane Squalli sera difficile à réaliser, car la préoccupation des formateurs de mathématiques, puisqu'ils sont mathématiciens de formation, n'intègre pas des questions didactiques dans leur enseignement. Le fonctionnement de leurs cours n'a pas pour but de faire un retour réflexif sur les apprentissages de leurs étudiants. Le statut de l'erreur, sujet au cœur de préoccupations didactiques, n'est pas le même. Il serait surprenant que celle-ci ait un statut de connaissance en soi. Le rôle de leurs cours n'est pas nécessairement de prendre en compte les conceptions personnelles des étudiants, qui pour nous didacticiens constituent autant d'obstacles à l'élaboration de nouvelles connaissances, ainsi que la mise en question de la construction de ces conceptions. Ainsi, il apparaît évident pour moi que le travail mathématique se fait dans deux mondes différents, et souvent les maillages entre ces deux mondes sont difficiles, voire rares.

Par ailleurs, le fait que certains formateurs en mathématiques ne sont pas centrés sur les savoirs essentiels des curriculums scolaires (PFEQ) en mathématiques amène parfois les didacticiens des mathématiques à transformer leurs cours de didactique en cours de mathématiques centrés sur le contenu mathématique enseigné au secondaire. Cette situation demande toutefois que le didacticien des mathématiques ait une solide formation en mathématiques pures *et* en didactique des mathématiques.

Cela met de l'avant des questions concernant la formation des didacticiens des mathématiques : Comment devient-on didacticien des mathématiques ? Comment sont formés les didacticiens des mathématiques ? Ces questions sont très importantes, car elles peuvent aider à mieux comprendre la qualité de la formation didactique et mathématique offerte aux futurs enseignants. Mura (1994) a déjà posé la question dans ce sens en menant une enquête auprès de 63 sujets qui enseignaient la didactique des mathématiques. Il ressort de cette étude que

> 56 sujets ayant participé à l'enquête (89 %) sont titulaires d'un doctorat. Les sept autres ont une maîtrise. Parmi les 56 doctorats, 46 sont en sciences de l'éducation (y compris la didactique des mathématiques), huit en sciences mathématiques et deux en psychologie. Sans exception, ceux et celles (32) qui ont spécifié que leur doctorat était en didactique des mathématiques ont classifié leur diplôme comme diplôme en sciences de l'éducation. Parmi les sept sujets qui ne détiennent pas de doctorat, trois sont des femmes et quatre des hommes, deux travaillent en milieu anglophone et cinq en milieu francophone. Quatre de ces sujets ont une maîtrise en mathématiques, un a une maîtrise en éducation, un a deux maîtrises (en éducation et en mathématiques) et un dernier a une maîtrise en administration. Ainsi, pour 75 % des sujets interrogés, le diplôme le plus élevé est en sciences de l'éducation. Parmi ces sujets, neuf (14 %) n'ont que des diplômes en sciences de l'éducation, 12 (19 %) n'ont que des diplômes en sciences mathématiques, 35 (56 %) ont des diplômes en mathématiques et en sciences de l'éducation, 16 (25 %) n'ont aucun diplôme en sciences de l'éducation et 12 (19 %) n'ont aucun diplôme en mathématiques. Quatorze sujets (22 %), en plus d'un ou plusieurs

> diplômes en sciences de l'éducation ou en mathématiques, ou dans les deux à la fois, sont titulaires de diplômes dans d'autres disciplines telles que la psychologie, les sciences de l'administration, le génie, la physique, la chimie, la biochimie, la biologie, l'histoire, la philosophie, les arts, la littérature et le latin (p. 97).

Cette enquête a été réalisée en 1994 et, depuis, les choses ont sûrement évolué. Existe-t-il toutefois, en 2011, un plus grand nombre de didacticiens qui ont la posture de « mathématicien-didacticien », pour répondre à la demande d'Hassane Squalli sur l'articulation entre la formation mathématique et la formation en enseignement des mathématiques ?

3. Formation pratique à travers les stages

Il faudrait souligner que la formation pratique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire fait partie intégrante de la formation mathématique, par le contenu à enseigner, et de la formation didactique, par la façon de l'enseigner. Les stagiaires ont un maître associé, généralement enseignant des mathématiques, qui les accompagne au quotidien dans la gestion de leur classe. Ils sont aussi accompagnés par les superviseurs universitaires (chargés de cours et professeurs).

Les compétences mathématiques des maîtres associés, qui sont par ailleurs formés par l'université dans la partie didactique, ne sont pas mises en doute. La situation peut être différente en ce qui concerne les superviseurs. En effet, à l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR), il y a une situation particulière quant à la supervision des stages au secondaire, alors que l'on constate qu'un superviseur spécialiste en univers social ou en anglais peut superviser des étudiants stagiaires en mathématiques. Bien que je sois un adepte de l'interdisciplinarité, je peux toutefois affirmer qu'un certain évanouissement de sens peut se produire dans la mesure où la supervision tourne et se centre alors sur la gestion de classe et la planification, au détriment du contenu mathématique à enseigner. Cela soulève la question fondamentale de l'articulation des apports disciplinaires et didactiques et de la pratique professionnelle des futurs enseignants des mathématiques.

En analysant la formation des superviseurs ayant intervenu dans les classes de mathématiques des stagiaires de 2008 à 2010 à l'UQTR, on constate que, pour les quatre stages du programme, il n'y a que cinq superviseurs sur 35 qui ont une formation en mathématiques, et qui de plus supervisent des stagiaires dans d'autres disciplines que les mathématiques. Pourtant, des modèles de supervision existent dans des universités un peu partout à travers le monde où le stagiaire est supervisé par un didacticien des mathématiques (ou un mathématicien formé à la didactique ou un didacticien formé aux mathématiques) et un spécialiste en pédagogie ou en psychopédagogie de la formation pratique pour s'assurer dès lors de l'évaluation du contenu à enseigner.

4. Conclusion

Je peux donc conclure que je suis parfaitement au diapason et en osmose avec Hassane Squalli ! Je souligne aussi que les futurs enseignants des mathématiques doivent être formés dans une approche fondée sur une dynamique d'étude et de recherche en ralliant le contenu mathématique du secondaire à la didactique des mathématiques à travers les méthodes et la planification des apprentissages.

Enfin, je conclus en citant Matheron (2011) qui, pour le bien de nos élèves du secondaire, note que :

> l'enseignement actuel des mathématiques est très loin de permettre aux élèves un engagement dans une dynamique d'étude et de recherche. On enseigne et fait apprendre des mathématiques sans qu'elles soient vécues comme réponse à des questions dont les élèves pourraient s'emparer. Le constat peut être dressé d'un enseignement des mathématiques dont les raisons d'être sont, aux yeux des élèves, de plus en plus évanescentes et dont le sens se perd (p. 1).

SECTION 4

Texte plénier 4

Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du primaire et du préscolaire ?

À la recherche des mathématiques dans une séquence sur l'enseignement des probabilités

Laurent Theis
Département d'enseignement au préscolaire et au primaire
Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences – CREAS
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke
laurent.theis@usherbrooke.ca

1. Introduction

Lorsque les organisateurs du colloque m'ont sollicité pour que je soumette un texte sur la formation mathématique des enseignants du primaire au début de 2010, j'ai accepté sans trop y réfléchir, et j'ai aussitôt oublié leur invitation. Ce n'est que plusieurs mois plus tard, à la rencontre annuelle du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM) à Moncton, que Jérôme Proulx m'a rappelé mon mandat. Je me rappelle en avoir été effrayé. Qu'est-ce que j'avais à dire sur la formation mathématique des enseignants du primaire ? Dans notre baccalauréat en enseignement au préscolaire et au primaire, il n'y a pas de formation mathématique spécifique, mais l'accent est principalement mis sur la formation en didactique des mathématiques. Nous avons fait quelques essais, à l'Université de Sherbrooke, pour implanter des ateliers de soutien aux étudiants qui éprouvent des difficultés en mathématiques, et ces ateliers et leurs effets ont fait l'objet d'une publication (Morin et Theis, 2006). Par contre, ils ont été abandonnés depuis lors faute d'intérêt de la part des étudiants : ceux-ci semblaient préférer se concentrer sur leurs difficultés en français, qui font l'objet d'une évaluation formelle susceptible de les éliminer du programme, ce qui n'est pas le cas des mathématiques. Dans la formation initiale des enseignants en adaptation scolaire et sociale, il y a aussi un cours visant le développement de la culture des mathématiques des étudiants, mais ce n'est pas le cas dans mon propre département d'enseignement au préscolaire et au primaire. Bref, ma première réaction était de dire : nous formons les futurs enseignants du primaire à la didactique des mathématiques, mais pas aux mathématiques en tant que telles.

Et pourtant ! Curieusement, un des commentaires récurrents des étudiants dans les évaluations des cours de didactique est justement qu'on n'y fait pas assez de didactique. Bien sûr, ce commentaire peut traduire une conception particulière des étudiants de ce qu'est la didactique. Pour certains d'entre eux, la didactique est moins une science qui analyse les relations entre enseignant, élève et contenu mathématique, mais plutôt un domaine qui leur fournit des outils applicables dans leur pratique d'enseignement des mathématiques. Quelquefois, plus explicitement, des étudiants trouvent également que nous faisons « trop de maths » dans les cours de didactique. Intéressant paradoxe : le formateur a l'impression de ne pas former les étudiants aux mathématiques, mais à la didactique, et les étudiants d'assister à un cours de mathématiques.

Par ailleurs, en parcourant le recueil issu du colloque 2009 de l'Association francophone pour le savoir (ACFAS) sur la formation des enseignants en mathématiques (Proulx et Gattuso, 2010), je me suis rendu compte que Patricia Marchand avait déjà réalisé une description exhaustive des différentes voies pouvant être envisagées afin d'améliorer la formation mathématique des enseignants du préscolaire et primaire et ceux d'adaptation scolaire et sociale (Marchand, 2010). Son analyse, qui se situe davantage à un niveau « macro », analysait et discutait différentes avenues possibles : des cours de mathématiques, des cours de didactique, des ateliers mathématiques, des examens de compétences mathématiques, etc., pour finalement plaider en faveur d'un dispositif global empruntant un ensemble de mesures. Que me reste-t-il alors à dire sur ces aspects ?

Pour remplir mon mandat, j'ai tenté de partir à la recherche de la formation mathématique que nous dispensons à nos étudiants en formation initiale. Je tente donc, dans ce chapitre, d'analyser ma propre pratique de formateur de futurs enseignants sous l'angle de la formation mathématique des étudiants. Pour ce faire, j'analyse une partie de la formation didactique des futurs enseignants sous l'angle de la formation mathématique qu'elle contient. J'ai choisi les cours de didactique sur l'enseignement des probabilités, et ce, pour plusieurs raisons. D'abord, la particularité du raisonnement probabiliste et sa distinction du raisonnement déterministe qui prévaut dans d'autres domaines des mathématiques : en effectuant des essais dans une situation probabiliste, on n'obtient pas nécessairement le même résultat d'une série d'essais à une autre, et il n'est pas possible de prévoir le résultat d'un essai. Ensuite, les probabilités sont un domaine dans lequel les conceptions erronées des étudiants sont particulièrement fréquentes, et où un travail important de reconceptualisation est nécessaire afin d'accompagner les étudiants dans leur cheminement d'une vision très algorithmique vers une approche qui combine une partie expérimentale (fréquentielle) avec une approche théorique. Finalement, la place des probabilités dans la formation des futurs enseignants est assez limitée (un cours et demi, soit l'équivalent de quatre à cinq heures), ce qui pose des défis particuliers, mais ce qui permet en même temps d'en faire une analyse assez succincte.

Ce cours s'est développé à travers ma pratique de formateur en didactique au fil des ans et des contributions que plusieurs de mes travaux ont permis d'y faire. La logique selon laquelle le cours a été construit repose essentiellement sur une logique de formation à la didactique et à l'enseignement des mathématiques. Par contre, ce cours n'a pas évolué en fonction d'un cadre lié à une formation *aux* mathématiques. Cette analyse au niveau *mathématique* s'est donc réalisée *a posteriori* pour l'exercice de l'écriture de ce chapitre.

Mon texte est structuré comme suit. Dans une première partie, je décris brièvement les caractéristiques des étudiants qui fréquentent le baccalauréat en enseignement au préscolaire et au primaire chez nous à l'Université de Sherbrooke. Par la suite, pour m'aider à réaliser l'analyse, je décris un cadre qui me permet de saisir quelles sont les mathématiques utilisées par les enseignants du primaire dans leur pratique d'enseignement. Dans une troisième partie, j'analyse en quoi la séquence sur l'enseignement des probabilités contribue (ou ne contribue pas) à la formation mathématique des futurs enseignants du primaire et je dégage un certain nombre de lacunes et d'enjeux liés à cette formation. Dans cette troisième partie, vers la fin, je réinvestis le cadre présenté en deuxième partie sur les connaissances mathématiques des enseignants du primaire pour analyser ma séquence d'enseignement sur les probabilités en fonction des mathématiques de l'enseignement qui y sont travaillées.

2. Particularités des futurs enseignants du primaire à l'Université de Sherbrooke

Dans son texte sur la formation mathématique de futurs enseignants du secondaire dans des provinces anglophones, Proulx (2010) dresse entre autres le portrait des caractéristiques des étudiants concernés. Comme nous allons le voir dans cette section, les futurs enseignants du primaire ont des profils très différents en mathématiques, à la fois au niveau conceptuel et affectif. Ainsi, Proulx souligne qu'au secondaire, les futurs enseignants « n'ont pas étudié les mathématiques par simple hasard ni décidé de les enseigner par hasard non plus, ces futurs enseignants apprécient beaucoup les mathématiques et se plaisent souvent à les travailler par pur plaisir. Ils ont donc développé une relation positive face aux mathématiques, autant au plan scolaire qu'au plan affectif, et ils s'identifient fortement aux mathématiques » (p. 130-131). Qu'en est-il des enseignants du primaire ? En 2003, nous avons soumis deux tests à 190 étudiants des baccalauréats en enseignement au primaire et au préscolaire et en adaptation scolaire et sociale, le premier visant à cerner leur rapport affectif aux mathématiques et à leur enseignement, et le second, à évaluer leur compréhension de différents concepts mathématiques enseignés au primaire (Theis *et al.*, 2006 ; Morin et Theis, 2006).

Sur le plan affectif, ces tests révèlent que 85 % des étudiants sont indifférents ou en désaccord (moyen ou fort) avec l'énoncé « Je suis très enthousiaste à l'idée d'enseigner les mathématiques ». Plusieurs d'entre eux sont anxieux à l'idée d'enseigner les mathématiques (13 % sont totalement en accord et 26 % moyennement en accord) et ont moins confiance en leurs habiletés à enseigner les mathématiques que les autres matières (17 % sont totalement en accord et 26 % sont moyennement en accord). Par ailleurs, deux profils d'étudiants particulièrement problématiques se dégagent. D'un côté, les étudiants qui disent que « faire des mathématiques, c'est beaucoup d'occasions de me sentir bête » (20 % des étudiants sont moyennement ou fortement en accord avec cet énoncé) ont également tendance à être d'accord avec l'énoncé « On est bon ou on n'est pas bon en mathématiques, on ne peut rien y faire, on ne peut rien changer » (16 % des étudiants). On se retrouve donc ici avec un profil d'étudiants qui se sentent faibles et qui, de surcroît, pensent que cette faiblesse est immuable. Un autre profil d'étudiants est tout aussi problématique, mais ne concerne qu'une faible minorité d'étudiants. Ce sont des étudiants qui ne sont pas convaincus qu'il faut « encourager les élèves à trouver plus d'une manière de résoudre un problème de mathématiques » (4 % des étudiants sont indifférents ou en désaccord avec cet énoncé), qui sont en désaccord ou indifférents avec l'énoncé « en classe de mathématiques, il est important que les élèves puissent échanger des idées et discuter des problèmes avec les autres » (3 % des étudiants) et avec l'énoncé « il est important d'encourager chaque élève à chercher la raison ou la logique derrière les procédures de résolution en mathématiques » (3 % des étudiants). Ce sont alors ici des étudiants qui témoignent d'une vision très algorithmique de l'enseignement des mathématiques.

Sur le plan cognitif, nous avons soumis un test à des étudiants en début de formation à l'enseignement au préscolaire et au primaire. Ce test comprenait différentes questions mathématiques, qui font toutes l'objet d'un enseignement en sixième année du primaire. Notre analyse des étudiants du baccalauréat en enseignement au préscolaire et au primaire (N = 204, Morin et Theis, 2006) révèle que les étudiants obtenaient une note moyenne de 51,7 %, (écart type de 16,4 %) et que certains étudiants avaient des difficultés majeures, se traduisant par des résultats aussi bas que 11 % à la note finale. Ces étudiants présentent alors des lacunes très importantes par rapport au contenu d'enseignement au début de leur formation.

Ce profil des étudiants n'est pas sans conséquence sur les besoins de formation des enseignants. Pour les enseignants du secondaire, Proulx (2010) a constaté deux phénomènes différents, soit une « compréhension compressée » des mathématiques, ainsi qu'une « compréhension instrumentale » des mathématiques. Si la première est en lien avec les mathématiques universitaires et s'applique donc moins aux futurs enseignants du primaire, la deuxième peut également être retrouvée chez des enseignants du primaire. En effet, une compréhension instrumentale des mathématiques signifie que le futur enseignant a surtout une compréhension du « comment faire », mais sans comprendre le « pourquoi le faire ainsi ». Curieusement, cette centration sur les algorithmes, sans nécessairement en comprendre le sens, se retrouve alors à la fois chez des étudiants qui ont une formation souvent faible en mathématiques, comme c'est le cas pour les enseignants du préscolaire et du primaire, et pour ceux qui ont fait un baccalauréat en mathématiques ou dans un domaine associé. Pour la formation des enseignants, les conséquences sont similaires. Ainsi, Proulx plaide en faveur d'une reconceptualisation des mathématiques, travail qui est certainement aussi pertinent pour les enseignants du primaire. Différence notable, cependant, le point de départ diffère largement. Si les enseignants au secondaire peuvent s'appuyer sur une formation solide en mathématiques, la reconceptualisation revêt souvent également un caractère de reconstruction de savoirs mathématiques de base pour les futurs enseignants du primaire.

3. Cadre pour comprendre les mathématiques utilisées par les enseignants du primaire dans leurs pratiques d'enseignement

Lorsque l'on se pose la question de l'amélioration des connaissances mathématiques des enseignants du primaire, il est bien important de ne pas perdre de vue pourquoi ces connaissances sont importantes. Ainsi, Ball et Bass (2003) rappellent que l'objectif de l'amélioration des connaissances mathématiques des enseignants n'est pas un but en soi, mais un moyen pour améliorer l'apprentissage des mathématiques chez les élèves. Le lien entre les connaissances mathématiques des enseignants et la qualité de leur enseignement est d'ailleurs souligné par divers travaux de recherche. Ainsi, la recherche de Swars *et al.* (2007) auprès de 103 étudiants dans un programme de formation à l'enseignement au primaire montre que les étudiants dont les connaissances mathématiques liées à l'enseignement (*specialized content knowledge for teaching mathematics*) sont plus développées ont plus tendance à croire que des élèves peuvent construire leurs propres connaissances mathématiques, et que les habiletés mathématiques devraient être enseignées en visant surtout la compréhension. Cette étude révèle aussi l'absence de lien entre les connaissances de mathématiques des enseignants et la perception de leur compétence à enseigner les mathématiques.

Mais quelles sont les mathématiques dont se sert l'enseignant dans son travail auprès des élèves ? Davis et Simmt (2006) soulignent que les mathématiques des enseignants ne sont pas simplement une version diluée des mathématiques utilisées par les mathématiciens, mais un domaine sérieux et exigeant du travail mathématique. Plusieurs auteurs, dont Ball *et al.* (2008, 2009), argumentent que les mathématiques utilisées par les enseignants ne sont pas de même nature que celles utilisées par les mathématiciens et sont très particulières au travail enseignant. Ainsi, Ball et Bass (2003) ont analysé le travail de l'enseignant afin de déterminer la nature des mathématiques qu'utilisent les enseignants dans leur pratique. Une des caractéristiques qui distinguent les mathématiques de l'enseignant de celles utilisées par les mathématiciens est alors leur nature, qu'ils appellent « décortiquée ». En effet, si le mathématicien utilise des mathématiques qui sont comprimées sous une forme abstraite et très efficace, l'enseignant, quant à lui, doit décortiquer ces mathématiques afin de les rendre accessibles aux élèves.

Ball *et al.* (2008) et Hill et Ball (2009) distinguent alors différents types de connaissances mathématiques. Dans le modèle développé par ces auteurs, les connaissances mathématiques sont regroupées en deux catégories principales : les connaissances du contenu (*subject matter knowledge*) et les connaissances didactiques (*pedagogical content knowledge*).

Dans la première catégorie se retrouvent trois types de connaissances. La première concerne les connaissances générales du contenu (*common content knowledge*). Cette catégorie est définie comme les connaissances et habiletés mathématiques utilisées dans d'autres domaines que l'enseignement. Elles font référence à la résolution correcte d'un problème et sont nécessaires parce que l'enseignant doit être en mesure de réaliser les tâches qu'il demande à ses élèves. Une deuxième catégorie, les connaissances spécialisées du contenu, fait référence aux connaissances qui sont particulières à l'enseignant et qui ne se retrouvent pas dans le travail du mathématicien. Elles interviennent par exemple lorsqu'un enseignant doit déterminer si une stratégie de résolution inhabituelle proposée par un élève est valide ou non, ou lorsque l'enseignant essaie de retrouver des régularités dans les erreurs d'un élève. Finalement, un troisième type de connaissances dans cette catégorie nécessite une vision horizontale des mathématiques (*horizon content knowledge*), qui demande à l'enseignant de connecter les mathématiques enseignées à un niveau précis aux mathématiques enseignées à d'autres moments.

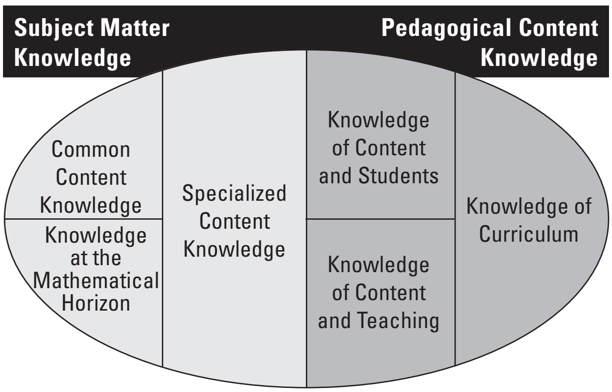


FIGURE 1
LES TYPES DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES, SELON HILL ET BALL (2009, P. 70)

Dans les connaissances didactiques, on retrouve d'abord les connaissances sur le contenu en lien avec les élèves (*knowledge of content and students*). Ces connaissances interviennent par exemple pour anticiper les raisonnements des élèves ou le degré de difficulté d'une tâche qui leur est proposée. Les enseignants doivent également être en mesure de reconnaître et d'interpréter les raisonnements émergents des élèves. Pour accomplir ces tâches, les enseignants doivent alors faire interagir leur compréhension mathématique avec leur connaissance des élèves et les raisonnements mathématiques de ces derniers. Ensuite, les connaissances sur le contenu en lien avec l'enseignement (*knowledge of content and teaching*) se situent à l'intersection entre les mathématiques et l'enseignement. Ces connaissances sont nécessaires par exemple lors du séquençage d'une séquence d'enseignement, du choix des exemples utilisés pour enseigner un concept donné et de l'évaluation des avantages et des inconvénients d'une représentation donnée d'un concept. Finalement, les connaissances des programmes constituent une dernière catégorie des connaissances didactiques[1].

4. À la recherche des mathématiques dans les cours sur l'enseignement des probabilités

Dans cette section, j'analyse le cours que je donne sur l'enseignement des probabilités à travers le filtre de la formation mathématique qu'il contient. Six éléments y sont abordés : 1) la présentation d'un exemple visant à situer les probabilités et à élargir la culture mathématique ; 2) la présentation d'un problème à résoudre pour introduire la nature particulière des probabilités ; 3) une réflexion sur les enjeux du travail sur des situations mathématiques complexes ; 4) le contenu mathématique dans les logiciels de simulation ; 5) les mathématiques dans les parties didactiques du cours qui touchent directement à l'enseignement ; et 6) la formation mathématique à travers la formation pratique.

4.1. Exemple visant à situer les probabilités et à élargir la culture mathématique

Habituellement, le cours sur les probabilités commence avec un exemple du monde médical tiré de Gigerenzer (2002). Le problème va comme suit :

> Environ 0,01 % des hommes qui n'ont pas de comportements à risque connus sont infectés avec le VIH. Si un homme est porteur du virus, il y a 99,99 % de chances que le résultat du test de dépistage soit positif. Si un homme ne porte pas le virus, il y a 99,99 % des chances que le résultat du test de dépistage soit négatif. Quelles sont les chances

1. Dans Ball *et al.* (2008), cette catégorie de connaissances est la seule à ne pas être définie de manière explicite. Les auteurs se réfèrent cependant, dans la première partie de l'article, à Shulman (1986), qui considère que cette catégorie de connaissances est « représentée par les programmes construits pour l'enseignement d'un sujet particulier à un moment donné, à la variété des matériels didactiques disponibles en relation avec ces programmes et les caractéristiques qui servent d'indicateurs et de contre-indicateurs pour l'utilisation de certains matériels reliés aux programmes dans des circonstances particulières » (p. 391, traduction libre).

> qu'un homme qui vient de recevoir un résultat positif dans un test de dépistage soit effectivement porteur du virus ? (p. 124, traduction libre).

À la suite d'une courte réflexion et d'un sondage auprès des étudiants, la très grande majorité des étudiants est généralement convaincue que les chances sont très élevées et dépassent les 90, voire les 99 %. Or, une représentation fréquentielle du même problème révèle que les probabilités d'être porteur du virus sont beaucoup plus petites : « Imaginez 10 000 hommes qui n'ont pas de comportements à risque connus. Parmi eux, un est porteur du virus du VIH et obtiendra presque certainement un résultat positif. Parmi les 9 999 autres personnes qui ne sont pas infectées, une personne aura également un test positif. Alors on peut s'attendre à ce que deux personnes aient un résultat positif. » (Traduction libre de Gigerenzer, 2002, p. 125.) Cette deuxième version du problème présente exactement les mêmes informations que la première, mais au lieu d'être exprimées sous forme de pourcentages, elles le sont de manière fréquentielle. Par conséquent, il est assez facile de constater que, lors d'un test positif, les probabilités d'être réellement infecté par le virus du VIH sont de 50 % seulement[2].

Pourquoi alors choisir un tel exemple pour entreprendre un cours de didactique des probabilités pour des enseignants du primaire ? Les notions de probabilités qu'il contient ne sont pas enseignées au primaire, mais il peut quand même occuper certaines fonctions :

- Tout d'abord, on peut espérer qu'il contribue au développement d'une culture mathématique : Au baccalauréat en enseignement au préscolaire et au primaire de l'Université de Sherbrooke, il n'y a pas de cours spécifiques visant à développer la culture mathématique des étudiants. Il est donc nécessaire de le faire à travers les cours de didactique. À cause de contraintes de temps, il n'est pas possible non plus de revisiter tous les contenus mathématiques (ou plus particulièrement probabilistes) vus au primaire. Il faut alors espérer que des exemples comme ceux qui précèdent éveillent suffisamment la curiosité des étudiants pour aller explorer plus loin.

2. Gigerenzer (2002) utilise ces exemples pour plaider entre autres en faveur de représentations différentes de situations probabilistes, sous forme de fréquences absolues, et non sous forme de fréquences relatives. Cependant, cet exemple n'est pas nécessairement abordé sous cet angle dans le cours.

- Ensuite, il permet peut-être aux étudiants de relativiser leurs propres difficultés en mathématiques. Lorsqu'un étudiant de Gigerenzer s'est présenté à 20 endroits différents pour effectuer un test du VIH et a questionné les intervenants sur la probabilité d'être porteur du virus lors d'un test positif, une majorité de ceux-ci n'a pas été en mesure de fournir une estimation réaliste de cette probabilité (Gigerenzer, 2002, p. 134). Savoir que des professionnels de la santé et des médecins, souvent perçus comme omniscients, ont autant de difficultés avec ces concepts de probabilités peut avoir un effet rassurant pour l'étudiant (ou inquiétant, du point de vue du patient).
- L'exemple illustre également l'importance d'une bonne compréhension des probabilités dans la vie de tous les jours. Les probabilités sont souvent perçues par les étudiants comme un domaine très éloigné de leur quotidien et assez aride à apprendre. On peut espérer que des exemples comme ceux-ci contribuent à développer une perception différente de l'utilité des probabilités au citoyen.
- Finalement, il met en relief les effets trompeurs souvent observés en probabilités. Celles-ci sont un domaine des mathématiques dans lequel les raisonnements intuitifs sont souvent trompeurs et de nombreuses conceptions erronées ont été décrites à cet effet dans la littérature scientifique. Des exemples comme ceux-ci peuvent illustrer ce phénomène. Dans ce sens, cet exemple pourrait développer des connaissances didactiques sur les mathématiques et l'élève. Ces connaissances ne sont alors pas particulières aux élèves du primaire, mais visent davantage à souligner, de manière générale, les difficultés vécues par de nombreuses personnes face à des problèmes de probabilités.

4.2. Problème pour introduire la nature particulière des probabilités

Le problème généralement utilisé dans mes cours pour travailler les mathématiques sous-jacentes aux probabilités est le paradoxe de Monty Hall, sous une version légèrement modifiée :

> Dans un pays où la justice est rendue de manière singulière, un prisonnier a été condamné. Pour déterminer sa peine, il doit choisir entre trois portes fermées, identiques. Derrière deux d'entre elles, c'est l'échafaud, mais derrière l'autre c'est la liberté ! Le prisonnier doit choisir une des trois portes. Le geôlier, qui sait derrière quelle porte se trouve la liberté, dans sa grande bonté, ouvre alors une des portes derrière laquelle se trouve un échafaud (différente de celle choisie par le prisonnier). Il demande ensuite au prisonnier : Maintenant que tu sais ce qui se trouve derrière la porte ouverte, veux-tu garder la porte que tu as choisie au début ou veux-tu changer de porte ? Qu'est-ce que le prisonnier devrait faire ? Changer de porte ou garder celle qu'il a choisie au début[3] ?

La majorité des gens répondent à ce problème en disant que changer de porte ne change rien et que les chances demeurent les mêmes, peu importe la stratégie utilisée. Ce problème, nommé le « paradoxe de Monty Hall » en référence au nom de l'animateur du jeu, est devenu célèbre lorsqu'il a été présenté – et longuement discuté par le public et la communauté mathématique – dans un hebdomadaire américain au début des années 1990. L'auteure de l'article, Marilyn vos Savant, répondait à la question d'un lecteur qui lui avait soumis ce problème, et argumentait que les candidats ont tout intérêt à changer de porte, puisque cela augmenterait leurs chances de gagner (Rosenhouse, 2009, p. 23). Comment cela se fait-il ?

Il existe de nombreuses manières d'aborder le problème, décrites entre autres dans Rosenhouse (*Ibid.*). Celle qui me semble la plus accessible à de futurs enseignants du primaire est la suivante : Prenons d'abord le cas d'une personne qui maintient la porte initiale. Pour gagner, elle doit, dès le départ, choisir la bonne porte, puisque c'est celle-là qu'elle conservera à la fin. Elle a donc une chance sur trois de tomber sur la liberté si elle utilise cette stratégie. Maintenant, qu'est-ce qui se passe si elle change de porte ? Prenons l'exemple suivant, dans lequel la liberté se trouve derrière la troisième porte. Si le candidat choisit au départ une porte derrière laquelle se trouve un échafaud (par exemple la porte un), le geôlier est obligé d'ouvrir l'autre porte contenant un échafaud (dans ce cas-ci, la deux) et, en changeant, le participant tombe forcément sur la liberté. Dans ce cas-ci, la condition

3. Le problème original fait plutôt intervenir un participant à un jeu télévisé qui doit choisir entre trois portes, dont deux qui contiennent une chèvre et une qui contient une voiture. Le candidat choisit une des trois portes et Monty Hall en ouvre une des deux autres non choisies, contenant toujours une chèvre. Le participant au jeu doit par la suite décider s'il garde sa porte du départ ou s'il change de porte. Je ne suis pas certain de l'origine de la variation du problème de Monty Hall présentée ici, mais elle peut être retrouvée à l'adresse suivante : <http://www.bibmath.net/dico/index.php3 ?action=affiche&quoi=./p/parpriso.html>.

pour gagner est donc de choisir, au départ, une porte avec un échafaud. En changeant de porte, il tombera alors inévitablement sur la liberté. Puisque deux portes correspondent à cette condition, le participant a deux chances sur trois de tomber sur la liberté s'il décide de changer de porte.

Habituellement, la majorité des étudiants est convaincue au départ que la modification du choix de porte ne modifie pas les probabilités de rester en vie. La résolution du problème, en équipe, se fait alors en plusieurs étapes. Dans une première phase, les étudiants sont incités à émettre individuellement une hypothèse sur la pertinence de changer de porte. Cette hypothèse est alors brièvement discutée avec les autres membres de l'équipe. Ensuite, les étudiants font des essais : ils désignent, dans chaque équipe, un prisonnier et un geôlier et ils simulent le problème. À ce stade-ci, aucune indication n'est fournie quant à la façon de simuler l'activité ou encore au nombre d'essais qu'il est nécessaire de faire. Ces aspects sont discutés lors de mes interventions dans chacune des équipes. Chaque équipe essaie ensuite d'analyser les résultats obtenus lors des essais et de les confronter à l'hypothèse initiale. Ils doivent alors émettre une nouvelle hypothèse sur la base des résultats observés et tenter de trouver une explication aux phénomènes qu'ils observent. Un retour en grand groupe permet finalement de revenir sur différentes manières de raisonner le problème et de traiter d'enjeux mathématiques et didactiques qu'il contient. Ceux-ci seront décrits dans la prochaine section, à travers les différents enjeux liés au recours à des problèmes.

4.3. Enjeux liés à la proposition de problèmes mathématiques complexes aux étudiants

Une question importante liée à l'utilisation de problèmes dans la formation initiale est celle des caractéristiques que devrait avoir un problème susceptible de développer la conceptualisation mathématique des futurs enseignants du primaire. Comme le rapport affectif de nos étudiants par rapport aux mathématiques est souvent négatif, une première caractéristique qui me semble intéressante est le caractère non menaçant d'un problème au début. À mon sens, un bon problème de mathématiques en est un dans lequel les étudiants peuvent entrer assez facilement et qui n'a pas besoin de recourir à un symbolisme développé et permette assez rapidement une exploration des concepts mathématiques engagés. Le problème de Monty Hall semble alors remplir cette caractéristique, puisqu'il ne semble pas *a priori* très menaçant. Rosenhouse (2009), qui a publié un livre qui se consacre exclusivement au problème de Monty Hall, a fait des observations qui vont dans le même sens. Si, d'habitude, les mathématiques font peur à beaucoup de gens, ils réagissent souvent de manière passionnée face à ce problème.

> *The reason, I believe, is, that the Monty Hall problem does not* look *like a math problem, at least not to people who think tedious symbol manipulation is what mathematics is really about. The problem features no mathematical symbols, no excessively abstract terminology or ideas. Indeed, the problem can be explained to a middle-school student. The scenario it describes is one in which we can all imagine ourselves* (p. 3, souligné par l'auteur dans l'original).

Une deuxième caractéristique de ce problème qui me semble intéressante et importante est la force de l'obstacle cognitif qu'il contient. Ayant présenté ce problème de nombreuses fois en formation des enseignants, j'ai pu constater que l'hypothèse initiale, qui est presque toujours de dire que le changement de porte ne modifie pas les chances de gagner, est très difficile à changer. De nombreux étudiants en sont très convaincus et refusent de changer d'idée. Les étudiants ne sont d'ailleurs pas les seuls à être induits en erreur par ce problème. Comme l'explique Rosenhouse (2009), lorsque le problème a été présenté dans une revue destinée à un grand public au début des années 1990, de nombreux mathématiciens professionnels ont contacté l'auteure de l'article qui a présenté la solution pour lui faire savoir qu'elle se trompait. La force de cet obstacle cognitif devient alors intéressante, parce qu'il illustre parfaitement la nature contre-intuitive des probabilités.

Une autre caractéristique de ce problème devient alors cruciale, à savoir le type de rétroaction qu'il fournit. C'est en faisant des essais successifs que les étudiants se rendent compte que les probabilités ne sont pas égales dans le cas de la stratégie « maintien du choix initial » et « changement de porte ». Ce type de validation, à travers un dispositif expérimental, est en même temps une des caractéristiques qui distinguent les probabilités des autres domaines mathématiques.

En outre, le retour sur le problème peut donner lieu à l'exploration d'autres concepts mathématiques. Par exemple, il faut déterminer combien d'essais sont nécessaires avant de pouvoir s'approcher des probabilités théoriques. La variabilité des résultats devient également un concept important à explorer. Pour certaines équipes, les résultats placent encore les deux choix proches de l'égalité des chances après 10 essais. Finalement, la loi des grands nombres peut être abordée à travers la nécessité de faire davantage d'essais pour se rapprocher davantage des probabilités théoriques.

Il me semble également important de souligner que ce problème permet à la fois de construire ou de reconstruire certains concepts probabilistes et de porter un regard sur une dimension didactique. Cela peut se faire en analysant les différentes étapes de leurs démarches de résolution, qui sont similaires à celles qu'utiliseront des élèves du primaire avec des problèmes moins complexes : l'émission d'une première hypothèse y est suivie par des expérimentations concrètes, l'évolution ou la modification des hypothèses de départ et l'explication des résultats obtenus sont autant d'étapes qui paraissent pertinentes pour la résolution de tout problème de probabilités par des élèves du primaire. Ces liens sont d'ailleurs directement abordés avec les étudiants à la suite de la résolution du problème. Par ailleurs, le fait que le problème est difficile à résoudre à l'aide d'une formule force en quelque sorte les étudiants à le décortiquer et à utiliser une approche qui est davantage basée sur la compréhension et l'exploration, comme expliqué plus haut.

Le degré de difficulté des problèmes soumis aux étudiants en formation initiale semble d'ailleurs être un enjeu important pour certains étudiants, surtout ceux qui éprouvent davantage de difficultés en mathématiques. Une des réactions de certains étudiants au problème de Monty Hall, souvent de ceux qui ont un rapport aux mathématiques difficile, est que le problème est trop difficile et qu'il ne s'adresse pas à des élèves du primaire : même si le problème n'a pas l'air menaçant au début, son fonctionnement n'est quand même pas facile à comprendre. Cependant, est-ce que les problèmes que nous fournissons aux futurs enseignants doivent nécessairement tous être du niveau de ceux qui pourraient être résolus par des élèves du primaire ? Comme la prémisse de base du cours de didactique est d'illustrer et de former à l'enseignement et l'apprentissage à travers des situations d'une certaine complexité, il me semble essentiel que cette complexité soit également présente pour les étudiants lorsqu'ils résolvent un problème.

De toute manière, la résolution d'un problème comme le paradoxe de Monty Hall ne devrait pas constituer une fin en soi. C'est beaucoup plus la richesse des concepts didactiques et mathématiques qu'il permet d'aborder qui le rend intéressant et riche pour la formation des enseignants. C'est d'ailleurs dans ce sens que le travail sur un problème mathématique pour des futurs enseignants se distingue probablement du traitement qu'on donnerait au problème dans une formation de mathématiciens. Dans un cours de didactique, ce problème sert de prétexte pour traiter de concepts reliés aux probabilités, de différents enjeux liés à l'enseignement, comme certains principes pour aborder une tâche de probabilités en classe ou les différences entre des approches fréquentielles et théoriques des probabilités.

4.4. Travail à l'aide d'un outil de simulation

Le travail sur le problème de Monty Hall, avec la réalisation d'essais manuels, est généralement suivi par la présentation d'un logiciel de simulation que nous avons développé en collaboration avec NetMaths dans le cadre d'un projet de recherche[4], et qui est accessible à l'adresse suivante : <http://www.netmaths.net/FeteForaine/Simulateurs.aspx>. L'utilité du simulateur est essentiellement de permettre de faire rapidement un grand nombre d'essais et d'éviter ainsi un des inconvénients lors de l'implantation d'une approche qui se base entre autres sur le fréquentiel : le temps nécessaire pour réaliser les différents essais. Notre simulateur contient différentes fonctions ou jeux que nous présentons dans le cours. Pour les besoins de cet article, je tenterai de faire ressortir comment deux de ces jeux peuvent faire avancer des concepts mathématiques liés aux probabilités chez les futurs enseignants du primaire : la simulation du paradoxe de Monty Hall et une simulation de la loterie 6/49.

D'abord, pour le problème de Monty Hall, le simulateur offre un graphique des pourcentages de gains obtenus. Comme on peut le voir sur la figure 2, ce graphique présente beaucoup de variations au début, pour se stabiliser par la suite. Ce graphique permet alors de revenir de manière différente sur la loi des grands nombres, sur la variabilité des résultats ainsi

---

4. Cette recherche a obtenu un soutien financier du Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FQRSC) (#2008-JA-124845), du Conseil de recherches en sciences humaines (CRSH) (#410-2007-2500) et du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS, Direction des ressources didactiques).

que sur les différences entre les probabilités théoriques et fréquentielles. Souvent, la simulation d’un grand nombre d’événements permet aussi de convaincre les étudiants qui pensent encore que changer de porte n’a pas d’effet sur les chances de tomber sur une porte contenant la liberté, après avoir fait des essais manuels.

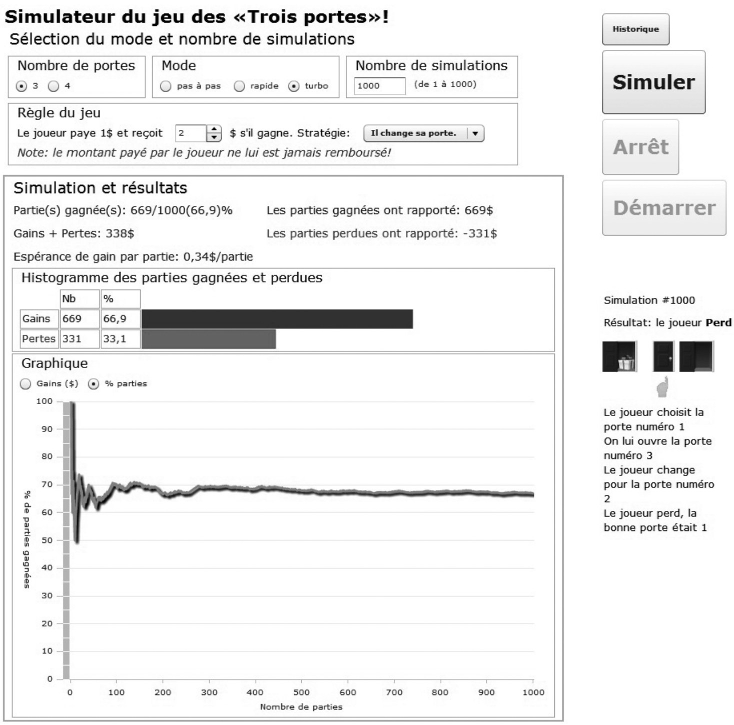


FIGURE 2
LE LOGICIEL DE SIMULATION DU PROBLÈME DE MONTY HALL

La simulation de la loterie 6/49 permet également de travailler un autre aspect des probabilités, celui de travailler sur les intuitions quant aux probabilités réelles de gagner. Ces intuitions ne sont pas seulement trompeuses quant à la structure du problème sous-jacent, mais également par rapport à l’ordre de grandeur que représentent les probabilités théoriques. Ainsi, d’un côté, la plupart des étudiants savent que les probabilités théoriques de gagner à cette loterie tournent autour d’une chance sur 14 millions. Ces probabilités sont cependant tellement petites qu’il devient difficile de développer un sentiment de l’ordre de grandeur qu’elles représentent. Il existe alors différentes possibilités d'illustrer cet ordre de grandeur. Rosenthal (2005, p.79) se sert d'exemples pour comparer les chances de gagner à la probabilité d'autres événements : les chances de mourir dans un accident de voiture la même année sont 1000 fois plus grandes que de gagner dans un tirage de loterie. Ou encore : un joueur qui prend un billet de loterie une fois par semaine gagne en moyenne moins qu'une fois tous les 250 000 ans. Le logiciel de simulations permet également de travailler sur cette intuition. En faisant faire 10 000 essais à tous les étudiants de la classe, les chances sont encore très faibles qu'un parmi eux obtienne six numéros corrects.

4.5. Réinvestissement du cadre sur les mathématiques des enseignants : analyse des mathématiques à l'intérieur des contenus qui touchent directement à l'enseignement

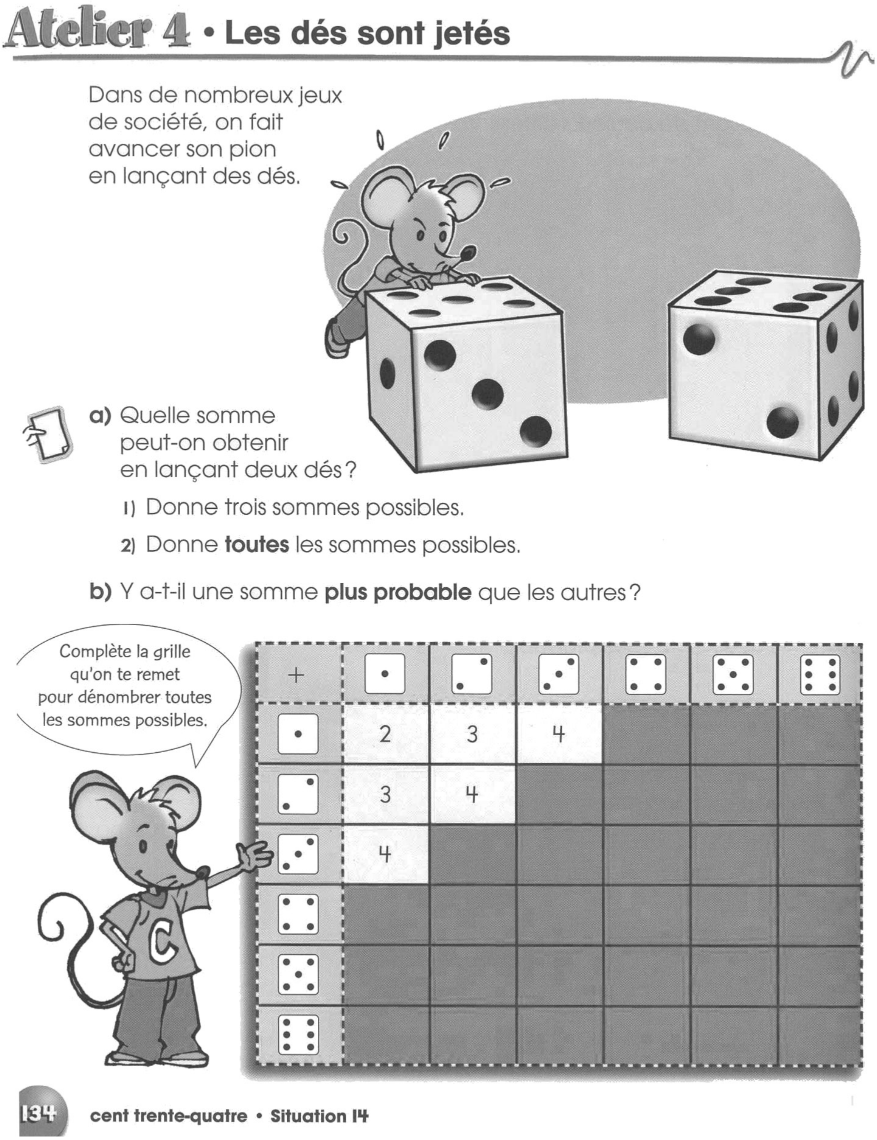
Dans cette section, je fais ressortir le travail mathématique dans les autres parties du cours sur l'enseignement des probabilités, qui sont davantage de nature didactique. Si, pour les parties précédentes, le travail mathématique était probablement plus évident à voir, ce n'est pas nécessairement le cas ici. Comme annoncé, je me sers ici du cadre développé par Ball *et al.* (2008), présenté auparavant, pour relier les activités en question à un travail mathématique.

La présentation et la discussion des conceptions erronées les plus fréquentes au regard des probabilités relève davantage des connaissances du contenu en lien avec les élèves, décrites dans le modèle de Ball *et al.* (2008). Dans cette partie du cours, nous expliquons en quoi consistent ces différentes conceptions et dans quelles situations on peut les retrouver. À titre d'exemple, une des conceptions erronées présentées est celle communément appelée le *gamblers' fallacy*, ou la conception relative aux effets trompeurs de la recension positive ou négative. Cette conception entrerait en jeu chez une personne qui mise sur des numéros de loterie qui sont sortis fréquemment au cours des derniers tirages, parce que ceux-ci auraient des chances plus élevées de sortir (recension positive). D'un autre côté, elle intervient également lors des jeux sur les machines à sous : un joueur qui continue à jouer sur une de ces machines parce que celle-ci n'a pas payé depuis longtemps et serait maintenant « due » manifeste également cette conception (recension négative). Ces exemples permettent alors d'illustrer l'importance de comprendre que le hasard n'a pas de mémoire et que les tours sont indépendants entre eux.

Par ailleurs, le travail sur les connaissances mathématiques en lien avec les élèves me semble une des lacunes majeures de mon dispositif de formation actuel. Ainsi, même si je présente les conceptions erronées les plus fréquentes, les étudiants ne sont pas amenés à analyser des erreurs d'élèves dans des problèmes particuliers ou encore à proposer des stratégies d'intervention pour aider à remédier à ces erreurs.

D'autres éléments du cours relèvent davantage des connaissances sur le contenu en lien avec l'enseignement. C'est le cas par exemple du travail sur différentes activités présentées dans des manuels scolaires. À titre d'exemple, les étudiants doivent d'abord déterminer en équipes lequel des deux résultats suivants est le plus probable en lançant simultanément deux dés : obtenir deux six ou obtenir un cinq et un six. Pour ce faire, ils peuvent avoir recours soit à des essais successifs – avec des dés ou avec le logiciel de simulation – ou à une approche théorique, en se basant sur un arbre des probabilités. Ensuite, nous analysons une activité extraite du manuel *Clicmaths*, présentée en figure 3, qui s'adresse à des élèves du deuxième cycle.

L'analyse d'une telle activité d'un manuel scolaire permet alors de dépasser la simple illustration du type d'activités proposées dans les manuels du primaire et d'aborder des aspects mathématiques sous différents angles. Ainsi, le travail mathématique dans l'analyse de cette activité peut porter sur le domaine de validité du schéma : celui-ci peut être pertinent pour compiler toutes les possibilités dans un dispositif expérimental qui contient seulement deux entrées et dont les données sont numériques et demandent un traitement d'une somme. Par contre, dès qu'on doit analyser les résultats obtenus lors du lancement de trois dés, ou encore analyser des essais avec des objets non numériques (des lancers de pièces de monnaie), cet outil devient plus difficile à utiliser. Une autre possibilité d'exploitation est d'essayer de comparer le fonctionnement de ce schéma avec celui d'un arbre des probabilités. Ces connaissances me semblent appartenir en partie aux connaissances spécialisées des mathématiques décrites par Ball *et al.* (2008), puisqu'elles concernent des aspects mathématiques qui sont particuliers au travail de l'enseignant.



Atelier 4 • Les dés sont jetés

Dans de nombreux jeux de société, on fait avancer son pion en lançant des dés.

a) Quelle somme peut-on obtenir en lançant deux dés ?

1) Donne trois sommes possibles.

2) Donne **toutes** les sommes possibles.

b) Y a-t-il une somme **plus probable** que les autres ?

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4			
⚁	3	4				
⚂	4					
⚃						
⚄						
⚅						

134 cent trente-quatre • Situation 14

FIGURE 3

UNE ACTIVITÉ SUR LES PROBABILITÉS DANS LE MANUEL *CLICMATHS*

Le même schéma peut cependant également être exploité du côté des connaissances sur le contenu en lien avec l'enseignement. Ainsi, la pertinence de proposer dès le départ, dans l'activité, un schéma qui mène vers une résolution somme toute assez mécanique de l'activité proposée peut être remise en question. Dès lors, différentes façons de modifier les variables didactiques peuvent être exploitées afin d'enrichir et de complexifier la situation proposée. Ainsi, le retrait des schémas donnés d'avance aux élèves ou la modification du nombre de dés permettrait d'enrichir considérablement l'activité. Ces constats sont alors confrontés à des principes didactiques de l'enseignement des probabilités, qui ont été élaborés à travers le travail sur le problème de Monty Hall et un résumé plus magistral des éléments qui se sont dégagés de ce travail. Par exemple, telle qu'elle est présentée, l'activité ne permet pas de suivre une séquence dans laquelle l'émission d'une première hypothèse est suivie de la réalisation d'une série d'essais, de l'explication des résultats et d'une formalisation. Ici encore c'est la présence du tableau qui force une entrée des élèves au niveau de la formalisation. En posant la question de façon différente (p. ex. : Est-il plus probable d'obtenir une somme de 10 ou de 7 en lançant deux dés ?), il est possible de travailler les mêmes concepts probabilistes, tout en permettant une entrée par des essais et la formulation et l'explication de différentes hypothèses.

4.6. Quel apport de la formation pratique ?

Une autre lacune de ma pratique de formation aux probabilités et à leur enseignement est que nous ne travaillons pas sur le développement ou la planification d'activités ou de problèmes qui pourraient être présentés à des classes du primaire. Or cette activité de planification en serait une qui nécessiterait la conjugaison des différents types de connaissances mathématiques évoquées par Ball *et al.* (2008) : il faut analyser la structure même du problème proposé et le problème ne doit être ni trop facile, ni trop difficile et permettre de travailler les objets visés lors de la planification. D'ailleurs, dans des formations continues, dans lesquelles nous[5] accompagnons des enseignants du secondaire dans la planification de situations-problèmes autour de la thématique des probabilités, une grande part de nos interventions sert à questionner le placement des variables didactiques par

5. Ces formations continues sont dispensées dans le cadre du projet de recherche sur l'enseignement des probabilités cité plus haut.

les enseignants et d'essayer de les modifier afin d'optimiser les chances que les élèves apprennent. L'anticipation des difficultés à prévoir par les élèves et le réajustement des situations en fonction de ces difficultés feraient alors également intervenir des concepts mathématiques complexes.

D'ailleurs, si la formation mathématique doit tenir compte de la planification de situations d'apprentissage, qu'en est-il de leur gestion didactique en formation pratique ? Ball *et al.* (2008) ont développé leur cadre sur les mathématiques que les enseignants utilisent en les observant en classe et en analysant leur travail. Est-ce que la formation mathématique ne doit alors pas aussi se passer en partie en action, dans le milieu de stage ? Depuis quelques années, j'accompagne des stagiaires de troisième ou quatrième année de formation. Ils ont l'obligation, sur les cinq moments de supervision, d'en présenter au moins deux dans le domaine mathématique. Les rencontres de rétroaction qui suivent les observations peuvent alors être riches en discussions mathématiques : analyses d'erreurs d'élèves, travail sur la structure mathématique des problèmes proposés par l'étudiant, etc. Ces discussions me semblent particulièrement efficaces, d'abord parce qu'elles se passent dans la situation réelle et nécessairement complexe de la salle de classe. En ayant la possibilité de confronter les étudiants aux actions et aux réactions des élèves à leur classe, il est également plus facile d'illustrer et de discuter des conséquences de leurs choix didactiques sur le comportement et l'apprentissage des élèves. Ces interventions permettent également de diriger davantage le regard des étudiants vers des aspects didactiques. Ainsi, les étudiants utilisent souvent le comportement – discipliné ou indiscipliné – des élèves comme indicateur de la qualité de leur activité. Lorsque des problèmes de comportement apparaissent, ils les attribuent souvent initialement à des techniques de gestion de classe déficitaires. Cependant, souvent, une analyse de la situation relève que les causes de ces comportements sont davantage de nature didactique : consignes des tâches peu claires et incompréhension des étudiants de ce qui est attendu, tâches trop faciles ou trop difficiles pour le niveau des élèves, incompréhensions des élèves qui les amènent à décrocher. Finalement, lors de l'analyse de ces situations, il est également possible de faire un lien direct avec les cadres didactiques et mathématiques vus dans le cours : c'est en stage, lors de l'analyse des activités proposées par les étudiants et des erreurs des élèves, que ceux-ci trouvent une application pratique et encadrée.

5. Conclusion

À la fin de l'analyse de ma pratique sur la formation à l'enseignement des probabilités, je dois constater que la formation contient finalement plus d'éléments mathématiques que je ne l'avais anticipé, et que la nature de ces éléments est diversifiée. Est-ce suffisant pour donner aux étudiants une base solide pour les préparer à l'enseignement des probabilités ? Rien n'est moins sûr. D'abord, le court laps de temps alloué à l'enseignement des probabilités rend impossible d'aborder tous les concepts qui sont pertinents pour le futur enseignant. Ensuite, d'importantes lacunes semblent persister dans la formation telle qu'elle existe actuellement, notamment en ce qui a trait à la planification et à la gestion d'activités visant à favoriser le développement de concepts probabilistes chez les étudiants. Finalement, les connaissances des étudiants sur les probabilités à la fin de la formation sont encore fragiles, comme en témoignent les nombreuses conceptions erronées dont font preuve certains étudiants lors de l'évaluation finale du cours, sous forme d'examen.

Que faire alors pour remédier à ces lacunes ? Faut-il proposer des cours d'appoint qui permettraient aux étudiants de consolider davantage certains concepts qu'ils auront à enseigner plus tard ? Si cette avenue est retenue, il me semble important que les connaissances mathématiques qui y sont travaillées soient utiles au futur enseignant du primaire, qu'elles soient purement mathématiques ou en lien avec les élèves ou l'enseignement. Est-ce que le travail d'analyse mathématique à la suite des activités réalisées en stage doit être renforcé ? Si cette option me paraît fort pertinente au niveau conceptuel, elle pose cependant d'importants problèmes au regard de sa mise en œuvre, puisqu'elle demande un investissement de la part du formateur beaucoup plus important que lors d'un cours en grand groupe.

Finalement, c'est peut-être sur le renforcement de toutes les dimensions des connaissances mathématiques qu'il est nécessaire de miser. En ce sens, mes conclusions au niveau d'une analyse fine d'une séquence seraient similaires à celles de Marchand (2010) lors de son analyse « macro » de différents dispositifs de formation : c'est dans la combinaison de différents dispositifs et mesures qu'on peut espérer les résultats les plus prometteurs.

Réaction 1 au texte de Laurent Theis

À la recherche d'un équilibre entre la formation mathématique et la formation didactique dans les cours de didactique des mathématiques au préscolaire et au primaire ?

Caroline Lajoie
Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques – GREFEM
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
lajoie.caroline@uqam.ca

1. Introduction

D'entrée de jeu, je tiens à préciser que c'est surtout à titre de formatrice que je réagis ici au texte de Laurent Theis. Depuis le début des années 1990, j'ai eu l'occasion d'intervenir dans les programmes de formation des maîtres du primaire de trois universités canadiennes, dans des cours de mathématiques ainsi que dans des cours de didactique des mathématiques. Dans tous les cas, ces programmes comportaient des cours de mathématiques *et* des cours de didactique des mathématiques.

Dès le départ, le titre du texte de Laurent Theis m'a souri : « Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du primaire et du préscolaire ? À la recherche des mathématiques dans une séquence sur l'enseignement des probabilités ». En fait, j'étais particulièrement emballée par le thème mathématique retenu, soit celui des probabilités. Il faut dire que je terminais alors la codirection, avec ma collègue Annie Savard, d'un mémoire de maîtrise portant sur l'apprentissage des probabilités par des élèves du secondaire (Thibault, 2011), et que j'ai toujours aimé enseigner les probabilités et la didactique des probabilités aux futurs enseignants du primaire. Si j'étais emballée par le thème mathématique du texte de Laurent Theis, j'étais toutefois intriguée par le fait que l'auteur se dise, dans le titre de son texte, « à la recherche des mathématiques ». Je ne voyais pas comment on pouvait être à la recherche des mathématiques dans une séquence sur les probabilités… Puis, j'ai compris. Contrairement à moi, Laurent Theis intervient dans un programme de formation à l'éducation préscolaire et à l'enseignement primaire qui ne comporte pas de cours de mathématiques. Ainsi, pour remplir le mandat qui lui a été confié pour son texte, il a dû se mettre à la « recherche » de la formation mathématique dispensée dans un cours orienté plutôt vers la didactique des mathématiques.

2. Un paradoxe qui force à réfléchir

Laurent Theis nous fait part, dès les premières lignes de son texte, d'un commentaire récurrent chez ses étudiants, à savoir que dans les cours de didactique des mathématiques, on ne fait pas assez de didactique… L'auteur suggère à juste titre que derrière ce commentaire se cache probablement une conception particulière de la didactique, puis il dégage le paradoxe suivant, qu'il qualifie lui-même d'« intéressant » :

> […] le formateur a l'impression de ne pas former les étudiants aux mathématiques, mais à la didactique, et les étudiants d'assister à un cours de mathématiques […] (p. 182).

Si ce paradoxe a manifestement amené l'auteur à réfléchir sur la formation *mathématique* dispensée dans ses cours, il m'entraîne pour ma part dans une réflexion sur la relation – je parle plus loin d'une recherche *d'équilibre* – entre la formation mathématique et la formation didactique dans les cours de didactique des mathématiques du primaire.

3. Quel est le bagage, tant affectif que mathématique, dont disposent les étudiants-maîtres du primaire lorsqu'ils s'attaquent à la séquence d'enseignement des probabilités décrite ?

En s'appuyant sur des travaux de recherche, dont certains auxquels il a lui-même participé, Laurent Theis dresse un portrait des étudiants en formation de maîtres du primaire, tant en ce qui a trait à leur compréhension de différents concepts enseignés en sixième année du primaire qu'à leur rapport affectif aux mathématiques et à leur enseignement. L'auteur, se référant à Proulx (2010), dégage de ce portrait une distinction importante entre le « point de départ » des futurs maîtres qui s'engagent dans des cours de didactique des mathématiques du primaire et celui des futurs maîtres qui s'engagent dans des cours de didactique des mathématiques du secondaire :

> Ainsi, Proulx plaide en faveur d'une reconceptualisation des mathématiques, travail qui est certainement aussi pertinent pour les enseignants du primaire. Différence notable, cependant, le point de départ diffère largement. Si les enseignants au secondaire peuvent s'appuyer sur une formation solide en mathématiques, la reconceptualisation revêt souvent également un caractère de reconstruction de savoirs mathématiques de base pour les futurs enseignants du primaire (p. 186).

Dès lors, on comprend que Laurent Theis reconnaît la nécessité d'une formation mathématique pour le futur enseignant du primaire, formation qui viserait une *re-conceptualisation*, voire une *re-construction* de savoirs mathématiques de base, et qui se ferait essentiellement, dans le contexte qui est le sien, à travers des cours de didactique des mathématiques.

Pour remplir le mandat qui lui a été confié par les organisateurs du présent colloque, l'auteur a choisi d'analyser une séquence d'enseignement sur les probabilités qu'il dispense dans ses cours de didactique des mathématiques pour les futurs maîtres du primaire, sous l'angle de la formation mathématique à laquelle elle contribue. Une partie de cette analyse s'appuie sur le cadre théorique de Ball *et al.* (2008), sur lequel je reviens plus loin.

Dans les écrits en didactique des mathématiques, plusieurs conceptions à l'égard des probabilités ont été examinées (voir par exemple Garfield et Ahlgren, 1988). Ces idées intuitives jouent souvent le rôle de modèles explicatifs, qui fonctionnent dans plusieurs contextes, mais qui peuvent s'avérer inappropriés dans d'autres. Les étudiants-maîtres n'y échappent pas, d'autant plus qu'il semble que ces idées se renforcent avec l'âge (Carpenter *et al.*, 1981). Laurent Theis est conscient de la présence de ces conceptions chez ses étudiants :

> […] les probabilités sont un domaine dans lequel les conceptions erronées des étudiants sont particulièrement fréquentes, et où un travail important de reconceptualisation est nécessaire afin d'accompagner les étudiants dans leur cheminement d'une vision très algorithmique vers une approche qui combine une partie expérimentale (fréquentielle) avec une approche théorique (p. 183).

Du fait que plusieurs conceptions sont présentes chez les étudiants-maîtres, l'auteur reconnaît la nécessité d'un travail de *re-conceptualisation* des probabilités. Je précise, pour ma part, que le travail demandé aux futurs maîtres du primaire en ce qui a trait aux probabilités fréquentielles (puisqu'on s'attend d'eux qu'ils travaillent avec ce type de probabilités dorénavant enseignées au primaire) est souvent davantage un travail de *construction* ou de *conceptualisation* qu'un travail de *re*-construction ou de *re*-conceptualisation, puisque les étudiants-maîtres n'ont souvent d'expérience qu'avec les probabilités théoriques ; c'est du moins ce que j'ai constaté dans le cadre de mes expériences de formatrice.

4. Analyse d'une séquence d'enseignement sur les probabilités : formation mathématique ou formation didactique ?

À la lecture du premier problème, que je ne connaissais pas, je me suis rappelé qu'une des premières choses que j'ai apprises à l'école en ce qui a trait aux probabilités est que, dans ce domaine, il faut se méfier de ses intuitions… Dans la séquence présentée par Laurent Theis, ce problème sert justement, du moins en partie, à mettre en relief « les effets trompeurs souvent observés en probabilités » (p. 191). En ce sens, il contribue à la formation mathématique des futurs maîtres, puisqu'il met à jour certaines de leurs intuitions et qu'il les met en garde contre celles-ci. Il contribue aussi d'autres manières à leur formation mathématique, comme le met en évidence Laurent Theis lui-même, soit en contribuant au développement d'une culture mathématique, en leur permettant de relativiser leurs propres difficultés en mathématiques (puisque nombreuses sont les personnes à tomber dans le piège posé par ce problème) et en illustrant l'importance d'une bonne compréhension des probabilités dans la vie de tous les jours (ce qui ne va pas toujours de soi pour les étudiants-maîtres).

Quant au deuxième problème proposé dans la séquence, qui consiste en quelque sorte en un déguisement du paradoxe de Monty Hall, fort connu dans le domaine des probabilités, il m'apparaît être un autre bon problème *mathématique* pour des futurs enseignants du primaire, et ce, pour plusieurs raisons. D'abord, il est simple en apparence et facile d'accès. Ensuite, si sa résolution ne nécessite pas une approche par les simulations, le recours à celles-ci peut avoir un effet déstabilisant, puisque le risque est élevé que les données expérimentales aillent à l'encontre de l'hypothèse initiale. Il devient alors nécessaire, ou du moins utile, d'examiner le problème à la fois de manière théorique et de manière expérimentale, ce qui force l'étudiant-maître à revoir *autrement* certains concepts probabilistes, et à faire la distinction entre les probabilités fréquentielles et les probabilités théoriques, ce qui représente une distinction qui ne va pas de soi.

Évoquant *grosso modo* les arguments précédents, Laurent Theis voit dans ce deuxième problème – celui de Monty Hall – un potentiel de formation *mathématique*. Il y voit de plus un potentiel de formation *didactique* puisque, du fait que le processus de résolution de ce problème ressemble en plusieurs points au processus de résolution d'un problème de probabilités moins complexe que pourrait adopter un élève du primaire, il devient possible pour les étudiants-maîtres, guidés par leur formateur, de faire des liens avec l'apprentissage des probabilités à l'école primaire. En ce qui me concerne, je vois dans ce problème un bon exemple de problème mathématique « adapté » aux futurs maîtres du primaire puisque, sans être trop « éloigné » d'un problème qu'on proposerait à des élèves du primaire, il permet aux futurs maîtres de faire eux-mêmes des mathématiques, de construire ou de reconstruire certains concepts, de remettre en question certaines intuitions, d'analyser leur propre processus de résolution de problèmes, etc. Autrement dit, ce problème est susceptible de faire vivre aux futurs enseignants une véritable *activité mathématique*, en plusieurs points semblable à celle que pourrait vivre un élève du primaire.

À la suite de ces deux premiers problèmes, contre-intuitifs à souhait, l'activité autour d'un extrait de manuel scolaire du primaire doit avoir un effet rassurant sur les étudiants-maîtres, d'autant plus que cette activité est cette fois *en apparence* plus didactique… Le niveau de difficulté des mathématiques imbriquées dans cette activité n'est toutefois pas négligeable, compte tenu du fait qu'elle demande un lancer simultané de deux dés (voir par exemple Watson et Kelly, 2009). En effet, si l'activité mathématique tirée du manuel scolaire semble simple, elle est tout de même susceptible de défier l'intuition de certains étudiants qui croiront que toutes les sommes possibles sont équiprobables. De plus, il est à parier que plusieurs résisteront, même après avoir analysé la situation à l'aide du modèle proposé, à considérer les cas (3, 4) et (4, 3) comme des cas différents permettant d'obtenir une somme de 7. Je suis donc tout à fait d'accord avec Laurent Theis, qui voit dans cette tâche un potentiel didactique, bien sûr, mais aussi un potentiel mathématique.

Cette activité didactique proposée aux futurs maîtres du primaire me semble encore une fois bien choisie, compte tenu des intentions du formateur. Le niveau de difficulté plus abordable sur le plan mathématique fait en sorte que les étudiants, du moins plusieurs d'entre eux, pourront entrer relativement facilement dans la réflexion didactique à laquelle les convie leur formateur, et ce, même si l'activité comporte un travail mathématique.

L'auteur analyse ce troisième élément de sa séquence en ayant recours au cadre de Ball *et al.* (2008). Ce cadre lui permet de saisir quelles sont les *mathématiques pour l'enseignement* qui sont en jeu dans cette partie du cours qui, de son propre aveu, a davantage une visée didactique. Cette analyse m'a fait réfléchir. Je me suis d'abord demandé si ces *mathématiques pour l'enseignement* étaient réellement des mathématiques pour moi. Puis, je me suis dit que cette distinction n'avait peut-être pas tant d'importance ici, puisque tous les types de savoirs énumérés et tous les types de tâches donnés en exemple méritent leur place dans une formation à l'enseignement des mathématiques… et apparaissent donc pertinents dans le cadre d'un cours de didactique des mathématiques. Je tiens tout de même à souligner qu'il m'apparaît important que les futurs maîtres aient aussi des occasions de faire des mathématiques sans se soucier de leurs éventuels élèves, de l'enseignement primaire, des manuels scolaires, de l'évaluation, de la construction d'activités, etc. Il m'apparaît important, autrement dit, qu'on leur donne l'occasion de se mettre dans la peau d'un élève qui apprend les mathématiques et qu'on prenne le temps de discuter de cette expérience avec eux. Ces mathématiques-là devraient, elles aussi, avoir leur place dans une formation à l'enseignement, même si elles ne sont peut-être pas directement des mathématiques *pour* l'enseignement…

5. À la recherche d'un équilibre entre la formation mathématique et la formation didactique

J'ai senti, à la lecture de l'analyse que Laurent Theis propose de son propre dispositif de formation, qu'un défi important à relever, dans son contexte, est de trouver un équilibre entre la réflexion mathématique et la réflexion didactique à susciter chez ses étudiants (par les tâches qu'il propose, par ses interventions, etc.). On sent cette recherche d'équilibre, tant dans l'ensemble de son dispositif que dans certaines des activités qui le composent. L'extrait suivant, qui concerne le problème de Monty Hall, traduit bien, il me semble, cette recherche d'équilibre :

> Une des réactions de certains étudiants au problème de Monty Hall, souvent de ceux qui ont un rapport aux mathématiques difficile, est que le problème est trop difficile et qu'il ne s'adresse pas à des élèves du primaire : même si le problème n'a pas l'air menaçant au début, son fonctionnement n'est quand même pas facile à comprendre. Cependant, est-ce que les problèmes que nous fournissons aux futurs enseignants doivent nécessairement tous être du niveau de ceux qui pourraient être résolus par des élèves du primaire ? Comme la prémisse de base du cours de didactique est d'illustrer et de former à l'enseignement et l'apprentissage à travers des situations d'une certaine complexité, il me semble essentiel que cette complexité soit également présente pour les étudiants lorsqu'ils résolvent un problème. (p. 195)

Me voilà donc prise à mon tour avec un nouveau paradoxe, avec lequel mon collègue me semble lui aussi un peu pris… N'est-il pas surprenant qu'on discute de la recherche d'un équilibre entre formation mathématique et formation didactique dans un cours de didactique des mathématiques ? La balance ne devrait-elle pas pencher, dans un tel cours, du côté de la formation didactique ?

6. Une formation mathématique imbriquée dans une formation didactique : à quel prix ?

Le texte de Laurent Theis m'a amenée à réfléchir sur les risques d'une formation mathématique *imbriquée* dans une formation didactique. En théorie, pourtant, j'aime bien cette idée de formation mathématique imbriquée, en quelque sorte *connectée* à une formation didactique. En pratique, toutefois, il m'apparaît que cette option de formation comporte des risques (au même titre que toute autre option évidemment, mais ce n'est pas là l'objet du présent texte). Le principal risque que je vois avec cette option de formation est que la réflexion mathématique l'emporte. Quelque part, l'inverse me dérange moins, du moins dans un cours de didactique des mathématiques ! La réflexion mathématique est bien entendu nécessaire pour l'étudiant-maître du primaire. Cependant, doit-elle se faire strictement dans des cours de didactique des mathématiques, au détriment nécessairement d'une réflexion didactique ? À l'instar de Corriveau (2010), je crains qu'en travaillant simultanément, dans un même cours, et parfois par le biais des mêmes activités, les dimensions mathématique et didactique, on se trouve à occulter une dimension au profit de l'autre. Pour les futurs maîtres du primaire, il m'apparaît que la deuxième dimension, soit la dimension didactique, risque plus d'être occultée que la première : les étudiants-maîtres du primaire étant susceptibles de demeurer au niveau de la réflexion mathématique… Quel formateur ne s'est jamais retrouvé devant des étudiants-maîtres du primaire qui, trop pris par les mathématiques en jeu dans une tâche de nature pourtant didactique, ne parviennent pas à s'engager dans la réflexion didactique à laquelle ils sont pourtant conviés ?

7. Des lacunes dans le dispositif de formation décrit… Quelles lacunes ?

Laurent Theis, dans son texte, fait ressortir des « lacunes » de son dispositif de formation.

> […] le travail sur les connaissances mathématiques en lien avec les élèves me semble une des lacunes majeures de mon dispositif de formation actuel. Ainsi, même si je présente les conceptions erronées les plus fréquentes, les étudiants ne sont pas amenés à analyser des erreurs d'élèves dans des problèmes particuliers ou encore à proposer des stratégies d'intervention pour aider à remédier à ces erreurs. (p. 199)
>
> Une autre lacune de ma pratique de formation aux probabilités et à leur enseignement est que nous ne travaillons pas sur le développement ou la planification d'activités ou de problèmes qui pourraient être présentés à des classes du primaire. (p. 201)

Si l'auteur voit dans ce qui précède des lacunes dans son dispositif, j'y vois plutôt pour ma part un effet des contraintes posées par le contexte dans lequel il intervient ! Où pourrait-il trouver le temps, et ses étudiants-maîtres l'énergie, de parcourir tout ce trajet, de la remise en question de leurs propres conceptions à l'égard des probabilités à la conception d'activités pour le primaire, en passant par l'étude des conceptions fréquentes, l'analyse d'erreurs, etc., en quelques heures à peine, tout en sachant que la complexification des conceptions probabilistes demande beaucoup de temps ?

8. Conclusion

Tout contexte de formation à l'enseignement des mathématiques du primaire comporte ses limites. N'ayant pas connu de l'intérieur celui dans lequel intervient Laurent Theis, j'étais portée à croire, avant la lecture de son texte et la réflexion qu'elle a provoquée chez moi, que la formation mathématique était laissée pour compte dans un tel contexte. Le texte de Laurent Theis me montre bien, au contraire, qu'une véritable réflexion mathématique peut avoir lieu dans un tel contexte, mais que cette réflexion risque de se faire au détriment de la réflexion didactique que nous souhaitons, en tant que didacticiens des mathématiques, provoquer chez les étudiants-maîtres du primaire. C'est, à mon avis, ce que révèle le commentaire des étudiants-maîtres cité dès le début du texte. Je remercie donc l'auteur de m'avoir permis d'analyser la situation sous un autre angle.

Réaction 2 au texte de Laurent Theis

Quelle formation mathématique pour les enseignants en formation continue ?

Louise Poirier
Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation
Université de Montréal
louise.poirier.2@umontreal.ca

1. Introduction

Les organisateurs du colloque m'ont demandé de réagir au texte de Laurent Theis, texte ayant pour titre « Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du primaire et du préscolaire ? À la recherche des mathématiques dans une séquence sur l'enseignement des probabilités ». J'ai d'abord lu avec beaucoup d'intérêt le texte de Laurent Theis. Je l'ai ensuite relu pour préparer ma réaction et je l'ai relu et relu. Puis se sont installés la panique et un sentiment d'imposture. Voilà plusieurs années que je n'ai pas enseigné au baccalauréat en enseignement préscolaire-primaire ; depuis quelques années, je donne des cours en formation continue auprès d'enseignants du primaire. Ensuite, l'article de Laurent Theis porte sur un domaine mathématique que je n'ai jamais enseigné en formation des maîtres : les probabilités. Le seul travail que j'ai fait en probabilités a été en première et deuxième année du primaire, dans la classe d'Anne-Marie Carbonneau. Ce travail a donné lieu à une publication en 2002, soit *Expérimentation d'un conte probabiliste dans une classe multiâges du premier cycle du primaire*. C'est dire le peu d'expérience que j'ai avec les probabilités.

Ainsi, ma réaction reprend d'abord quelques éléments du texte de Laurent Theis, auxquels je réagis. Puis je reprends le cadre proposé par l'auteur et je tente de l'appliquer aux cours donnés cette année dans le cadre d'un microprogramme auprès d'enseignants en formation continue.

2. Réaction au texte. Caractéristiques des étudiants du baccalauréat préscolaire-primaire à l'Université de Sherbrooke : mais qu'en est-il à l'Université de Montréal ?

L'auteur prend comme angle d'attaque la formation mathématique que l'on retrouve dans les cours de didactique des mathématiques en formation initiale. Son texte se décline en trois temps : une présentation des caractéristiques des étudiants du baccalauréat préscolaire-primaire à l'Université de Sherbrooke ; une présentation d'un cadre pour mieux saisir les mathématiques dont les enseignants du primaire ont besoin ; puis l'application de ce cadre à un cours dispensé par Laurent Theis portant sur l'enseignement des probabilités.

L'auteur explique qu'en 2003 deux tests ont été présentés à 190 étudiants des baccalauréats en enseignement au primaire et au préscolaire et en adaptation scolaire et sociale. Ces deux tests visaient le rapport affectif qu'avaient développé ces enseignants envers les mathématiques et leur enseignement, ainsi que l'évaluation de leur compréhension de concepts mathématiques.

À ma connaissance, il n'y a pas eu d'évaluation semblable auprès de nos étudiants à l'Université de Montréal (UdeM), si ce n'est des discussions dans le tout premier cours de didactique des mathématiques pour « faire sortir le méchant », expression empruntée à ma collègue Sophie René de Cotret, en faisant référence à cette activité du premier cours où les étudiants sont amenés à expliciter leur rapport aux mathématiques. À lire les résultats obtenus à l'Université de Sherbrooke, je crois que nous aurions sensiblement les mêmes : un nombre important d'étudiants qui ne sont pas emballés par l'idée d'avoir à enseigner les mathématiques et un nombre moins important certes, mais tout de même significatif, d'étudiants qui se disent anxieux face aux mathématiques et qui ont un sentiment d'incompétence.

Pour ce qui est des connaissances mathématiques, nous avions un test d'entrée en mathématiques. Les étudiants qui échouaient à ce test devaient faire un cours d'appoint en mathématiques, « Notions mathématiques au primaire », cours offert par le Département de didactique. Ce cours était sous la responsabilité de Sophie René de Cotret et d'une équipe importante de chargés de cours, car environ 80 % des étudiants devaient suivre ce cours. Ce cours leur permettait de revisiter les mathématiques enseignées au primaire et au début du secondaire. Il était offert en première session de la première année. Je donnais ensuite leur premier cours de didactique des mathématiques : *Arithmétique au préscolaire et premier cycle du primaire*.

Dans ce cours, nous travaillons entre autres la numération et, pour ce faire, nous passons par un travail sur différentes bases afin d'amener les étudiants à mieux comprendre notre système de numération. Les étudiants qui avaient suivi le cours d'appoint arrivaient bien préparés pour ce travail de numération, tandis que les étudiants qui avaient réussi le test et, par le fait même, n'avaient pas suivi le cours de récupération n'avaient pas travaillé ces aspects et se sentaient incompétents ; dès lors, une certaine frustration s'installait. Face à ces réactions et au fait que tous les étudiants pourraient bénéficier de ce cours d'appoint, celui-ci est devenu obligatoire dans les baccalauréats préscolaire-primaire et adaptation scolaire.

La situation des étudiants de l'Université de Montréal, tant sur le plan de leur relation affective aux mathématiques que de leurs connaissances mathématiques, est donc sensiblement la même que celle des étudiants de l'Université de Sherbrooke.

3. Cadre sur les connaissances mathématiques des enseignants : tentative d'application dans un contexte de formation continue

Dans la seconde partie de son texte, l'auteur présente un cadre de référence pour mieux dégager les mathématiques dont les enseignants du primaire ont besoin. Il s'agit du cadre de référence de Ball, Thames et Phelps (2008) et de Hill et Ball (2009). Ce cadre de référence dégage les différents types de connaissances mathématiques nécessaires aux enseignants. Par la suite, l'auteur, en utilisant ce cadre de référence, dégage les mathématiques présentes dans un cours sur l'enseignement des probabilités. La relecture qu'il fait de son cours de didactique des probabilités avec le filtre qu'est ce cadre de référence est très intéressante et m'a inspirée pour faire la même chose de mon côté, mais cette fois pour des cours donnés en formation continue auprès d'enseignants du primaire. Ainsi, dans ce qui suit, je situe le microprogramme, puis je dégage les connaissances mathématiques travaillées dans les cours.

3.1. Contextualisation du microprogramme

Ce microprogramme prend sa source dans un projet de codéveloppement qui a eu lieu de 2009 à 2010. Ce projet est lui-même issu de la préparation d'un cours du baccalauréat en adaptation scolaire. En effet, ce projet est né au cours de l'automne 2008 lorsqu'une chargée de cours et moi-même préparions le cours que nous donnions dans le programme de baccalauréat en adaptation scolaire. Nous lisions alors le chapitre d'un livre écrit par Herbert Ginsburg (1997). Le chapitre intitulé « The myth of the deprived child » nous a beaucoup fait réfléchir et a inspiré ce projet qui porte sur l'apprentissage en mathématiques d'élèves venant de cultures différentes de la culture dominante. Dans ce projet, nous entendons par « cultures différentes » autant les élèves issus de communautés culturelles que les élèves venant de milieux défavorisés où la culture de la famille est différente de la culture véhiculée par l'école.

Le projet prenant forme, nous avons frappé à la porte du Programme de soutien à l'école montréalaise. Il nous semblait que ce projet s'intégrait facilement dans les objectifs de développement du programme. Le projet a été accepté, de telle sorte qu'en janvier 2009 il pouvait démarrer.

Le projet a fait appel à des jeux de mathématiques issus de diverses cultures pour à la fois acquérir ou consolider des connaissances, des compétences et la motivation d'élèves issus de milieux défavorisés. Il a pris la forme d'une alternance planifiée entre réflexion et discussion lors des rencontres de toute l'équipe aux locaux du Programme de soutien à l'école montréalaise et des mises à l'essai des jeux par les enseignants dans leur classe. Il a pris l'allure suivante : élaboration des jeux lors des rencontres avec l'équipe ; mise à l'essai des jeux par les enseignants dans leur classe ;

retour sur les mises à l'essai et planification de variantes de ces jeux ou de nouveaux jeux ; mise à l'essai dans les classes. À la fin du projet, le groupe a préparé collectivement trois trousses de jeux qui sont utilisées cette année à l'occasion de journées de perfectionnement offertes par le Programme de soutien à l'école montréalaise.

Toutefois, à la fin du projet, le groupe ressentait aussi le besoin d'aller plus loin. Les enseignants avouaient éprouver de la difficulté à reconnaître et à nommer les stratégies que les élèves utilisent lorsqu'ils jouent. Les enseignants ont alors demandé que soit mis sur pied un microprogramme (programme de deuxième cycle comptant cinq cours de trois unités pouvant mener à une maîtrise). Ce microprogramme qui a démarré en septembre 2010 avec l'aide d'Isabelle Jordi, chargée de cours, a pour objectifs de consolider les connaissances des participants en mathématiques afin de leur permettre de nommer les concepts, processus et stratégies mathématiques, de les reconnaître dans les situations d'apprentissage qu'ils travaillent avec leurs élèves, de mieux observer ces derniers et de mieux les guider dans leur apprentissage.

3.2. Application du modèle aux cours de formation continue

Dans le modèle développé par Ball, Thames et Phelps (2008) et Hill et Ball (2009), repris par Laurent Theis, les connaissances mathématiques sont regroupées en deux catégories principales : les connaissances du contenu (*subject matter knowledge*) et les connaissances didactiques (*pedagogical content knowledge*).

3.2.1. Les connaissances de contenu : *connaissances générales du contenu (connaissances et habiletés mathématiques utilisées dans d'autres domaines que l'enseignement. Elles font référence à la résolution correcte d'un problème)*

Nous avons fait appel à ce type de connaissances tout au long des cours. Quelques exemples : les étudiants, en équipe, ont développé un diagramme dans lequel ils devaient insérer les différents types de nombres et en donner un exemple. Cette activité, qui nous semblait relativement banale, a été beaucoup plus longue que prévu et beaucoup plus riche.

Une partie importante du cours a été consacrée au calcul mental. Lors de diverses activités, nous avons amené les enseignantes à effectuer un véritable calcul mental en leur demandant de développer des procédures personnelles, de les verbaliser et de dégager sur quelles propriétés des opérations et des nombres ces procédures s'appuyaient. Ce travail a été particulièrement difficile, car la majorité des enseignantes reproduisaient mentalement l'algorithme standard utilisé lors de calculs écrits. Mais ce travail a été particulièrement formateur et motivant pour les enseignantes, qui se découvraient des habiletés qu'elles ne pensaient pas avoir.

3.2.2. **Les connaissances de contenu :** *connaissances spécialisées du contenu (connaissances particulières à l'enseignant, par exemple déterminer si une stratégie de résolution inhabituelle proposée par un élève est valide ou non, ou encore lorsque l'enseignant essaie de retrouver des régularités dans les erreurs d'un élève)*

Les élèves ont été au cœur des cours tout au long du microprogramme. En effet, le groupe était composé d'enseignantes du préscolaire jusqu'à la sixième année qui avaient leur classe et de conseillers pédagogiques qui avaient aussi accès à des classes. Régulièrement, les étudiants maîtres ont été appelés à développer des outils diagnostiques ou encore des outils d'intervention durant nos cours, puis à les appliquer dans leur classe, à recueillir les travaux des élèves, à noter leurs observations pour ensuite analyser les procédures d'élèves (adéquates et erronées) lors du cours suivant. Une discussion autour des erreurs suivait, discussion durant laquelle nous tentions de trouver les sources des erreurs, les causes ainsi que des moyens pour aider les élèves. Les activités, quant à elles, étaient discutées afin d'amener les étudiants à dégager les contraintes des tâches les rendant plus simples ou plus complexes pour leurs élèves.

3.2.3. **Les connaissances de contenu :** *vision horizontale des mathématiques (enseignant connecte les mathématiques enseignées à un niveau précis aux mathématiques enseignées à d'autres moments)*

Le groupe du microprogramme était composé d'enseignantes du préscolaire jusqu'à la fin du primaire, ainsi que d'enseignantes de classes d'accueil. À tout moment, les liens étaient faits entre les différents niveaux scolaires. Nous avons aussi, de temps en temps, regardé du côté du premier cycle du secondaire en parlant de la transition primaire-secondaire.

3.2.4. Les connaissances didactiques : *connaissances sur le contenu en lien avec les élèves (anticiper les raisonnements des élèves ou le degré de difficulté d'une tâche ; reconnaître et interpréter les raisonnements émergents des élèves)*

Un des buts de ce microprogramme est justement de travailler les raisonnements des élèves, de les reconnaître et de les nommer. Ceci a été particulièrement le cas lorsque la résolution de problèmes, ainsi que le calcul mental, a été travaillé. Cela s'est aussi traduit dans les travaux de session. Un travail demandait aux étudiants de développer un outil diagnostique. Pour chacun des items de cet outil (test papier-crayon ou encore entrevue semi-dirigée), ils devaient anticiper des procédures et des stratégies adéquates ou erronées. Par la suite, ils devaient administrer à leurs élèves cet outil diagnostique et analyser les procédures des élèves en s'appuyant sur leurs anticipations, ainsi que sur des lectures qu'ils avaient effectuées en lien avec le concept mathématique visé par leur outil diagnostique.

3.2.5. Les connaissances didactiques : *connaissances sur le contenu en lien avec l'enseignement (séquence d'enseignement, choix des exemples pour un concept donné, évaluation des avantages et inconvénients d'une représentation donnée d'un concept)*

Je ne sais pas si c'est ici que vient se placer le travail sur les énoncés de problèmes arithmétiques. Nous avons fait plusieurs ateliers autour des énoncés de problèmes. Nous avons analysé les caractéristiques langagières et mathématiques qui font qu'un énoncé de problème est plus simple ou plus complexe. Nous avons joué à la Ligue d'improvisation de problèmes arithmétiques (LIPA) pour amener les enseignants à rédiger des énoncés de problèmes, ainsi qu'à analyser des énoncés de problèmes proposés par les manuels scolaires ou par tout autre document pédagogique.

J'arrête ici l'énumération des diverses activités mathématiques effectuées lors des cours. La liste des activités est plus longue si je reprends tout ce que nous avons fait durant ces cinq cours, mais cela donne un bon aperçu des activités du microprogramme. Cet exercice de « revisite » des cours à la lumière du modèle proposé par Laurent Theis a été fort intéressant. D'abord, il m'a fait prendre conscience que nous avons fait beaucoup plus de mathématiques que je ne l'aurais d'abord imaginé, que les activités étaient à cet effet très variées. L'an prochain, un autre microprogramme démarrera, cette fois en orthodidactique des mathématiques. Est-ce que je me servirai de ce modèle pour planifier les cours et les activités ? Probablement pas de façon systématique, il ne faudrait pas que cela devienne un algorithme pour produire des cours, mais il servira certainement d'éclairage pour avoir une vue globale des cours.

SECTION 5

Texte plénier 5

Dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire

Choix, caractéristiques, résultats et effets

Adolphe Adihou
Département d'études sur l'adaptation scolaire et sociale
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke
adolphe.adihou@usherbrooke.ca

Cathy Arsenault
Département des sciences de l'éducation
Université du Québec à Rimouski (Campus de Lévis)
cathy_arsenault@uqar.qc.ca

1. Introduction

Le développement des compétences en mathématiques chez les futurs maîtres est une préoccupation majeure pour les formateurs et chercheurs en didactique des mathématiques. Les communications présentées au colloque Espace mathématique francophone (EMF) 2006 et au congrès de l'Association francophone pour le savoir (ACFAS) 2009, portant sur la formation mathématique des enseignants, ont permis de présenter des modèles et des pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques. Plusieurs aspects importants de la problématique de cette formation ont été soulevés, entre autres celui du profil de l'enseignant de mathématiques au primaire. Qu'est-ce qui le distingue ? Que doit-il savoir ? Que doit-il maîtriser ? Que doit-il enseigner ? Pour répondre à ces questions, il semble opportun de poursuivre et d'approfondir la réflexion sur la formation en mathématiques et en didactique des mathématiques.

D'abord, nous évoquons les éléments principaux des programmes de mathématiques du primaire et du secondaire de l'école québécoise, sur lesquels prend appui la formation à l'enseignement des mathématiques dans notre situation, soit l'Université du Québec à Rimouski (UQAR)[1]. Nous rappelons brièvement la spécificité de cette formation. Par la suite, nous présentons les caractéristiques des différents volets du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques mis en place à l'UQAR en faisant ressortir les contenus mathématiques abordés au regard des savoirs essentiels du programme de formation de l'école québécoise. Enfin, nous cernons les effets de ce dispositif chez les étudiants en formation des maîtres et la nature de la formation mathématique qui en découle.

2. Les principaux éléments des programmes de mathématiques de l'école québécoise

Depuis 2001, le programme de formation de l'école québécoise définit pour chacune des disciplines enseignées au primaire et au secondaire des lignes directrices guidant les enseignants dans leur pratique d'enseignement. Les programmes de mathématiques sont désormais structurés autour de trois compétences. Les connaissances et compétences mathématiques que les élèves doivent développer au cours des années du primaire et du secondaire sont rattachées à différents champs mathématiques, soit l'arithmétique, la géométrie, la mesure, la probabilité, la statistique et l'algèbre. Des savoirs essentiels sont déterminés pour chacun de ces champs. Par exemple, pour le champ de l'arithmétique au primaire, les savoirs se subdivisent en trois catégories, soit *le sens et l'écriture des nombres*, *le sens des opérations* et *les opérations sur des nombres* pour les naturels, les entiers et les rationnels. Pour chacune de ces catégories, des notions mathématiques clairement établies viennent baliser l'acquisition des savoirs, et ce, pour chaque cycle du primaire et du secondaire. Ainsi, autour des trois compétences mathématiques gravitent des savoirs à acquérir. Ils se développent en étroite relation à travers des situations concrètes, souvent en lien avec la vie quotidienne, au cours desquelles les élèves sont amenés à réfléchir, à manipuler,

1. Lors de la rédaction de ce texte, A. Adihou était professeur à l'UQAR (campus de Rimouski).

à explorer, à construire, à discuter, à débattre, à s'entraîner et à s'approprier les concepts, les processus et les stratégies qui s'y rattachent (Gouvernement du Québec, 2008).

Dans le contexte de la formation des maîtres à l'enseignement des mathématiques, cette prescription ministérielle de savoirs et de compétences mathématiques représente une base minimum à maîtriser pour les étudiants qui s'engagent dans un programme de formation à l'enseignement. Toutefois, la situation est tout autre. Les difficultés en mathématiques des futurs enseignants sont maintenant reconnues et déterminées dans plusieurs universités québécoises (Morin et Theis, 2006 ; Adihou, Arsenault et Marchand, 2006 ; Lajoie et Barbeau, 2000 ; Nantais, 2000 ; Héraud, 2000). D'ailleurs, chaque institution propose divers types de cours ou de formations pour combler ces lacunes (voir Marchand, 2010).

3. La spécificité de la formation à l'enseignement des mathématiques

Il existe une divergence de points de vue sur l'importance accordée aux contenus mathématiques dans la formation à l'enseignement. Pour certains didacticiens des mathématiques, la formation en didactique est l'occasion de former les étudiants à l'enseignement des mathématiques en favorisant la construction des savoirs didactiques par le biais, entre autres, d'activités d'analyses de vidéos (Adihou et Arsenault, 2011), de travail autour de « trucs mathématiques » (Adihou et Marchand, 2010), de jeux de rôles (Lajoie, 2010 ; Lajoie et Pallascio, 2001), etc. Pour d'autres didacticiens, les cours de didactique des mathématiques sont des occasions, dans un premier temps, de faire faire des mathématiques aux futurs enseignants. Ainsi, après une validation de la maîtrise des contenus mathématiques, il devient alors possible pour eux d'aborder les savoirs didactiques. Ces cours auront alors deux objectifs, soit d'enseigner des contenus mathématiques *et* des savoirs didactiques. Du côté de certains mathématiciens, la formation à l'enseignement des mathématiques est l'occasion de former les étudiants à l'enseignement des mathématiques en abordant principalement des contenus mathématiques universitaires ou à travers des cours dits adaptés.

Peu importe le point de vue, il est certain que faire faire des mathématiques à des élèves est une activité qui exige une bonne connaissance de la discipline ; la maîtrise de cette dernière pouvant potentiellement permettre à l'enseignant d'imaginer et de contrôler facilement les situations didactiques (Conne et Lemoyne, 1999). Mais cela ne suffit pas selon nous ! Il faut aussi être en mesure de prendre une distance de l'activité enseignante pour mieux regarder et analyser le travail de l'élève, soit l'activité enseignée. Un des buts de la recherche en didactique des mathématiques est de mieux comprendre :

> […] les phénomènes à l'œuvre en classe de mathématique et d'examiner [parmi ceux-ci] ceux qui sont spécifiques à la discipline enseignée. Leur espoir est de trouver par quel biais agir pour changer et améliorer l'enseignement des mathématiques (Conne, 1989, p. 9).

Ainsi, les dispositifs de formation qui s'appuient sur une articulation de la formation mathématique et didactique fournissent à la fois des outils mathématiques et des moyens de susciter des réflexions sur les concepts mathématiques, leur enseignement et leur apprentissage. Le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques mis en place à l'UQAR repose sur cette double articulation des formations.

4. Les caractéristiques du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques de l'UQAR

Depuis maintenant sept ans, l'UQAR propose, aux étudiants inscrits au programme de baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement au primaire, une formation à l'enseignement des mathématiques. Celle-ci se compose de plusieurs éléments afin de répondre aux lacunes importantes de ces derniers quant aux mathématiques enseignées au primaire, aux exigences ministérielles et à la complexité de l'acte d'enseigner. Ce dispositif comporte trois volets : le premier porte sur le diagnostic des connaissances et des compétences en mathématiques des étudiants, le second sur la formation mathématique et le dernier sur la formation didactique.

Cette formation à l'enseignement des mathématiques vise à permettre aux étudiants : 1) d'acquérir des connaissances et de développer des compétences en mathématiques au-delà de celles de l'élève ; 2) de concevoir ou de déterminer les activités à mettre en place pour favoriser la pratique mathématicienne chez les élèves ; 3) de développer des habiletés à l'analyse des interactions des élèves avec le milieu didactique afin de mieux comprendre le travail de l'élève et le rôle de l'enseignant ; 4) de favoriser des attitudes plus positives à l'égard des mathématiques ; 5) de fournir des outils qui permettront des pratiques futures plus pertinentes (pratiques enseignantes et pratiques en classe).

En rappelant les voies envisagées dans diverses universités québécoises pour permettre aux étudiants de développer des compétences mathématiques, Marchand (2010) précise qu'un dispositif global, comme celui mis en place à l'UQAR, semble être particulièrement bénéfique, puisqu'il permet aux étudiants de s'inscrire dans un processus s'échelonnant sur plusieurs années, au cours duquel leur rapport au savoir mathématique évolue de façon significative et leurs compétences s'améliorent. Plusieurs étudiants reconnaissent ainsi l'importance de la formation continue dans leur future carrière. Toutefois, tous les moyens de formation proposés aux étudiants n'assurent pas *ipso facto* leur réussite, chacun devant prendre en charge sa démarche de développement de compétences en mathématiques (Adihou, Arsenault et Marchand, 2006).

Bien que le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques de l'UQAR récolte un certain succès auprès des étudiants et des enseignants-associés, son application exige la participation et les efforts de plusieurs acteurs de la communauté universitaire : décanat des études de premier cycle, direction du département et du module. Elle nécessite également la mise en place d'un protocole définissant le rôle de chacun, favorisant ainsi une coordination et une évolution harmonieuse des différents volets de ce dispositif.

4.1. Premier volet – L'examen de culture et de compétences en mathématiques

Dès leur premier trimestre universitaire, les étudiants sont obligatoirement soumis à un examen de culture et de compétences en mathématiques dont le seuil de réussite est fixé à 75 %. Ceux qui échouent à l'examen auront droit à quatre reprises. En cas d'échec, ils seront alors suspendus du programme de formation et la réussite de l'examen est une condition de la réintégration au programme.

La conception de cet examen repose sur une démarche composée de plusieurs étapes dont entre autres la définition de domaine qui sert à déterminer, à décrire et à classer des éléments d'un programme d'études en vue d'évaluer les apprentissages (Adihou, Arsenault et Marchand, 2006 ; Arsenault et Voyer, 2003 ; Auger et Fréchette, 1988). Le domaine couvert par cet examen est défini par les contenus des programmes de formation en mathématiques du primaire et du premier cycle du secondaire. Évidemment, il est pris en considération que cet « [...] examen s'adresse à des adultes devant démontrer des capacités métacognitives plus développées que celles qu'on retrouve chez des enfants » (Comité d'évaluation des compétences en mathématiques, 2008, p. 5).

D'un point de vue administratif, deux buts fondamentaux sont visés par cet examen : le premier est de permettre à la direction du programme de s'assurer d'un niveau de culture et de compétence suffisant pour les futurs maîtres en mathématiques ; le second est d'orienter les décisions administratives concernant le cheminement des étudiants dans le programme selon les niveaux de culture et de compétence mathématiques démontrés. D'un point de vue académique, l'examen vise aussi à « [...] établir un bilan de culture et de compétences mathématiques permettant d'élaborer, si nécessaire, un projet de formation en mathématiques adapté aux besoins de chaque étudiant et soutenu par des ressources offertes à l'UQAR ou ailleurs » (CECM, 2008, p. 4-5).

Actuellement, l'examen se présente en six versions. Chaque fois que l'examen est offert, une version est sélectionnée, révisée, améliorée et calibrée. Il y a deux possibilités d'effectuer l'examen par année ; une durant le trimestre d'automne et l'autre durant le trimestre d'hiver. Chaque version d'examen comporte 40 questions réparties en deux parties. La première, constituée de 20 questions, porte sur l'arithmétique (sens et écriture des nombres, sens des opérations et opérations sur des nombres) et l'algèbre ; la seconde, de 20 questions également, aborde la géométrie, la mesure, la statistique et les probabilités. Trois compétences mathématiques sont évaluées au regard de ce contenu, soit la culture mathématique (savoirs essentiels, vocabulaire et symboles), le raisonnement à l'aide de concepts et de processus mathématiques et la résolution de situations-problèmes mathématiques. Ainsi, sur les 40 questions, 20 concernent la culture mathématique, 10 le raisonnement et 10 autres la résolution de problèmes.

Les réponses à chacune des questions de l'examen sont saisies et transmises à une banque de données. Pour chaque réponse erronée, un message diagnostique est émis en lien avec la compétence et le contenu mathématique. Par exemple, dans chaque version de l'examen, la question 15 porte sur « les opérations mathématiques sur les nombres rationnels ». Ainsi, peu importe la version, le message « revoir les notions liées à la soustraction ou à la division des nombres rationnels » sera associé à cette question. Tous les messages diagnostiques émis par l'entrée d'une réponse erronée constitueront le bilan diagnostique. Ce dernier s'avère l'outil de base à la démarche de développement des compétences en mathématiques, puisqu'il indique les notions à travailler, orientant ainsi le choix de la formation mathématique dans laquelle l'étudiant doit s'engager.

4.1.1. Quelques données sur l'examen

Pour mettre en lumière le travail mathématique sous-jacent à l'examen, il semble opportun de présenter maintenant quelques exemples de questions associées à la culture, au raisonnement et à la résolution de problèmes et le taux de réussite pour deux cohortes d'étudiants en première année de formation à l'enseignement. Ces questions apparaissent dans les différentes versions de l'examen, et les conduites qui leur sont associées représentent, de façon générale, le travail réalisé par les étudiants.

TABLEAU 1
QUESTIONS, CATÉGORISATION, MESSAGE DIAGNOSTIQUE ET TAUX DE RÉUSSITE

Exemples de questions	Catégorisation et message diagnostique	Taux de réussite des questions – Cohorte 2004	Taux de réussite des questions – Cohorte 2009
1- Parmi ces doubles égalités, une seule est juste, laquelle ? a) $-81 = (9^{-2}) = -(9^2)$ b) $-18 = -2*9 = (9^{-2})$ c) $-1/81 = (9^{-2}) = (9^{-1})^2$ d) $1/81 = 1/(9^2) = (9^2)^{-1}$ e) $81 = (9^{-2}) = (9^2)$	Culture mathématique en arithmétique. *Message* : revoir les notions liées aux exposants négatifs et aux produits de puissance.	**20,9 %**	**37,1 %**
2- Indiquer si les propositions suivantes s'appliquent dans tous les cas possibles. a) Pour multiplier un nombre réel par 10 dans un système de numé-ration décimal, il suffit d'ajouter un zéro à la fin du nombre. b) Lorsqu'on déplace la virgule d'un nombre décimal d'une position vers la gauche, on divise ce nombre par 10. c) Plus l'écriture d'un nombre réel contient de chiffres et plus ce nombre est grand. d) Le chiffre qui figure à la troisième position à gauche de la virgule indique le nombre exact de centaines contenu dans un nombre décimal.	Raisonnement à l'aide de concepts et de processus mathématiques en arithmétique. *Message* : revoir les notions liées à la numération décimale.	**10 %** ont répondu correctement aux quatre énoncés ; 38 % à 3, 34 % à 2, 16 % à 1, 2 % à aucun.	**33,6 %** ont répondu correctement aux quatre énoncés ; 44,8 % à 3, 18,1 % à 2, 2,6 % à 1, 0,9 % à aucun.
3- Trois trains partent régulièrement de la gare de Düsseldorf à des intervalles de 8, 12 et 36 heures respectivement. S'ils quittent la gare de Düsseldorf en même temps, dans combien d'heures la quitteront-ils de nouveau ensemble ?	Résolution d'une situation-problème en arithmétique. *Message* : revoir les notions liées au plus petit commun multiple (PPCM).	**48 %** 2 % ont résolu en partie le problème, mais la démarche comportait des erreurs.	**28,4 %** 2,6 % ont résolu le problème, mais ont fait une erreur de calcul.

Exemples de questions	Catégorisation et message diagnostique	Taux de réussite Cohorte 2004	Taux de réussite Cohorte 2009
4- Une femme possède 75 % des actions d'une compagnie et vend 25 % de sa part pour 48 000 $. Trouver la valeur totale des actions de la compagnie (considérer que la valeur des actions est stable).	Résolution d'une situation-problème en arithmétique. *Message*: revoir les notions liées aux rapports et aux proportions.	**15 %** 4 % ont résolu en partie le problème, mais la démarche comportait des erreurs.	**25 %** 6,9 % ont résolu le problème, mais ont fait une erreur de calcul; 3,4 % ont résolu en partie le problème, mais la démarche comportait des erreurs.
5- Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. a) Un carré est un rectangle particulier. b) Un parallélogramme est un losange particulier. c) Un rectangle est un parallélogramme particulier. d) Un losange est un carré particulier.	Raisonnement à l'aide de concepts et de processus mathématiques en géométrie. *Message*: revoir les notions liées aux propriétés des quadrilatères et à leur classification.	**17 %** ont répondu correctement aux quatre énoncés; 19 % à 3, 40 % à 2, 18 % à 1, 6 % à aucun.	**47,4 %** ont répondu correctement aux quatre énoncés; 21,5 % à 3, 23,3 % à 2, 5,2 % à 1, 2,6 % à aucun.
6- À l'aide d'une homothétie, on transforme un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 5 cm. Les côtés adjacents à l'hypoténuse du triangle image mesurent respectivement 7,5 cm et 10 cm. Calculer le rapport d'homothétie.	Résolution d'une situation-problème mathématique en géométrie. *Message*: revoir les notions liées au rapport d'homothétie et au théorème de Pythagore.	**24,5 %** 3,7 % ont résolu en partie le problème, mais la démarche comportait des erreurs.	**22,4 %** 8,6 % ont résolu le problème, mais ont fait une erreur de calcul; 5,2 % ont résolu en partie le problème, mais la démarche comportait des erreurs; 3,5 % n'ont réussi qu'à mathématiser l'énoncé.

Les taux de réussite présentés dans ce tableau proviennent de deux cohortes ; une de 163 étudiants de première année à l'automne 2004 et l'autre de 116 étudiants à l'automne 2009. Il est intéressant de noter l'augmentation du taux de réussite pour quatre questions de l'examen. Pour la question 3, la baisse du taux de réussite peut s'expliquer par le choix des nombres. Il semble avoir été plus facile pour la cohorte 2004 de trouver le PPCM des nombres 8, 12 et 36 que le PPCM des nombres 6, 10 et 14 pour la cohorte 2009. Peut-on penser que cette augmentation est généralisée pour l'ensemble des questions de l'examen ? Pour ces deux cohortes, il y a en moyenne une augmentation du taux de réussite aux questions de l'examen. Cette augmentation sur l'ensemble des questions n'est pas étonnante, puisque la cohorte 2004 avait obtenu un très faible taux de réussite à leur première tentative. Par contre, pour les cohortes 2005 à 2010, le taux de réussite à chacune des questions ne varie pas autant ; il semble même diminuer depuis deux ans. Toutefois, les conduites des étudiants s'avèrent particulièrement variées.

4.1.2. Exemples de conduites pour les six questions du tableau 1

Les réponses et les conduites présentées ci-dessous sont inspirées du travail réalisé par un groupe de 24 étudiants la première fois qu'ils ont effectué l'examen de mathématiques.

Question 1

Pour cette question, cinq choix de réponses étaient proposés. Voici la répartition des choix sélectionnés par les étudiants.

Choix de réponses	Réponses attendues	Pourcentage de répondants pour chacun des choix de réponses
a) $-81 = (9^{-2}) = -(9^2)$		41,7 %
b) $-18 = -2*9 = (9^{-2})$		0,00 %
c) $-1/81 = (9^{-2}) = (9^{-1})^2$		8,33 %
d) $1/81 = 1/(9^2) = (9^2)^{-1}$	$1/81 = 1/(9^2) = (9^2)^{-1}$	20,90 %
e) $81 = (9^{-2}) = (9^2)$		25,00 %
Sans choix		4,10 %

Ces données révèlent une conception erronée fréquente sur les exposants négatifs. Seuls 20,9 % des étudiants ont choisi la bonne réponse. Pour 41,7 % d'entre eux, un nombre naturel élevé à une puissance négative produit un entier relatif négatif, soit l'opposé du produit des puissances plutôt que l'inverse du produit des puissances. Ainsi, 9^{-2} est l'opposé du produit de 9×9, donc –81.

Question 2

La question 2 exigeait une réponse de type *oui* ou *non* pour chacun des quatre énoncés. La grille suivante présente le choix des étudiants en pourcentage pour chaque énoncé.

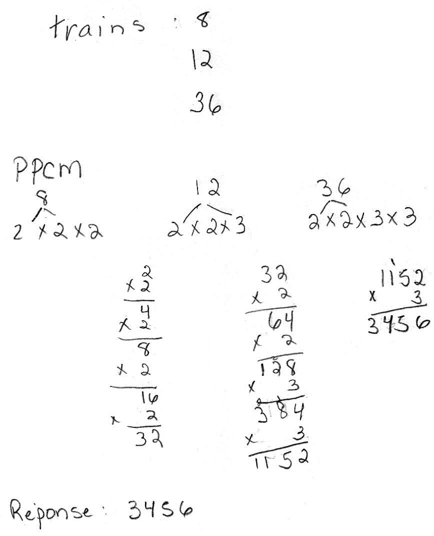
Énoncés	Réponses attendues	Pourcentage de OUI	Pourcentage de NON
A	NON	66,67 %	33,33 %
B	OUI	79,17 %	20,83 %
C	NON	45,83 %	54,16 %
D	NON	62,50 %	37,50 %

Les données ci-dessus sont un indicateur d'une compréhension insuffisante des caractéristiques de notre système de numération décimal. En effet, pour les énoncés A et D, plus de la moitié des étudiants ne répondent pas correctement à la proposition.

Question 3

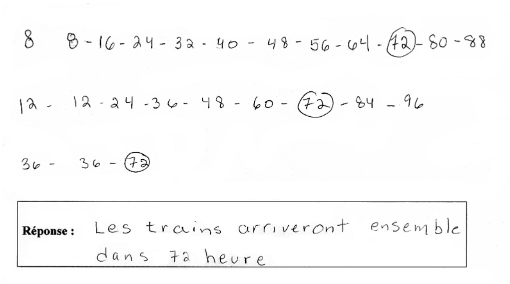
Voici trois conduites fréquentes dans la résolution de ce problème.

Conduite 1 (réponse : 3456)



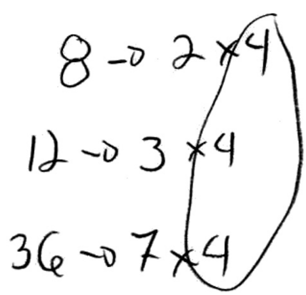
Ici, l'étudiant décompose en facteurs premiers les nombres 8, 12 et 36. C'est la démarche la plus rapide et efficace. Pour trouver le PPCM, il faut prendre le produit de tous les facteurs premiers à la puissance la plus élevée qui sont apparus dans les trois nombres. Dans ce cas-ci, pour les nombres 8, 12 et 36, le produit des facteurs est ($2^3 \times 3^2$), ce qui égale 72. Plusieurs étudiants semblent éprouver une difficulté avec la dernière partie de la procédure du PPCM, soit le choix des facteurs à considérer pour faire le produit.

Conduite 2 (réponse : dans 72 heures)



La démarche utilisée par cet étudiant est courante, mais peut facilement générer des erreurs lorsque les nombres nécessitent une longue suite de multiples afin de déterminer celui qui est commun. Dans le cas ci-dessus, les multiples de chaque nombre permettaient d'établir rapidement un multiple commun.

Conduite 3 (réponse : 4 heures)



Cette conduite révèle une difficulté souvent rencontrée en résolution de problèmes. Comment distinguer les problèmes faisant appel aux PPCM et aux PGCD ? L'étudiant a plutôt interpellé ses connaissances sur le PGCD.

Question 4

La résolution du problème présenté à la question 4 suscite des raisonnements particuliers. En voici quelques-uns :

Conduite 1 (réponse : 192 000 $)

femme possède 75 % d'actions
25 % = 48000 $

48000 $ = 25 % des actions
x8 100 %

$$\frac{48000}{25} = \frac{x}{100}$$

48000 × 100 = 4800000
4800000 ÷ 25 = 192000 $

4800000 | 25
25 192000
230
225
50
50
0

Réponse : 192000 $

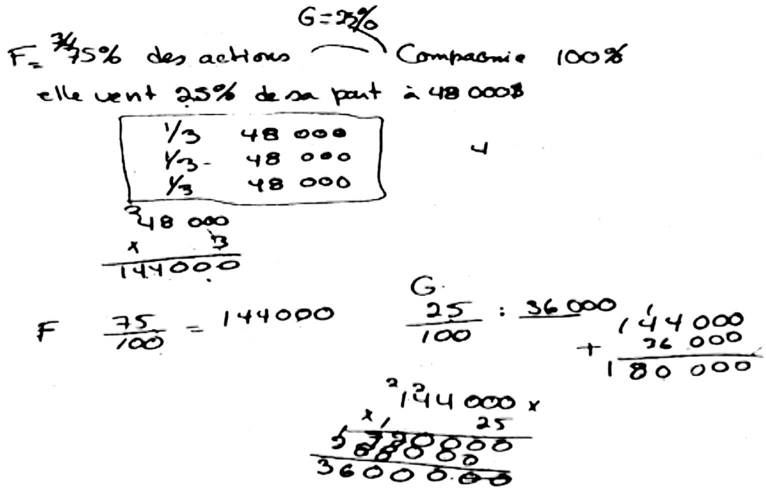
Cette démarche révèle une erreur fréquente dans l'interprétation de ce problème. Dans la recherche de la valeur totale des actions de la compagnie, on semble omettre que le montant de 48 000 $, c'est la valeur des 25 % de 75 % des actions d'une compagnie détenues par la femme et non de 100 %. C'est une difficulté liée à la coordination des parties, du tout en d'autres termes, la référence à l'unité.

Conduite 2 (réponse : 256 000 $)

25 % de 75 % des actions vaut 48000 $
donc, 75 % = 48000 $ × 4 = 192000 $
donc 100 % équivaut à 192000 $ ÷ 3 × 4 = 256000 $

Cette démarche montre une très bonne compréhension et représentation du problème. Par des procédures simples, cet étudiant résout le problème rapidement et efficacement.

Conduite 3 (réponse : 180 000 $)



Cette conduite montre une plus grande difficulté à se représenter le problème. Pour cet étudiant, 25 %, c'est le 1/3 de 75 %. Si 1/3 est égal à 48 000 $, les 3/3 égalent alors 144 000 $. Ainsi, 75 % des actions de la femme représente une somme de 144 000 $. Il manque 25 % pour faire 100 %. Alors, 25 % de 144 000 $ est égal à 36 000 $. Pour trouver la valeur totale des actions de la compagnie, il additionne la valeur des actions de la femme, soit 144 000 $ et ajoute la valeur de 25 % des actions de la femme, soit 36 000 $, pour un total de 180 000 $. La résolution de ce problème révèle plusieurs difficultés liées, d'une part, à la représentation que l'étudiant se fait du problème et, d'autre part, aux notions de rapports et de proportions.

Question 5

La question 5 exigeait une réponse de type *vrai* ou *faux* pour chacun des quatre énoncés. La grille suivante présente le choix des étudiants en pourcentage pour chaque énoncé.

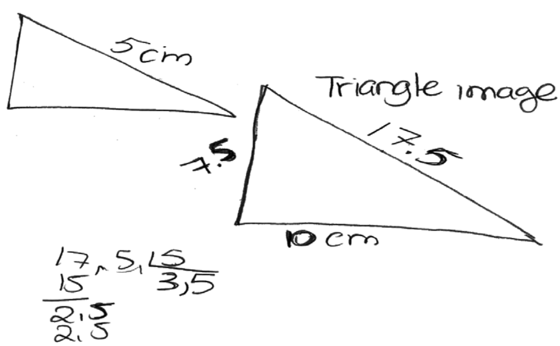
Énoncés	Réponses attendues	Pourcentage VRAI	Pourcentage FAUX
A	V	45,83 %	54,17 %
B	F	37,50 %	62,50 %
C	V	70,83 %	29,17 %
D	F	37,50 %	62,50 %

Les résultats pour chacun des énoncés de cette question montrent la difficulté des étudiants à comprendre les principes d'inclusion et de réciprocité engagés dans la classification des quadrilatères. Marchand (2010) souligne également ces limites mathématiques des étudiants dans les cours de didactique de la géométrie. Par exemple, dans le contexte de cette question, plus de la moitié des étudiants ont répondu faux à l'énoncé suivant : *le carré est un rectangle particulier*.

Question 6

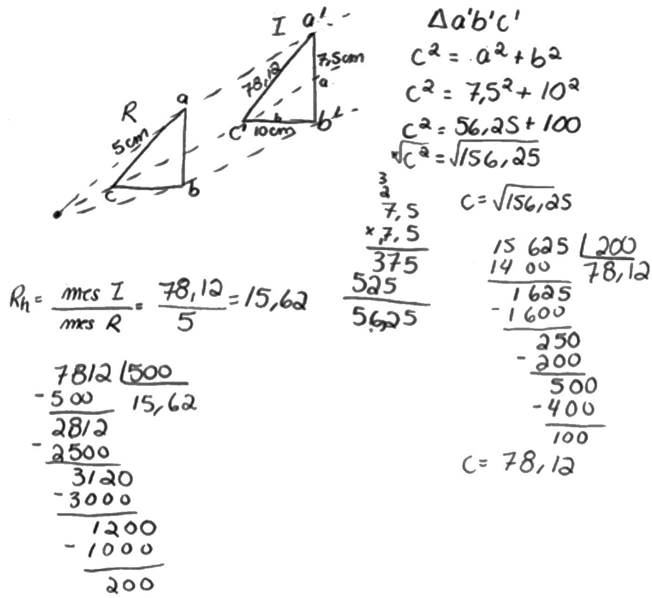
La résolution de ce problème fait appel au théorème de Pythagore. Pour plusieurs étudiants, ce théorème n'est pas interpellé dans la résolution du problème. Pour d'autres, son application semble provoquer quelques difficultés. Voici quelques exemples :

Conduite 1 (réponse : 3,5 fois plus grande)



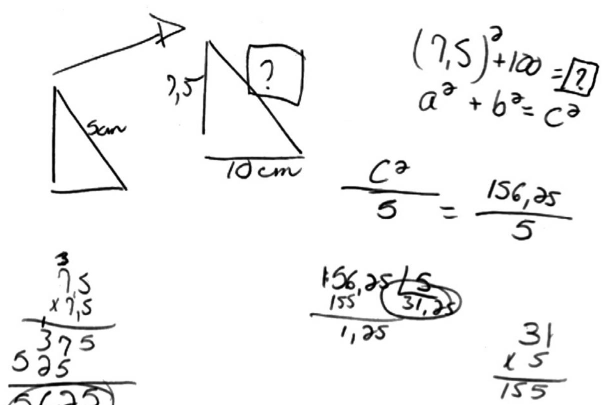
Dans cette conduite, le théorème n'est nullement évoqué et les notions d'homothétie, de rapport et de mesure semblent bien particulières. L'étudiant calcule la longueur de l'hypoténuse en faisant la somme des mesures des côtés adjacents à l'hypoténuse (7,5 cm + 10 cm = 17,5 cm). Puis, il établit le rapport d'homothétie en divisant la longueur de l'hypoténuse du triangle image par la longueur de l'hypoténuse du triangle source, ce qui donne un rapport de 3,5. Cette démarche révèle des lacunes importantes au regard des savoirs liés à la géométrie et à la mesure.

Conduite 2 (réponse : 15,62)



Cette conduite montre une application adéquate du théorème de Pythagore. Il est reconnu utile pour la résolution de ce type de problème. Toutefois, l'erreur se situe dans la procédure utilisée pour extraire la racine carrée de 156,25, procédure qui révèle une conception erronée de cette notion. Pour cet étudiant, extraire la racine carrée équivaut à diviser le nombre par 2. Ainsi, il obtient une longueur de 78,12 cm pour l'hypoténuse du triangle image. Le rapport d'homothétie est alors de 15,62.

Conduite 3 (réponse : 31,25)



Cette conduite démontre encore une difficulté avec la procédure d'extraction de la racine carrée. L'étudiant contourne celle-ci en prenant simplement la valeur obtenue au carré pour établir le rapport d'homothétie. Ainsi, il met en rapport cette valeur avec la longueur de l'hypoténuse du triangle source. Il obtient un rapport de 31,25.

Ces deux dernières conduites font apparaître une coordination limitée des connaissances mathématiques sur les nombres et les opérations, ainsi que le jeu de la contextualisation et de la décontextualisation des connaissances. En effet, la racine carrée de 156,25 peut être calculée en faisant appel aux tables de multiplication de 12 (12 × 12 = 144) et de 13 (13 × 13 = 169), pour ensuite déduire la valeur entre 12 et 13. Alors même si la procédure pour extraire la racine carrée n'est plus présente en mémoire, un regard sur les nombres aurait pu permettre l'appel d'une autre procédure.

L'ensemble des conduites présentées pour les six questions de l'examen révèle le travail imposant que doivent effectuer la plupart des étudiants au regard de leur formation mathématique. Il ne s'agit pas juste de rappeler les connaissances, mais de retravailler fondamentalement les concepts de base (Marchand, 2010 ; Morin et Theis, 2006 ; Adihou, Arsenault et Marchand, 2006 ; Nantais, 2000). Les différentes avenues proposées par le dispositif de l'UQAR permettent aux étudiants d'effectuer ce travail en fonction de leurs besoins et aussi de leur personnalité.

4.2. Deuxième volet – La formation mathématique

La formation mathématique proposée aux étudiants inscrits au programme de baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement au primaire se présente sous différentes formules afin de répondre aux besoins de ces derniers. Les cours de mathématiques abordent les contenus du primaire et du secondaire. Ils sont hors programme et non obligatoires.

Le cours « Savoirs mathématiques » de trois crédits s'adresse principalement aux étudiants qui se préparent à l'examen de culture et de compétences en mathématiques. L'étudiant qui s'y inscrit consacre au moins six heures par semaine à sa formation mathématique (cours et laboratoire). Pour le trimestre, le cours nécessite un minimum de 90 heures de travail, dont 45 heures de cours théoriques, 45 heures de laboratoire (pratique obligatoire) et de travail personnel. Il vise principalement le développement des compétences mathématiques nécessaires à l'enseignement de cette discipline au primaire (contenus du programme). Dans ces cours, les savoirs mathématiques sont revisités afin de leur donner sens et de susciter un intérêt à l'égard de la culture mathématique (Adihou, Arsenault et Marchand, 2006). Les formules d'évaluation des compétences mathématiques pour ce cours reposent sur des travaux individuels, des résolutions de problèmes et des examens.

Afin d'assurer une cohérence entre les différents groupes-cours, des notes de cours explicitent clairement les contenus mathématiques à aborder relativement aux compétences mathématiques essentielles à la réussite de l'examen en mathématiques. Ces contenus sont : le système de numération positionnelle associé à différentes bases ; les différents ensembles de nombres (naturels, entiers, rationnels, décimaux, irrationnels et réels), leurs représentations et les quatre opérations ; la résolution de problèmes tirés de la vie réelle ; les termes et les symboles mathématiques jugés essentiels à la communication ; la représentation et la signification concrètes des fractions ; les caractéristiques et les propriétés de différents polygones et solides ; les transformations isométriques et homothétiques en géométrie ; les relations entre les unités de longueur SI ; l'estimation et le calcul de mesures de surfaces, de volumes et d'angles en unités appropriées ; la résolution de problèmes relatifs aux unités de longueur, d'aire et de volume ; le calcul algébrique, les relations linéaires à variation directe et partielle, les équations linéaires et le théorème de Pythagore ; la résolution de cas simples de probabilités et de statistique.

Ce cours est fortement conseillé à tous les étudiants dont le seuil de réussite à l'examen est inférieur à 50 %. Dans le cas où le bilan diagnostique indique quelques notions à revoir pour une ou des compétences, des cours thématiques sont alors conseillés. Trois cours de 15 heures (un crédit) répondent à des besoins spécifiques, soit l'algèbre et la résolution de problèmes ; la géométrie et les probabilités ; les ensembles de nombres et les opérations.

Des ateliers préparatoires à l'examen sont aussi offerts en petits et grands groupes quelques semaines avant l'examen. Ces activités sont orchestrées par le Centre d'aide à la réussite (CAR), et elles reposent en partie sur le guide de préparation à l'examen de culture et de compétences en mathématiques. Ce guide, constitué d'activités et de rappels mathématiques, vise les mêmes compétences que celles évaluées à l'examen. Enfin, en tout temps, un étudiant peut travailler de façon autodidacte avec le soutien du conseiller en mathématiques (CAR). Il peut aussi, au cours d'une entrevue d'une heure, consulter son examen en présence du conseiller, ce qui lui permet de déterminer ses erreurs et d'en comprendre la source.

Cette démarche de développement des compétences en mathématiques s'échelonne sur les trois premières années du programme de formation à l'enseignement. Au cours de cette période, l'étudiant pourra reprendre l'examen de culture et de compétences en mathématiques, dont la réussite est essentielle avant le septième trimestre de sa formation à l'enseignement. Nous trouvons que l'ensemble des éléments de la formation en mathématiques permet aux étudiants de développer une plus grande maîtrise des contenus mathématiques à enseigner au primaire, ce qui, pour nous, a une incidence positive à l'égard des cours de didactique.

4.3. Troisième volet – La formation en didactique des mathématiques

Enseigner les mathématiques est une activité complexe. Que faut-il savoir ? Que faut-il maîtriser pour choisir les situations-problèmes à présenter aux élèves, pour jouer sur les variables didactiques d'une situation, pour gérer les contenus mathématiques et les interactions maître-élèves-savoir, pour prendre en compte les représentations des élèves, pour anticiper les effets d'une action sur la situation ou sur les élèves, pour utiliser les objets de savoirs (programme, manuels, etc.) ? Notre formation en didactique des mathématiques vise le développement de connaissances et de compétences permettant d'accomplir ces actions d'enseignants. Celle-ci s'articule autour des concepts suivants : situations-problèmes, analyses mathématiques et didactiques, approche par compétences, transposition et contrat didactiques. Le travail de l'élève et leurs interactions avec les objets mathématiques pour chacun des cycles du primaire sont aussi au cœur de notre démarche.

Cette formation se compose de quatre cours obligatoires de 45 heures (trois crédits) axés sur le développement des compétences professionnelles à l'enseignement des mathématiques. Ainsi, les trois premiers cours portent sur l'enseignement des mathématiques aux premier, deuxième et troisième cycles. Le quatrième cours aborde l'ensemble des savoirs mathématiques avec une approche interdisciplinaire intégrant mathématiques, science et technologie. Nos cours de didactique des mathématiques reposent sur des analyses épistémologique, mathématique et didactique d'un concept mathématique visé par une situation-problème. Nous croyons que celles-ci outillent les étudiants à mieux préparer les leçons, mais aussi à porter un regard critique sur leur déroulement en classe. Pour nous, mieux saisir ce qui s'est passé en classe au regard des contenus abordés, des élèves, du maître et de la planification de la leçon favorise une meilleure compréhension des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, compréhension qui pourra être réinvestie dans la reprise de la situation ou dans la préparation d'une autre leçon.

La description de ce troisième volet du dispositif de formation met en évidence l'importance de l'articulation des formations mathématique et didactique. Le travail mathématique réalisé dans les cours, ateliers, rencontres, etc., suscite une réflexion sur l'apprentissage des concepts et des processus mathématiques sollicités par différentes activités mathématiques. Cette réflexion favorise chez les étudiants la construction «[…] des pratiques et de rapports plus adéquats aux mathématiques, leur permettant éventuellement d'agir sur les pratiques et les rapports des élèves qu'ils rencontreront» (Lemoyne, 2010, p. 116). Le travail didactique permet entre autres de poursuivre la réflexion en abordant l'enseignement de ces concepts et processus, la mise en place de situations didactiques qui en favorisent l'apprentissage, l'analyse du travail de l'élève et de l'enseignant pour en dégager des interventions plus adaptées. Ainsi, la formation didactique intègre les éléments de la formation mathématique. Chacune des formations contribue réciproquement à leur développement.

Le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques de l'UQAR est donc caractérisé par l'articulation des formations, mais aussi par la présence de l'examen de culture et de compétences en mathématiques. Toutes ces composantes constituent pour nous les diverses dimensions de la formation mathématique que nous offrons à travers notre programme.

5. Les effets du dispositif de formation chez les étudiants

Pour promouvoir la formation mathématique des futurs maîtres à l'UQAR, le module d'éducation préscolaire et d'enseignement au primaire a mis en place un dispositif de formation constitué de trois volets. Chacun d'eux a été présenté afin de mieux illustrer les caractéristiques de ce dispositif au regard des connaissances et des compétences visées en mathématiques et en didactique. Après sept années de fonctionnement, il est légitime de s'interroger sur les effets de ce dispositif au regard de la formation à l'enseignement des mathématiques. Permet-il une meilleure maîtrise des contenus mathématiques du primaire et du premier cycle du secondaire ? Favorise-t-il chez l'étudiant une prise en charge de ses difficultés ? Entreprennent-ils une démarche de développement de leurs connaissances et de leurs compétences en mathématiques ? Les données recueillies sur l'évaluation de la culture et des compétences en mathématiques permettent d'énoncer quelques réponses à ces questions. Le tableau 2 ci-dessous présente la progression du taux de réussite à l'examen de culture et de compétences en mathématiques au cours du programme de formation à l'enseignement. Rappelons que la note de passage pour cet examen est de 75 %.

TABLEAU 2
PROGRESSION DE L'ATTEINTE DU TAUX DE RÉUSSITE À L'EXAMEN DE CULTURE ET DE COMPÉTENCES EN MATHÉMATIQUES POUR LES ANNÉES 2004 À 2010

Années → Cohortes ↓	Après 1 an	Après 2 ans	Après 3 ans	Après 4 ans	Après 5 ans	Taux global de réussite	Taux de suspension à l'automne 2010	Taux de cheminement particulier ou d'abandon
2004-2009	4,9 %	53,4 %	81 %	89,6 %	93,3 %	93,3 %	3,7 %	3,1 %
2005-2010	42,1 %	60,6 %	76,9 %	84,8 %	86,5 %	86,5 %	4,5 %	9,0 %
2006-2011	40,6 %	55,3 %	70,7 %	81,2 %		81,2 %	2,0 %	16,8 %
2007-2012	48,4 %	59,7 %	74,2 %	77,4 %		77,4 %	9,4 %	13,2 %
2008-2013	31,8 %	51,6 %	61,9 %			61,9 %	0 %	10,3 %
2009-2014	24,8 %	40,8 %				40,8 %	0 %	0 %
2010-2015	25 %					25 %	0 %	0 %

Au regard de la formation mathématique, il était souhaité que les étudiants maîtrisent minimalement les contenus du primaire, puisqu'ils interviendront à ce niveau. Toutefois, dans une perspective plus « épistémologique », la maîtrise des contenus du premier cycle du secondaire s'avère nécessaire, puisqu'ils permettent de mieux comprendre les erreurs et les procédures dans certains problèmes ou certaines activités de niveau primaire. C'est le cas par exemple des calculs lacunaires, où le statut de l'égalité et de la pensée algébrique (Squalli, 2002) sont des dimensions évoquées lors de leur analyse. Bien que ce ne soit pas de l'algèbre et que les inconnues recherchées ont souvent, dans le cas de ces activités, un statut de terme manquant, la pensée algébrique occupe une place importante dans les raisonnements, même si elle est non explicite. Dans ce contexte, il est tout à fait justifié d'exiger de la part des étudiants la maîtrise des contenus mathématiques du premier cycle du secondaire pour les aider à mieux comprendre les transformations mathématiques qui sous-tendent la construction des savoirs algébriques.

Les données du tableau 2 montrent qu'il y a une amélioration du taux de réussite à l'examen, ce qui indique une plus grande maîtrise des connaissances et des compétences en mathématiques du primaire et du premier cycle du secondaire. Après deux ans d'études dans le programme, soit quatre chances d'effectuer l'examen, le taux de réussite pour les cohortes 2004 à 2007 est supérieur à 53 %. Il faut cependant quatre années pour atteindre un taux moyen de 83 %. Cette lente amélioration peut s'expliquer par le faible taux de réussite de certains étudiants au premier essai. Ce travail peut aussi s'expliquer par le peu de travail effectué par l'étudiant, mais cette donnée est plus floue. Par exemple, un étudiant qui obtient 20 % à son premier examen doit réaliser un travail important pour atteindre le seuil de réussite fixé à 75 %. Dans ce cas, lors d'un deuxième essai, ce même étudiant obtiendra peut-être près de 50 %. Il faudra parfois trois ou quatre essais pour atteindre le seuil.

Depuis 2008, les nouvelles mesures sur les compétences en français (Test de certification en français écrit pour l'enseignement – TECFEE) ont eu un effet sur le taux de réussite à l'examen en mathématiques. En effet, les étudiants des cohortes 2008 à 2010 consacrent leurs efforts à réussir d'abord l'examen en français, ce qui peut expliquer la baisse du taux de réussite en mathématiques les premières années.

Le taux de suspension indiqué dans ce tableau représente le nombre d'étudiants qui se trouvent encore en suspension à ce trimestre. Pour certains, il s'agit de leur premier trimestre de suspension, s'ils appartiennent à la cohorte 2007, mais pour d'autres, il peut s'agir de leur troisième trimestre de suspension s'ils appartiennent à la cohorte 2006. Jusqu'à ce jour, les taux de suspension après la troisième année de formation ont varié entre 6 et 15 %, ce qui peut représenter au plus 20 étudiants. Les cohortes ont fluctué de 125 à 178 étudiants. Après une suspension du programme de formation, les étudiants qui n'ont pas réussi leur examen sont invités à se réinscrire à l'examen de l'automne ou de l'hiver afin de le réussir et de terminer leur programme d'études. Il est important de préciser que parmi les étudiants suspendus, plusieurs ont aussi échoué à l'examen de français.

La dernière colonne du tableau indique le pourcentage d'étudiants qui n'ont pas encore réussi l'examen et qui cheminent de façon particulière. Parmi ce nombre, certains ont volontairement interrompu leur cheminement pour travailler le français et les mathématiques ou pour des raisons personnelles. D'autres encore ont abandonné leurs études, mais il nous est impossible de savoir si cet abandon est temporaire ou définitif, et s'il est associé aux examens de français ou de mathématiques. Néanmoins, il peut être intéressant de porter un autre regard sur le taux de réussite à l'examen en ne considérant cette fois-ci que les étudiants diplômés ou actifs dans le programme, et ce, pour le trimestre d'automne 2010.

TABLEAU 3
PROGRESSION DE L'ATTEINTE DU TAUX DE RÉUSSITE
À L'EXAMEN POUR LES COHORTES 2004 À 2010
(ÉTUDIANTS DIPLÔMÉS OU ACTIFS AU TRIMESTRE D'AUTOMNE 2010)

Essais → Cohortes ↓	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Taux global de réussite**
2004-2009	3,9 %	53,6 %	72,3 %	83,26 %	91,0 %	94,9 %	94,9 %
2005-2010	24,8 %	58,4 %	74,5 %	85,9 %	93,3 %	95,3 %	95,3 %
2006-2011	42,6 %	62,0 %	77,7 %	88,8 %	96,2 %	97,1 %	97,1 %
2007-2012	36,4 %	66,2 %	79,4 %	86,0 %	89,3 %	91,8 %	91,8 %
2008-2013	35,3 %	50,6 %	73,0 %	77,7 %			77,7 %
2009-2014	38,8 %	61,3 %					61,3 %
2010-2015	28,0 %						28,0 %

Les données présentées dans le tableau 3 montrent une amélioration du taux de réussite. Pour les cohortes 2004 à 2010, plus de 50 % des étudiants ont réussi l'examen après deux essais seulement. Ce taux monte à plus de 80 % après quatre essais. Il faut aussi souligner le taux de réussite global pour les cohortes 2004 à 2006 (cohortes diplômées), qui se situe près de 96 % en moyenne. Ainsi, approximativement 4 % des étudiants de ces cohortes n'ont pas réussi l'examen de mathématiques, ce qui représente trois à sept étudiants par cohorte. Les cohortes 2007 à 2010 sont en cheminement actuellement. Pour la cohorte 2007, 7,4 % des étudiants n'ont pas encore réussi leur examen. Ils sont en suspension et invités à se consacrer à la maîtrise des connaissances et des compétences en mathématiques. Pour les autres cohortes, il reste encore des essais pour réussir l'examen.

Le développement des connaissances et des compétences en mathématiques est un processus de plusieurs années pour un bon nombre d'étudiants, et il s'effectue de différentes manières. Parmi les mesures d'aide qui leur sont proposées, certaines sont plus populaires que d'autres. Le tableau 4 ci-contre présente les mesures d'aide que les étudiants ont choisies de 2004 à 2009.

Les données de ce tableau révèlent que les mesures d'aide privilégiées par les étudiants sont plutôt sporadiques, tels que les ateliers de mathématiques et les rencontres individualisées. Le cours d'un crédit (15 heures de cours) s'avère plus populaire que celui de trois crédits (45 heures). Ces données sont intéressantes, car elles soutiennent les principes fondamentaux de la démarche de développement des connaissances et des compétences en mathématiques que le module PREP (Préscolaire et enseignement primaire) voulait initier chez les étudiants dans le cadre de la réforme des programmes à l'enseignement. En effet, par le passé, lors d'un échec à l'examen de connaissances en mathématiques, les étudiants devaient s'inscrire obligatoirement à un cours de mise à niveau de connaissances en mathématiques, mais ils n'avaient pas à reprendre l'examen. Toutefois, ce cours ne permettait pas à tous les étudiants d'améliorer leur maîtrise des contenus mathématiques du primaire. Les professeurs de didactique des mathématiques en faisaient le constat dans leurs cours, et ils devaient alors revenir sur les concepts de base qui auraient dû être maîtrisés. En fait, les étudiants qui avaient échoué à l'examen ne se sentaient pas très concernés par leurs difficultés et l'effet de celles-ci sur leur future carrière. Le fait de ne pas mesurer à nouveau la maîtrise de leurs connaissances et compétences en mathématiques par la reprise de l'examen et de ne pas exiger la réussite de ce dernier pour continuer dans le programme de formation contribuait également à ce désintéressement.

TABLEAU 4
PARTICIPATION DES ÉTUDIANTS AUX MESURES D'AIDE EN MATHÉMATIQUES DE 2004 À 2009

	Cours 3 crédits	**Cours 1 crédit Algèbre**	**Consul-tation examen**	**Ateliers – CAR**	**Rencontres individualisées – CAR**
Cohorte 2004-2005	–	2	1	–	–
Cohorte 2006	2	2	5	1 personne/1 présence 3 personnes/2 présences* **Total : 4 personnes/ 7 présences**	3 personnes/1 présence 3 personnes/4 présences 1 personne/6 présences 1 personne/10 présences **Total : 8 personnes/ 31 présences**
Cohorte 2007	4	12	13	2 personnes/1 présence 9 personnes/2 présences 1 personne/3 présences **Total : 12 personnes/ 23 présences**	5 personnes/1 présence 4 personnes/2 présences 1 personne/3 présences 1 personne/4 présences 1 personne/5 présences 1 personne/7 présences 1 personne/12 présences **Total : 14 personnes/ 44 présences**
Cohorte 2008	7	3	19	7 personnes/1 présence 5 personnes/2 présences 2 personnes/5 présences 2 personnes/6 présences 1 personne/7 présences **Total : 17 personnes/ 46 présences**	2 personnes/1 présence 1 personne/2 présences 2 personnes/3 présences 1 personne/4 présences 1 personne/5 présences **Total : 7 personnes/ 19 présences**
Cohorte 2009	19	42	12	18 personnes/1 présence 16 personnes/2 présences 7 personnes/3 présences 2 personnes/4 présences 6 personnes/5 présences 3 personnes/6 présences 2 personnes/7 présences 4 personnes/8 présences **Total : 58 personnes/ 173 présences**	2 personnes/1 présence 2 personnes/2 présences 1 personne/3 présences 1 personne/4 présences **Total : 6 personnes/ 13 présences**
Total	32	61	50	91 personnes/ 249 présences 38 ont réussi l'examen – 42 %	35 personnes/ 107 présences 18 ont réussi l'examen 51 %

* 3 personnes/2 présences : signifie que chaque personne s'est présentée à deux reprises.

Ainsi, la nouvelle approche proposée dans le cadre de la réforme des programmes à l'enseignement visait à susciter chez l'étudiant une prise de conscience de ses difficultés en mathématiques afin qu'il sente la nécessité d'amorcer une démarche personnelle pour améliorer ses connaissances et ses compétences en mathématiques, et ce, dans la perspective de devenir un meilleur enseignant en mathématiques. Dans ce contexte, tous les moyens pour y parvenir étaient possibles : cours, ateliers, travail en équipe, tutorat par les pairs, cours privés, démarche personnelle avec le guide de préparation et manuels d'enseignement, etc. Ils avaient la liberté de choisir ce qui leur convenait le mieux.

Les données du tableau 4 montrent que plusieurs étudiants choisissent de travailler de façon plus personnelle, ce qui diffère principalement de la voie offerte dans l'ancien programme de baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement au primaire. Les ateliers en petits groupes ou les rencontres individuelles échelonnées sur quelques mois ou années semblent favoriser la mise en place d'une relation de confiance entre les personnes engagées. Cette relation est particulièrement importante lorsque l'on travaille avec des étudiants qui ont développé des attitudes négatives au regard des mathématiques et qui ont connu des difficultés dans leur parcours scolaire. Dans ce contexte de travail, ils sont ainsi beaucoup plus à l'aise d'exprimer leurs incompréhensions, ce qui permet par la suite un travail plus engagé. Ainsi, ce choix de mesures n'est pas étonnant. Toutefois, parmi les 91 étudiants qui ont participé aux ateliers de mathématiques, seulement 38 d'entre eux ont réussi l'examen, ce qui représente 42 % du groupe. Quant aux rencontres individualisées, 18 étudiants sur 35 ont réussi leur examen, soit 51 %. Ces résultats montrent que les mesures d'aide sporadiques contribuent au développement des connaissances et des compétences en mathématiques, mais elles ne suffisent pas à tous les étudiants. En effet, les ateliers et les rencontres individuelles aident les étudiants à comprendre certains concepts, mais leur réussite dépend davantage de leur participation dans les trois volets du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques, soit le diagnostic des connaissances et des compétences en mathématiques des étudiants, la formation mathématique et la formation didactique.

Au cours des années 2004 à 2009, 41 % des étudiants ont utilisé les mesures d'aide proposées par l'UQAR pour améliorer leur maîtrise des savoirs mathématiques. Toutefois, 59 % des étudiants qui n'ont pas réussi l'examen à la première tentative semblent prendre en charge leur démarche de développement des connaissances et des compétences en mathématiques en utilisant d'autres moyens. Le bilan de culture et de compétences en mathématiques s'avère sans aucun doute un outil précieux, puisqu'il indique aux étudiants les notions à travailler. À partir de cette information, plusieurs d'entre eux entreprennent un travail autodidacte en se référant au guide de préparation à l'examen et à d'autres manuels de révision des connaissances en mathématiques.

Les données résumées par ces trois tableaux fournissent des informations sur le cheminement des étudiants au regard du développement des compétences en mathématiques, mais ils révèlent aussi des zones d'ombre qu'il faudrait éclairer davantage pour consolider la démarche. En effet, il serait important de recueillir des données plus précises sur le cheminement de chaque étudiant afin de connaître les moyens qu'ils ont pris pour améliorer leurs connaissances et leurs compétences en mathématiques. Il serait également opportun de recueillir des informations sur les étudiants en suspension et en abandon. Actuellement, peu de données existent sur le travail réalisé par ceux-ci, les mesures d'aide qu'ils utilisent, ce qui favorise leur réussite ou les raisons qui ont motivé leur abandon. Il serait aussi pertinent d'interroger les étudiants sur l'apport de cette démarche dans leur formation. Qu'ont-ils appris et consolidé ? Leur rapport aux mathématiques a-t-il changé ? Que retiennent-ils du travail qu'ils ont accompli au cours de ce processus d'apprentissage ? Ce travail a-t-il eu un effet sur leur formation didactique ? Bref, il faut maintenant mener des recherches pour mieux cerner les effets du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques de l'UQAR.

6. Conclusion

Bien que peu de données précises soient disponibles sur les effets du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques auprès des étudiants, il est tout de même possible de constater certains effets positifs. L'évaluation de la culture et des compétences en mathématiques provoque une prise de conscience chez les étudiants du travail qu'ils doivent accomplir pour maîtriser les contenus mathématiques qu'ils devront enseigner. Plusieurs étudiants entreprennent une démarche dont on peut suivre la trace par leur participation aux mesures d'aide. Les étudiants qui ont répondu aux exigences du dispositif de formation de l'UQAR accordent généralement une plus grande importance à la maîtrise des contenus mathématiques prescrits par le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS), à leur compréhension et à leur dimension didactique. Ces faits ont été observés en situation de stage par les professeurs et les enseignants-associés. Ces derniers constatent que plusieurs étudiants sont plus à l'aise avec l'enseignement des mathématiques et qu'ils ont une attitude plus positive à l'égard de cette discipline. Ces constats, bien que simples, sont significatifs.

La modification du rapport aux savoirs mathématiques est une réussite importante pour tous les acteurs contribuant à cette démarche. Les formations mathématique et didactique ont certainement joué un rôle déterminant, car les activités d'analyses mathématiques permettent de revisiter les contenus mathématiques, ce qui contribue à leur compréhension et à leur validation. L'articulation entre les formations mathématique et didactique favorise ainsi une meilleure compréhension des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, tant du point de vue des contenus mathématiques que du point de vue didactique.

Ainsi, il serait souhaitable qu'un dispositif identique soit mis en place pour les étudiants inscrits au programme en enseignement en adaptation scolaire et sociale. Les enseignants de ce champ disciplinaire doivent bien maîtriser les contenus mathématiques pour aider les élèves en difficulté. Ces derniers sont appelés à poser des diagnostics, mais aussi à intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers en mathématiques. Il semble donc tout aussi pertinent d'exiger un degré de maîtrise élevé des contenus mathématiques du primaire et du secondaire.

Par ailleurs, malgré l'amélioration observée chez les étudiants au regard des connaissances et des compétences en mathématiques, des lacunes persistent au regard de la compréhension de certains concepts mathématiques. Celles-ci se révèlent dans les pratiques enseignantes et de classe des étudiants observés en situation de stage (Arsenault, 2010). Ces moments de pratiques réelles permettent parfois aux étudiants de mieux comprendre l'importance de certaines connaissances et la nécessité d'en contrôler les applications. Ainsi, l'articulation de la formation pratique à la formation mathématique et didactique semble une avenue souhaitable pour tout programme de formation à l'enseignement des mathématiques. Cette triple articulation favoriserait certainement une meilleure compréhension de la pertinence des activités conduites dans les cours de didactique des mathématiques, pertinence qui n'est pas toujours reconnue par nos étudiants.

Il est certain que le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques peut être bonifié, et ce, pour chacun de ses volets. Que ce soit au regard des cours, de l'examen ou des ateliers, il semble tout à fait pertinent de conduire des recherches sur les effets concrets du dispositif actuel. De plus, cet accent fort sur la formation mathématique dans notre programme peut être critiqué, alors que d'autres didacticiens la couvrent autrement. Toutefois, peu importe les divergences de points de vue sur l'importance accordée aux contenus mathématiques ou didactiques, une bonne formation à l'enseignement des mathématiques demande nécessairement l'articulation de plusieurs formations pour rendre compte de la complexité de l'acte d'enseigner.

Réaction 1 au texte d'Adolphe Adihou et de Cathy Arsenault

La compétence mathématique

Une nécessité pour tous les enseignants du primaire et du secondaire

Michel Beaudoin
Département des sciences de l'éducation
Université du Québec en Outaouais
michel.beaudoin@uqo.ca

1. Introduction

Les auteurs décrivent et commentent un dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques au primaire développé à l'Université du Québec à Rimouski (UQAR). Dans ce texte, je présente une réaction en lien avec mon rôle de formateur d'enseignants de mathématiques au secondaire à l'Université du Québec en Outaouais (UQO). Je souligne en premier lieu les points importants du dispositif présenté par les auteurs en relevant des questions qui ont suscité mon intérêt à la lecture du texte. Par la suite, j'expose des relations entre le dispositif présenté et ma situation de formateur d'enseignants de mathématiques. Je termine cette réaction en évoquant des conflits potentiels entre le dispositif présenté et d'autres contextes institutionnels.

2. Les éléments du dispositif

Le dispositif présenté s'appuie sur une articulation entre la formation mathématique et la formation didactique. Il comporte trois volets : le diagnostic, la formation mathématique et enfin la formation didactique. Les enseignants en formation sont associés à un processus s'échelonnant sur plusieurs années, où ils sont les premiers responsables du développement de leurs compétences en mathématiques. Les composantes du dispositif mettent à profit la concertation de plusieurs acteurs de la communauté universitaire. Dans cette optique, Marchand (2010) a montré les défis auxquels est confrontée la formation mathématique des futurs enseignants et a souligné la nécessité d'en discuter entre intervenants de fonctions différentes.

Les auteurs soulignent un certain « succès » du dispositif auprès des enseignants associés ; ils ne donnent toutefois pas beaucoup de détails sur cette question, en lien avec le réinvestissement dans la pratique des compétences mathématiques développées par les stagiaires. C'est un point sur lequel il aurait été utile d'avoir des informations plus détaillées, puisque la mobilisation des compétences dans l'action est une visée du programme québécois de formation à l'enseignement (Gouvernement du Québec, 2001a). L'arrimage entre le dispositif et la formation pratique est d'ailleurs ciblé par les auteurs comme une avenue souhaitable.

2.1. L'examen de culture et de compétences en mathématiques

Les étudiants doivent réussir un examen portant sur le contenu du primaire et du premier cycle du secondaire. La performance à l'examen alimente un bilan diagnostique qui oriente la formation à suivre par l'étudiant, en particulier s'il y a eu échec la première fois que l'examen a été fait.

Le niveau du contenu visé par l'examen soulève une question. Est-il suffisant, pour les enseignants du primaire (en particulier pour ceux de fin de troisième cycle), de démontrer une compétence mathématique sur des contenus limités au premier cycle du secondaire ? Il y a des personnes formées pour enseigner au primaire qui ont, par un concours de circonstances, fait carrière au secondaire. On s'entend généralement pour affirmer que les enseignants doivent maîtriser des savoirs plus complexes que leurs élèves. La question est de savoir jusqu'à quel point.

Le niveau de la formation mathématique est également source de préoccupations importantes pour les étudiants en formation à l'enseignement au secondaire. Actuellement, dans plusieurs établissements (en particulier à l'UQO), ces étudiants suivent des cours de mathématiques dont le contenu s'écarte beaucoup de ce qui fait partie du Programme de formation de l'école québécoise (Gouvernement du Québec, 2003, 2007). Plusieurs étudiants en voient mal la pertinence *a priori*, jugeant que leur formation devrait s'axer autour de notions connexes à celles de leurs futurs élèves. Par exemple, l'apprentissage de l'analyse et des équations différentielles peut être qualifié de non pertinent par de futurs enseignants. Toutefois, cette perception peut varier après quelques années de pratique de l'enseignement (des enseignants ayant suivi ce type de formation ont dit apprécier *a posteriori* la formation reçue en faisant des mathématiques qu'ils jugeaient alors « déconnectées » des contenus et des façons de faire du système scolaire).

2.2. La formation mathématique

La formation mathématique prévue au dispositif proposé par les auteurs est basée sur une démarche entreprise par l'étudiant à la suite du diagnostic. Cette démarche peut prendre plusieurs formes, selon les résultats de l'étudiant à l'examen et ses préférences personnelles. Il est intéressant de constater que plusieurs voies sont offertes à l'étudiant de l'UQAR s'il a eu un échec à l'examen. Les étudiants semblent profiter de la variété des formules offertes.

Cette formation ne comporte aucun cours obligatoire et sa raison d'être est étroitement en relation avec la réussite obligatoire de l'examen. La réussite de cet examen implique-t-elle que l'étudiant ait une compétence mathématique suffisante pour enseigner les mathématiques au primaire ? Ce n'est pas certain. DeCorte (2004) suggère que la compétence mathématique comporte plusieurs volets qui ne sont pas nécessairement évalués par cet examen (par exemple, les habiletés d'autorégulation, les connaissances métacognitives, les conceptions appropriées). Par ailleurs, ces éléments peuvent être abordés dans la formation en didactique des mathématiques, volet qui compte quatre cours obligatoires dans le dispositif. L'articulation entre les formations didactique et mathématique est par conséquent nécessaire dans un tel contexte.

La formation mathématique pourrait-elle également être assujettie aux mêmes modalités pour les étudiants en adaptation scolaire ? Comme plusieurs finissants au baccalauréat en adaptation scolaire risquent de faire carrière au secondaire (il y a pénurie dans ce secteur en plusieurs endroits), le niveau de leur préparation en mathématiques pose un défi particulier. Ces enseignants pourraient vraisemblablement intervenir en mathématiques jusqu'à la première année du second cycle du secondaire et, par conséquent, devraient manifester une maîtrise des contenus sur d'autres éléments que ceux visés par l'examen présenté.

Le texte présente plusieurs questions de l'examen et illustre les conduites d'étudiants dans le développement de ces questions. On y voit bien la variété des conduites utilisées ainsi que les besoins importants de formation mathématique que plusieurs étudiants ont à combler pour espérer atteindre les cibles de formation visées.

2.3. La formation en didactique des mathématiques

Le dispositif comprend un bloc important de quatre cours obligatoires de didactique des mathématiques. Ces cours visent le développement des compétences professionnelles à l'enseignement des mathématiques et sont articulés à la partie « formation mathématique » du dispositif.

Comme les cours de mathématiques ne sont pas obligatoires dans le dispositif et que la réussite de l'examen ne garantit pas nécessairement un niveau de compétence mathématique adéquat pour enseigner, les quatre cours de didactique peuvent, dans une mesure variable, contribuer à améliorer la compétence disciplinaire des étudiants. Ces cours comportent en effet une analyse mathématique des concepts visés par des situations-problèmes. La portion « didactique » du dispositif est ainsi bien articulée à la portion « mathématique ».

Le texte évoque les *compétences professionnelles à l'enseignement des mathématiques*. Ce sujet est traité de façon implicite, et il aurait été intéressant que les auteurs s'attardent davantage sur cette question.

Comment s'explicitent ces compétences ? Quels sont leurs liens avec les compétences professionnelles du programme de formation à l'enseignement (Gouvernement du Québec, 2001a) ?

Bien que le texte présenté s'adresse de façon privilégiée à la formation mathématique, les auteurs pourraient avec intérêt décrire davantage la portion « didactique » de leur dispositif de façon à en expliciter l'articulation avec la formation mathématique.

3. Les résultats

Le volet « formation mathématique » du dispositif présente de bons résultats, une vaste majorité d'étudiants ayant réussi l'examen, même si la réussite est généralement obtenue après plus d'une tentative. Le lien avec la situation engendrée par la réussite au test TECFÉE a été évoqué par les auteurs et devrait faire l'objet d'un suivi pour les années à venir.

Un des aspects qui ont été développés dans l'analyse des résultats du volet « formation mathématique » du dispositif concerne l'engagement des étudiants dans le développement de leur compétence mathématique. L'approche utilisée visait une prise de conscience des étudiants et leur responsabilisation dans leurs apprentissages mathématiques. Étant donné qu'il s'agit de contenus disciplinaires du primaire et du début de secondaire, on peut facilement comprendre que la motivation préalable des étudiants à y faire un retour ne soit pas très grande. Une expérience de 30 années en enseignement collégial de mathématiques m'a rappelé la pertinence des modalités qui ont été ciblées pour la mise à niveau de connaissances mathématiques. Les auteurs ont souligné l'efficacité de cette approche dans leur dispositif.

Dans ce contexte de responsabilisation étudiante, plusieurs modalités ont été proposées :

- la présence aux ateliers ;
- les rencontres individualisées ;
- les modalités personnelles ;
- les cours (un crédit ou trois crédits).

Les étudiants ont trouvé, à partir du bilan de culture et de compétence mathématiques, des façons diversifiées de se développer pour atteindre le niveau de compétence souhaité. La voie « autodidacte » pour la mise à niveau des habiletés mathématiques semble particulièrement avoir donné de bons résultats. Les modalités du travail autodidacte des étudiants qui ont permis la réussite de l'examen après un ou plusieurs échecs pourraient faire l'objet d'une recherche qui donnerait un éclairage sur la mise à niveau des connaissances dans d'autres contextes ou d'autres disciplines.

Le tableau présenté n'indique pas les pourcentages de réussite à l'examen relatifs à toutes les options possibles pour les étudiants : il est ainsi difficile de comparer l'efficacité des mesures d'aide présentées. Il aurait également été intéressant d'avoir des données sur les cours thématiques portant sur la géométrie et les probabilités, de même que sur les ensembles de nombres et les opérations.

La présentation des résultats de la partie « formation mathématique » du dispositif évoque brièvement l'engagement dans les cours de didactique comme un appui à la mise à niveau de la formation mathématique. Cet appui est important, dans la mesure où l'analyse didactique d'un concept en nécessite une compréhension adéquate du point de vue des mathématiques. L'engagement dans les cours de didactique contribue ainsi directement à bonifier la maîtrise des contenus disciplinaires et a pu contribuer à la réussite de l'examen de culture et de compétence mathématiques.

Un élément essentiel a été peu touché dans l'étude et l'interprétation des résultats du dispositif. Il s'agit du contact des étudiants avec les milieux de pratique en situation de stage. Enseigner les mathématiques aux enfants et côtoyer les enseignants en exercice peuvent être d'importants facteurs motivants pour le développement de la compétence mathématique des stagiaires. La réussite des stages en enseignement est également un incitatif au développement des compétences disciplinaires dans toutes les matières enseignées. En effet, une compétence disciplinaire adéquate est nécessaire à cette réussite.

4. Lien avec la formation à l'enseignement au secondaire

L'enseignement au secondaire est offert sur une base disciplinaire. La formation des enseignants prépare les étudiants à œuvrer dans des domaines particuliers comme les mathématiques, le français, l'univers social et les sciences et technologies, entre autres. Pour enseigner les mathématiques au secondaire, les conditions d'admission au baccalauréat exigent une formation mathématique de niveau collégial. La formation disciplinaire se poursuit dans le programme de formation à l'enseignement secondaire, le programme comportant une forte proportion de cours dédiés aux mathématiques et à la didactique des mathématiques (cette proportion est toutefois variable d'un établissement universitaire à un autre). Ces étudiants ont développé beaucoup d'habiletés en mathématiques, même si, dans certains cas, ces habiletés ne sont pas toujours utiles en contexte scolaire d'enseignement (Proulx, 2010). Toutefois, quelques étudiants peuvent avoir des préalables mathématiques déficients ; c'est le cas notamment de certains étudiants adultes qui font un retour aux études. L'idée d'un examen de culture et de compétence mathématiques avec mécanismes de suivi peut avoir un intérêt dans ce contexte. Il faudrait évidemment recontextualiser l'instrument en fonction des besoins en formation mathématique et des activités de formation disponibles au baccalauréat en enseignement secondaire.

Les cohortes de taille limitée en enseignement des mathématiques au secondaire dans les petites universités posent des problèmes précis (Beaudoin, 2009) reliés au cadre budgétaire. Des cohortes de très petite taille peuvent entraîner des fermetures de cours (les étudiants sont intégrés à un cours-groupe moins adapté à leurs besoins) ou encore un enseignement en supervision individuelle. La plupart des cours de mathématiques et de didactique s'adaptent mal à cette dernière modalité pédagogique en raison des compétences ciblées. Enfin, la mise sur pied de cours de mise à niveau en mathématiques est à peu près impossible dans un tel contexte. Des dispositifs de formation inspirés de celui de l'UQAR pourraient contribuer à bonifier l'offre de formation dans des contextes budgétaires limités.

Marchand (2010) a évoqué l'importance d'une compétence mathématique pour tous les étudiants en formation des maîtres. Dans cette optique, je désire aborder la question de la formation mathématique des enseignants qui aspirent à enseigner au secondaire dans un autre domaine que les mathématiques. Cette question présente un intérêt, en particulier pour deux raisons. En premier lieu, le Programme de formation de l'école québécoise (Gouvernement du Québec, 2003, 2007) met de l'avant la nature interdisciplinaire des savoirs et le lien entre les disciplines enseignées à l'école. Une compétence mathématique de base ne pourrait-elle pas être exigée de tous les enseignants au secondaire ? En deuxième lieu, plusieurs enseignants du secondaire œuvrent dans un domaine pour lequel ils n'ont pas reçu de formation universitaire pour l'enseignement. Dans certaines écoles, en particulier au premier cycle du secondaire, l'organisation du travail n'est pas fondée sur une approche disciplinaire. Un enseignant a des groupes de plusieurs disciplines qui sont plus ou moins reliées (par exemple, mathématiques, anglais, éthique). Les élèves peuvent ainsi avoir un enseignant de mathématiques formé pour enseigner une autre discipline, sa compétence mathématique ayant ici été développée en dehors de la formation universitaire proprement dite. Comment s'assurer d'une compétence mathématique, même minimale, dans ce contexte ? Devrait-on s'assurer d'un niveau minimal de culture mathématique pour tous les étudiants inscrits au baccalauréat en enseignement secondaire ?

La culture mathématique peut être définie comme « l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi » (OCDE, 2004). Elle peut alors s'appliquer minimalement à tout enseignant du secondaire.

Je pense souhaitable que tous les étudiants inscrits à un programme de formation à l'enseignement secondaire manifestent un niveau de culture mathématique suffisant pour accomplir leur tâche en collaboration avec les enseignants de mathématiques. Dans un tel contexte, les composantes du dispositif de formation de l'UQAR (volet formation mathématique) pourraient servir d'exemples à adapter en fonction des exigences particulières du contexte de l'enseignement au secondaire.

5. Les conflits potentiels d'un dispositif analogue dans d'autres contextes

Le dispositif développé à l'UQAR présente des avantages pour les étudiants inscrits en formation à l'enseignement au primaire et pourrait être bénéfique pour les étudiants inscrits en formation à l'enseignement au secondaire. Des contextes institutionnels différents pourraient toutefois en limiter l'efficacité.

5.1. En formation à l'enseignement au primaire

Le dispositif comporte un nombre important de cours de didactique des mathématiques, en plus d'un cours de mathématiques (hors programme). Le nombre de cours me paraît justifié, étant donné les nouveaux défis posés à l'enseignement des mathématiques ces dernières années. L'implantation d'un dispositif analogue dans un contexte où la culture institutionnelle accorde une place réduite au développement de la compétence mathématique peut par contre poser problème, les cours étant alors affectés au développement d'autres compétences. Toutefois, le principe de la démonstration par l'étudiant d'un certain niveau de compétence et de culture mathématiques est important et, en ce sens, certains mécanismes développés à l'UQAR pourraient être réutilisés ailleurs en les adaptant.

5.2. En formation à l'enseignement au secondaire

Beaucoup d'efforts sont faits présentement pour développer la compétence langagière des étudiants en formation à l'enseignement. La réussite du TECFEE est impérative et exige beaucoup de temps et de ressources pour bon nombre d'étudiants. Serait-il acceptable (et accepté) qu'un niveau de culture mathématique minimal soit exigé des futurs maîtres au secondaire, quelle que soit leur discipline d'enseignement ? Cette question d'une culture mathématique minimale pour les futurs enseignants du secondaire a déjà fait l'objet de discussions entre des étudiants en enseignement au secondaire à l'UQO et leurs formateurs. Si tous s'entendent au sujet de l'importance de la langue d'enseignement, les étudiants des profils autres que « mathématiques » ont manifesté beaucoup de réticences à la nécessité de posséder une culture mathématique (même minimale) ; plusieurs croient ne pas pouvoir réussir cette tâche. Les mathématiques suscitent souvent de la crainte et de la méfiance, en particulier chez ceux qui les ont évitées au collégial. Une opposition des étudiants à ce type de mesure risque de susciter l’écoute des intervenants dans des milieux universitaires déjà très engagés par la réussite du TECFÉE. La nécessaire concertation pour l’obligation d’une compétence mathématique minimale au secondaire est encore à construire.

Réaction 2 au texte d'Adolphe Adihou et de Cathy Arsenault

La formation mathématique dans une perspective « métier »

Lily Bacon
Unité d'enseignement et de recherche en sciences de l'éducation
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue
lily.bacon@uqat.ca

1. Introduction

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt le texte de mes collègues de l'Université du Québec à Rimouski (UQAR), dans lequel ils rapportent le dispositif qu'ils ont développé pour la formation mathématique dans le cadre du programme d'enseignement au primaire de leur institution. Dans un contexte où depuis de nombreuses années la maîtrise mathématique fragile des candidats inscrits à ces programmes est relevée (voir par exemple Héraud, 2000, et Marchand, 2010), il est intéressant de prendre connaissance d'un dispositif qui prend en compte cette situation et propose une solution.

Avant de partager mes commentaires, il me semble pertinent de présenter brièvement mes intérêts et préoccupations, parce qu'ils ont évidemment façonné la perspective avec laquelle j'ai abordé la lecture de ce texte, de même que la réflexion que je propose dans cette réaction. D'abord, j'interviens depuis plus de 10 ans à l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) dans le programme de baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement primaire dans les cours liés aux mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement. Je suis également engagée en formation en milieu pratique comme superviseure et responsable du stage III, qui met un accent particulier sur les dimensions didactiques de la pratique enseignante. Mes observations au fil de mes expériences de supervision m'ont amenée à remettre en question les liens entre les savoirs théoriques traités dans les cours, notamment les savoirs mathématiques, et l'activité d'enseignement que mettent en œuvre les stagiaires. Finalement, en lien avec la problématique précédente, j'explore depuis quelques années le cadre de la didactique professionnelle, qui s'intéresse au développement des compétences professionnelles en milieu de pratique et de formation. C'est donc dire que je partage le questionnement des auteurs au sujet du développement de compétences professionnelles des futurs maîtres et de la formation à l'enseignement des mathématiques au primaire. C'est à partir d'une perspective où l'acquisition du métier est conçue comme intimement liée aux contextes et aux situations réels d'exercice que j'aborde cette problématique.

2. Le programme de formation à l'enseignement des mathématiques au primaire à l'UQAR

De prime abord, il me semble important de relever que le dispositif de formation mathématique présenté par l'équipe de l'UQAR n'est pas conçu de manière isolée, mais plutôt intégré au dispositif plus large de formation professionnelle pour l'enseignement au primaire. Les auteurs explicitent alors certains principes à la base de l'organisation de la formation : *a*) une bonne connaissance de la discipline est posée comme une condition nécessaire pour la régulation des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage ; *b*) cette même connaissance n'est cependant pas considérée comme suffisante, et les auteurs jugent essentiel d'ancrer la formation mathématique dans les exigences de l'acte d'enseignement à travers notamment la perspective didactique de l'intervention ; *c*) ces deux pôles de la formation – mathématique et didactique – se déclinent en deux formations distinctes, mais dont chacune fait écho à l'autre. Ainsi, la démarche de l'équipe de l'UQAR a abouti à un cadrage particulier de l'apprentissage du métier où s'articulent les savoirs mathématiques et didactiques, les orientations ministérielles de même que les compétences professionnelles propres à l'acte d'enseigner. Le tableau suivant présente la synthèse de ce dispositif tel que je l'ai compris à la lecture du texte.

TABLEAU 1
SYNTHÈSE DU DISPOSITIF À L'UQAR

Examen de culture et compétences mathématiques (programme obligatoire)	
Formation didactique (programme obligatoire)	**Formation mathématique (hors programme, non obligatoire)**
Mathématiques au préscolaire et au premier cycle du primaire (3 crédits)	Accompagnée ou autodidacte
Mathématiques au deuxième cycle du primaire (3 crédits)	Cours (1 ou 3 crédits)
Mathématiques au troisième cycle du primaire (3 crédits)	Ateliers
Mathématique, science et technologie (3 crédits)	Soutien du conseiller en mathématiques
	Guide de préparation à l'examen

Après sept années de mise en œuvre, l'équipe de l'UQAR mentionne qu'elle en est à l'étape d'entreprendre un bilan plus détaillé du dispositif mis en place. Je reviens dans ce qui suit sur quelques éléments présentés dans le texte qui m'apparaissent fort intéressants ou qui suscitent questions et réflexions au regard de la problématique de la formation à l'enseignement des mathématiques au primaire. J'espère, par ce bref exposé, contribuer à la démarche bilan de l'équipe. C'est en même temps pour moi une belle occasion de réfléchir à ce contexte de formation commun à toutes nos institutions.

3. L'examen de culture et de compétences mathématiques et le bilan diagnostique

Le cœur du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques au primaire mis sur pied par l'équipe de l'UQAR consiste en un examen obligatoire de culture et de compétences mathématiques, dont la note de passage a été fixée à 75 %, et un bilan diagnostique qui est produit à la suite de l'examen et transmis à l'étudiant.

3.1. Explicitation du niveau attendu pour la profession

Il me semble que l’un des premiers éléments intéressants en lien avec cet examen est qu’il permet en quelque sorte l’explicitation des niveaux de connaissances et de maîtrise mathématiques exigés par la profession à l’enseignement au primaire. Ainsi, l’examen élaboré par l’équipe de l’UQAR met en lumière que la maîtrise attendue va bien au-delà de l’application de connaissances factuelles, procédurales ou techniques, et qu’elle nécessite une compréhension approfondie des concepts et des processus mathématiques. La déclinaison des items de l’examen en fonction des compétences disciplinaires ministérielles permet également de rendre visible une représentation des mathématiques non seulement comme objet de culture, mais également comme outil de pensée. Ces deux aspects m’apparaissent primordiaux pour rendre compte des différents types de savoirs mathématiques au cœur de la mission d’instruction de l’enseignant du primaire. Finalement, certains items mettent en jeu des savoirs et des raisonnements qui caractérisent davantage les mathématiques du secondaire. J’y ai vu là un choix qui s’inscrit dans une perspective de développement du métier en contribuant à une meilleure connaissance de la progression des apprentissages et de ce qu’exige la transition primaire-secondaire.

À mon avis, cette explicitation des niveaux attendus pour l’exercice de la profession qu’on ne retrouve pas dans les descripteurs de cours habituels peut potentiellement induire un changement de culture dans la perception du métier d’enseignant. Au même titre que le Test de certification en français écrit pour l’enseignement (TECFEE) pour les compétences en français, cet examen rend visibles aux étudiants les exigences de la profession et engage leur responsabilité au regard de l’atteinte de ces attentes. Cette perspective peut contrecarrer une représentation de l’enseignement souvent inférée chez les étudiants qui fait du matériel didactique le porteur du savoir mathématique. Les étudiants considèrent en effet que ces ouvrages contiennent les informations à présenter aux élèves et les dégagent de la responsabilité de maîtrise mathématique. Les conséquences d’un échec à l’examen dans le cheminement de l’étudiant lance un message clair en ce sens : l’entrée dans la profession est conditionnelle à une maîtrise nécessaire et suffisante des savoirs mathématiques.

Au-delà des niveaux de maîtrise explicités, c'est le processus nécessaire à l'élaboration d'un tel examen que le texte laisse entrevoir qui a retenu plus particulièrement mon attention, même si les auteurs n'ont pas détaillé leur démarche dans cette perspective. En effet, du point de vue de la recherche, il serait intéressant de voir comment, au fil des discussions, se sont organisés les échanges au sein de l'équipe pour aboutir à une perspective collective, fondée et argumentée quant au niveau de maîtrise attendu. L'idée derrière étant que la démarche d'explicitation et d'argumentation contribue certainement à l'atteinte d'une meilleure cohérence des interventions de formation, facteur d'influence déterminant dans la transformation des pratiques enseignantes des étudiants en formation (Bednarz et Perrin-Glorian, 2003 ; Wideen, Mayer-Smith et Moon, 1998).

3.2. Régulation du cheminement académique et régulation des apprentissages

Un deuxième atout que j'attribue à ce dispositif est son rôle dans la régulation du cheminement académique et des apprentissages des étudiants. En effet, pour les responsables académiques, l'examen et le bilan diagnostique constituent un outil de contrôle du niveau de maîtrise mathématique et, en ce sens, représentent un moyen potentiel au service du suivi et de l'orientation du cheminement académique. L'examen et le bilan diagnostique fournissent aussi aux formateurs de l'information pertinente quant au profil d'entrée des étudiants rendant possible sa prise en compte dans la préparation des cours, par exemple.

Pour les étudiants, l'examen et le bilan diagnostique sont des indicateurs tangibles concernant leur niveau de maîtrise en regard de ce qui est attendu. L'évaluation se situe ici réellement au service des apprentissages et de leur régulation, plutôt que de constituer une information à des fins de sanction de la réussite d'un cours. À cet égard, l'équipe de l'UQAR semble avoir porté une attention particulière au choix des items de manière à faire émerger les raisonnements erronés au regard de certains contenus mathématiques. Ces items sortent les étudiants des zones confortables des tâches scolaires avec lesquelles ils sont familiers et les confrontent à l'étendue et à la flexibilité de leur compréhension. Ce choix m'apparaît d'autant plus pertinent qu'il permet de remettre en question le niveau de maîtrise des étudiants qui ont toujours bien performé en mathématiques, leur révélant que leur réussite est peut-être le fait d'une connaissance de surface.

3.3. Engagement des étudiants dans le développement de leurs compétences mathématiques

À la suite de l'examen et du portrait qu'il retourne à l'étudiant, il appartient à ce dernier de s'engager dans une démarche de formation mathématique selon ses besoins. Or, tout en reconnaissant l'apport de l'examen dans la régulation des apprentissages, je me demande si le caractère obligatoire de l'examen et les sanctions officielles importantes sur le cheminement académique reliées peuvent influencer négativement l'engagement des étudiants dans leur formation mathématique. Si on considère l'engagement de l'étudiant dans une telle démarche de formation comme une activité humaine orientée par les finalités que se donne l'acteur (Pastré, Mayen et Vergnaud, 2006), est-il possible que l'examen soit perçu comme une contrainte dans le cheminement et que, pour certains étudiants, le but devienne la réussite de l'examen plutôt qu'un développement plus approfondi des mathématiques ?

L'information transmise à travers le bilan diagnostique a aussi retenu mon attention. La correction d'un grand nombre de copies dans des temps raisonnables justifie certainement le recours à un traitement informatisé des examens et la production du bilan. Cependant, ce type de traitement permet évidemment moins de nuances dans l'explicitation de la performance, et donc de la nature des informations transmises aux étudiants. L'équipe de l'UQAR relève que pour plusieurs étudiants, l'analyse de leurs conduites fait ressortir des besoins d'apprentissage d'ordre conceptuel. Or le bilan diagnostique ne distingue pas les besoins d'apprentissage et renvoie systématiquement à la révision des contenus en jeu par l'item non réussi. Avec une telle formulation, comment les étudiants perçoivent-ils la progression qui est attendue d'eux ? Sont-ils en mesure de reconnaître le besoin de développement conceptuel nécessaire au niveau de maîtrise attendu ? Je me demande jusqu'à quel point le bilan réussit à bien exprimer le travail à entreprendre et ainsi constitue un réel levier pour réguler les apprentissages. Peut-être le guide de préparation à l'examen tient-il ce rôle ? Le conseiller en mathématiques ou les ressources qui offrent les cours d'appoint et les ateliers s'assurent peut-être d'orienter le travail de révision selon les besoins ?

4. Les modalités de formation mathématique

La formation mathématique prend place en dehors des activités de formation officiellement au programme et revêt par conséquent un caractère non obligatoire. Cette caractéristique du dispositif fait en sorte de remettre entre les mains de chaque étudiant la responsabilité de mettre en œuvre un plan de formation qui prend en compte le bilan diagnostique issu de l'examen. De plus, les auteurs mentionnent brièvement les nécessaires participation et collaboration de différentes instances (départementales, modulaires et administratives) dans la mise en place de leur dispositif de formation mathématique. Résumé ainsi, on peut facilement oublier ce qu'une telle articulation demande en matière de négociation, argumentation avec ces instances (et avec les étudiants) et plus encore, ce que cela exige en temps et en énergie. Je reprends ici quelques-uns des aspects propres à la formation mathématique du dispositif et ce que ceci représente en matière de conditions, de contraintes et de pratiques.

4.1. Conditions et contraintes

À cet effet, le dispositif mis en place à l'UQAR offre aux étudiants une diversité de moyens pour entreprendre cette formation mathématique. Cette caractéristique permet non seulement de répondre aux besoins d'apprentissage variés des étudiants mais, plus encore, elle permet la flexibilité dans l'organisation des plans de formation. Cette variété et cette flexibilité m'apparaissent essentielles pour la viabilité du dispositif, compte tenu que les étudiants doivent mener en parallèle la formation propre au programme et une deuxième formation mathématique qu'ils modulent en fonction de leurs besoins. De plus, cette façon de faire me semble la plus réaliste, car elle tient compte d'une contrainte non négligeable que constitue la grande place que prend le travail rémunéré dans la vie des étudiants. Il me semble que l'on peut interpréter en ce sens les voies diverses utilisées par les étudiants, mais surtout leur prédilection pour les activités ponctuelles ou nécessitant moins de temps fixe à l'horaire (par exemple, les étudiants seront plus nombreux à s'inscrire au cours de un crédit qu'à celui de trois crédits).

Si cette diversité et cette flexibilité me paraissent nécessaires, elles ne sont toutefois pas nécessairement réalisables ou à la portée de toutes les institutions. En projetant cette organisation dans mon propre contexte universitaire, il me semble que ce choix de dispositif n'est pas sans poser des défis importants d'un point de vue administratif. D'abord, compte tenu du caractère non obligatoire des activités créditées offertes, le nombre d'étudiants qui y ont recours est variable, et donc difficilement prévisible. Très rapidement, à l'UQAT, se poserait la question du ratio minimal étudiants/professeur pour l'attribution de crédits à ces cours. De plus, par l'ajout de ces activités créditées (un et trois crédits), la nouvelle offre de service sollicite davantage les ressources professorales ayant une expertise en mathématiques et en didactique des mathématiques. La mise en œuvre d'un tel dispositif chez nous soulèverait rapidement des questions de disponibilité des ressources (professeurs et chargés de cours). Je me suis également demandé si la fonction de conseiller en mathématiques et les modalités qui semblent relever du Centre d'aide à la réussite (CAR) sont aussi prises en charge par les ressources professorales, auquel cas ceci s'ajoute à l'offre de service. Finalement, à la lecture du texte, j'ai cru comprendre que les cours sont des activités créditées, mais que les ateliers, de même que le soutien offert par le conseiller en mathématiques ne le sont pas. Je suppose alors qu'il y a eu des discussions quant à la reconnaissance dans la tâche professorale de ces modalités particulières.

La réussite d'un dispositif est certes tributaire de sa pertinence, de sa qualité, mais aussi de sa capacité à prendre en compte les conditions et contraintes entourant sa mise en œuvre dans chaque institution. Le dispositif décrit par les auteurs a déjà sept ans ; c'est donc dire que l'administration de l'UQAR a été convaincue de son bien-fondé et a fait le pari de soutenir les activités créditées offertes, et ce, même si l'effectif étudiant a été très réduit pour ces cours de 2004 à 2008 inclusivement. Les chiffres présentés dans le texte suggèrent que les étudiants ont été peu enclins dans les premières années à recourir aux activités proposées. On peut interpréter cela comme une réaction au démarrage du dispositif et à ses effets sur le cheminement académique. Cependant, les étudiants sont plus nombreux à avoir recours aux activités créditées offertes.

4.2. Pratiques de développement et processus de développement

Le dispositif en tant que structure organisationnelle d'activités de formation constitue certainement une donnée importante dans l'étude du programme de formation mathématique mis en œuvre, mais les pratiques sont tout autant une donnée incontournable pour comprendre les phénomènes en œuvre. À cet égard, il peut être intéressant d'aborder l'analyse du programme par le biais de l'analyse du travail et de l'activité professionnelle des ressources engagées dans ce programme. Cela demande de parler d'objectifs, d'orientations et de modalités de la formation comme cela est abordé dans le texte, mais aussi de ce qui est fait par les formateurs et les acteurs engagés dans les activités de formation pour répondre à ces objectifs et orientations. Comment s'y prennent les ressources dans le cadre des ateliers et des cours ? Que fait le conseiller mathématique dans le cadre des rencontres individuelles de soutien ? Quelles sont les pratiques professionnelles mises de l'avant ?

Finalement, le fait que plus de la moitié des étudiants ait recours à une démarche autodidacte m'interpelle. Si je conviens, comme je l'ai dit précédemment, que cette possibilité de travail personnel répond bien aux contraintes d'une formation hors programme et au contexte étudiant actuel, je partage avec l'équipe de l'UQAR le questionnement relatif au travail entrepris par ces étudiants dans le cadre d'une telle démarche. Lorsque l'on reconnaît l'influence parfois déterminante des situations et des interactions sociales dans les processus d'apprentissage et de développement mathématiques, il me semble légitime de questionner ce qui se réalise comme apprentissage et développement dans le cadre de ce type de démarche autodidacte. D'ailleurs, les auteurs relèvent volontiers que cet aspect doit être davantage approfondi.

5. Les apports du dispositif

L'investissement en temps et en énergie que demande la mise en œuvre du dispositif décrit par l'équipe de l'UQAR, sans parler des engagements financiers liés aux choix, est certainement pleinement justifié si cela débouche sur des apports significatifs en regard de la formation à l'enseignement des mathématiques au primaire.

5.1. Progression du niveau de maîtrise mathématique des étudiants

L'un des objectifs de l'équipe avec la mise en place de ce dispositif était la hausse du niveau de maîtrise mathématique des étudiants. À cet égard, la progression des taux de réussite des cohortes au fil des ans montre certainement un effet positif du dispositif sur le niveau de maîtrise mathématique des étudiants, puisqu'une bonne part de ceux-ci arrive à atteindre le seuil de réussite de l'examen, fixé à 75 %. Ainsi, l'équipe de l'UQAR peut sans doute conclure que l'objectif « Acquérir des connaissances et développer des compétences mathématiques au-delà de celle de l'élève » se réalise à travers le dispositif. Toutefois, il me semble prudent de garder en tête que cette réussite peut aussi signifier autre chose qu'un développement conceptuel plus approfondi. En effet, des conduites d'élèves qui réussissent les tâches scolaires présentées par l'enseignant sans toutefois s'engager dans un développement du savoir disciplinaire en jeu ont souvent été relevées. Il est donc possible d'attribuer la progression observée chez les étudiants à ce type de phénomène : il est important de distinguer la capacité à réussir la tâche relative à un item de l'examen et la capacité à comprendre le sens et les implications de l'outil mathématique en jeu.

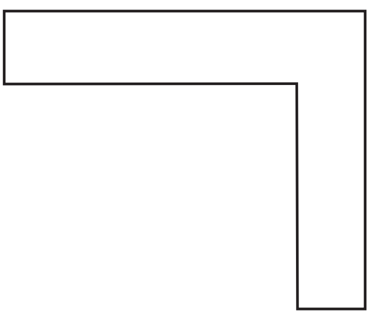
5.2. Collecte des conduites d'étudiants

Un autre apport non négligeable à mon sens est l'ensemble des conduites des étudiants des diverses cohortes recueillies dans le cadre des examens. Les résultats de l'analyse de ces conduites en matière de conceptions, de raisonnements et de procédures tels qu'ils ont été présentés dans le texte par les auteurs constituent des données très intéressantes et précieuses, autant du point de vue de la recherche que de celui de la formation. Je me suis demandé si cette analyse était également menée par les professeurs avec les étudiants. Il me semble que cette pratique peut s'avérer riche non seulement pour leur développement mathématique, mais aussi pour le développement de leur pratique enseignante. Cette interrogation m'est venue en lien avec des observations répétées des étudiants en stage et dans les cours de didactique. J'ai en effet souvent noté dans la pratique même des stagiaires qu'ils centrent leur regard sur la réussite ou la non-réussite des élèves aux tâches offertes sans revenir sur les apprentissages en jeu. On observe la même chose dans les cours lorsqu'on engage les étudiants dans l'analyse de productions d'élèves et qu'on leur demande de se prononcer spontanément sur la compréhension de ces élèves. Cette centration sur la réussite à la tâche n'est pas étonnante, puisqu'il s'agit là de l'un des premiers indices observables, cependant, il ne doit pas être vu comme le seul ni le plus révélateur. Comme formateur, on souhaitera amener les étudiants à aller au-delà d'une réussite ou d'un échec à une tâche et entreprendre une analyse des conduites des élèves afin d'enrichir le portrait de leur compréhension. Sans impliquer que les pratiques universitaires doivent calquer les pratiques du primaire, il me semble que ce travail d'analyse des conduites des étudiants dans le cadre de l'examen peut être bénéfique non seulement riche pour leur développement mathématique, mais également pour le développement de leur pratique d'enseignement. Mais peut-être est-ce déjà ce qui est fait par le conseiller en mathématiques ou par les ressources professorales qui interviennent dans les cours et les ateliers mathématiques.

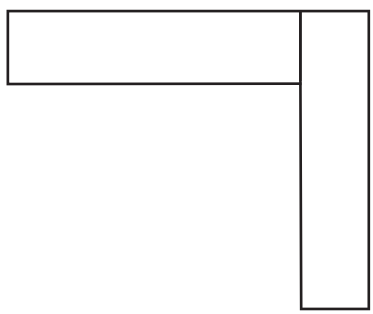
5.3. Incidence sur l'acte d'enseigner les mathématiques chez les étudiants

Tout l'intérêt de cette formation mathématique est d'influencer le développement de l'acte d'enseigner des étudiants. Comme le soulèvent les auteurs, l'analyse du dispositif doit également être menée dans le sens de son incidence sur l'intervention didactique qui s'actualise en situation réelle. À cet égard, les quelques observations rapportées en stage signalent des étudiants plus confiants par rapport aux mathématiques, ce qui représente un apport intéressant du dispositif. D'autres relèvent aussi que des étudiants ne sont pas nécessairement plus compétents dans les tâches professionnelles relevant de l'acte d'enseigner. La maîtrise encore fragile de certains contenus est sans doute l'un des facteurs, mais à mon avis pas le seul. Le cadre de la didactique professionnelle et l'idée qui y est développée de la conceptualisation dans l'action des situations de travail offrent un éclairage intéressant à cet égard. Cette perspective laisse entrevoir un processus de construction de significations déterminées par les situations professionnelles telles qu'elles se présentent en contexte réel. Ainsi, en plus de se construire un modèle cognitif des phénomènes d'enseignement-apprentissage des mathématiques qui articule savoirs mathématiques et didactiques, le praticien développe un modèle opératif constitué de concepts pertinents pour l'action en situation (Van der Maren et Poirier, 2007 ; Pastré, Mayen et Vergnaud, 2006). En s'inscrivant dans une telle perspective, il y a l'idée que le développement chez les étudiants de compétences mathématiques n'est pas posé comme une fin en soi, mais comme l'une des dimensions engagées dans la construction de significations pour l'action. Les savoirs mathématiques doivent être reconstruits pour servir la réalisation de tâches professionnelles dans le cadre de situations professionnelles bien précises. L'articulation des formations mathématique et didactique prônée par l'équipe de l'UQAR à travers leur dispositif, de même que les liens entretenus avec les choix ministériels en matière d'acte professionnel, me semblent relever d'une perspective semblable.

Pour illustrer mon propos, je soumets l'exemple suivant, issu de ma recherche doctorale. La stagiaire a préparé une séance d'enseignement-apprentissage au sujet de la mesure de longueur pour ses élèves de première année (premier cycle). La situation d'apprentissage dans laquelle elle souhaite engager les élèves fait intervenir une tâche de mesure de longueur d'un chemin. Elle fait donc le choix d'unités de longueur étalon – des réglettes Cuisinaire – et elle produit également le tracé des chemins à mesurer. Ce tracé prend la forme d'une surface ayant la largeur d'une réglette Cuisinaire, et la longueur de plusieurs réglettes juxtaposées de manière non rectiligne. En cours de pilotage en classe, avant de lancer les élèves dans la tâche, elle fait un bref rappel de la technique de mesurage vue dans des leçons antérieures. Or le mesurage qu'elle offre en modelage aux élèves s'apparente plus à une mesure d'aire qu'à une mesure de longueur, puisqu'elle couvre la surface du chemin en y déposant l'une des faces des réglettes, comme suit :



EXEMPLE DE PORTION DE CHEMIN



PLACEMENT DES RÉGLETTES

En rencontre de rétroaction, à travers les discussions avec l'enseignante-associée et la superviseure-didacticienne, la stagiaire convient de son erreur. Est-ce qu'un examen mathématique aurait débusqué une fragilité conceptuelle chez cette étudiante ? Probablement. Est-ce qu'une démarche de consolidation des connaissances mathématiques aurait contribué à de meilleurs choix de matériel pour cette séance ? Peut-être. On peut également envisager la question sous l'angle d'une tâche professionnelle et de l'activité praticienne pertinente pour la réaliser. Cela signifie d'engager l'étudiante dans une réinterprétation d'un point de vue mathématique des choix didactiques qu'elle a faits. Ainsi, les concepts et les processus liés à la mesure de longueur acquièrent de nouvelles significations dans le cadre des tâches de planification et de pilotage de situations d'apprentissage : faire faire des activités de mesurage à ses élèves dans le but d'influencer le développement d'une compréhension du processus de mesure demande d'utiliser, par exemple, une unité étalon ; l'objet qui est utilisé pour jouer le rôle d'unité étalon doit être envisagé selon la grandeur en jeu, ici la longueur ; cela influence également son utilisation dans le mesurage ; l'élaboration d'un tracé pour représenter la longueur à mesurer nécessitera quant à elle de faire un choix entre l'idée de longueur de segment ou de distance. Qu'est-ce qui est le plus approprié comme unité de longueur étalon et comme longueur à mesurer pour les élèves de première année, compte tenu de la progression des apprentissages ? On le voit, les tâches professionnelles de planification et de pilotage de situations d'enseignement-apprentissage de la mesure de longueur en première année amènent un questionnement particulier sur le savoir mathématique en jeu.

6. Conclusion

En conclusion, le dispositif de formation mathématique mis en place à l'UQAR m'apparaît fort intéressant pour le changement de culture du métier qu'il peut entraîner ; pour l'explicitation des attentes et son incidence sur la cohérence des interventions ; pour les possibilités qu'il offre aux étudiants de réguler leurs apprentissages mathématiques. Comme le soulève l'équipe, l'incidence du dispositif sur la pratique enseignante est l'élément central. À ce sujet, il m'apparaît important de se questionner sur les nouvelles significations mathématiques qui se développent dans le cadre de l'exercice du métier. En parlant du profil de l'enseignant de mathématiques au primaire au tout début de leur texte, les auteurs posent les questions suivantes : Qu'est-ce qui le distingue ? Que doit-il savoir ? Que doit-il maîtriser ? Que doit-il enseigner ? Ces interrogations m'apparaissent tout à fait pertinentes, et les aborder à partir de perspectives liées au développement du métier enseignant me semble très prometteur.

SECTION 6

- **Préambule à la section 6**
  Note des directeurs du collectif

- **Texte plénier 6**
  Quelle formation mathématique pour l'enseignant de mathématiques du primaire ?
  Illustrations de recherches et de pratiques
  Helena P. Osana et Vanessa Rayner

- **Réaction 1 au texte d'Helena P. Osana et de Vanessa Rayner**
  De l'ancien élève à l'enseignant
  Quel parcours ?
  Lucie DeBlois

- **Réaction 2 au texte d'Helena P. Osana et de Vanessa Rayner**
  Former à l'enseignement des mathématiques au primaire
  Petit éloge de l'artiste
  Jean-François Maheux

Préambule à la section 6

Note des directeurs du collectif

Nous avons décidé de conserver le texte d'H.P. Osana et de V. Rayner dans sa langue originale, soit l'anglais, plutôt que de le traduire en français, et ce, pour plusieurs raisons. Une première raison en est une de contexte, alors que c'est dans ce format que J.-F. Maheux et L. DeBlois l'ont reçu et y ont réagi. Nous avons donc préféré conserver le texte dans sa langue originale, pour permettre au lecteur d'apprécier pleinement les réactions des deux personnes y réagissant. Une autre raison est que la conservation du texte en anglais dépeint une certaine réalité scientifique sur les travaux de formation des enseignants, avec un texte anglophone ancré dans une littérature scientifique anglophone et des réactions francophones ancrées soit dans une littérature francophone ou un mélange des deux. On peut donc y voir un jeu de tensions (productif autant que restrictif) entre les différents cadres théoriques et influences provenant de la didactique des mathématiques ou des *mathematics education*. Une troisième raison, plus pragmatique, est que le texte d'H.P. Osana et de V. Rayner est très riche dans sa forme actuelle, et qu'il y avait un risque qu'une traduction (produite par quelqu'un d'externe) rende peu service aux propos particuliers des auteures, n'aidant alors pas beaucoup la compréhension du texte et des réactions qui le suivent. Cette conservation des langues originales des auteurs, et par le fait même des styles, permet aussi d'illustrer la belle diversité des formateurs au Québec sur les questions de formation des enseignants et de ceux qui s'y intéressent, une diversité autant langagière qu'institutionnelle (universités francophones et anglophones). C'est donc pour toutes ces raisons que le texte d'H.P. Osana et de V. Rayner a été conservé dans sa version originale.

Texte plénier 6

Quelle formation mathématique pour l'enseignant de mathématiques du primaire?

Illustrations de recherches et de pratiques

Helena P. Osana
Department of Education
Concordia University
osana@education.concordia.ca

Vanessa Rayner
Department of Education
Concordia University
v_rayner@education.concordia.ca[1]

1. Introduction

"I was never good at math!" "Math was never my strong suit." "I've avoided math courses for years." Such statements are heard from students in undergraduate elementary mathematics methods courses every semester. As mathematics teacher educators, we know, and they know, that there will be some mathematics to learn, or at least review, in these courses. This generates anxiety and uncertainty because students do not know exactly what is in store for them.

1. We are grateful to Nicole Pitsolantis for her valuable assistance in reviewing the literature and to Allyson Cooperman for the preparation of the manuscript.

What is curious is that many mathematics teacher educators (MTEs) also experience uncertainty – they are often not exactly sure what mathematics content to include in their methods courses (Osana, Sierpinska, Bobos, and Kelecsenyi, 2010). Moreover, there is a lack of consensus in the practitioner and research communities about the types of mathematical knowledge that should be emphasized in the mathematical training of pre-service teachers. In this chapter, we address this issue by discussing (a) research studies focused on supporting the mathematical development of pre-service primary teachers, and (b) the mathematics that one MTE – the first author of this chapter – highlights as foundational for the preparation of elementary mathematics teachers in her own methods courses. We complete the chapter with a brief discussion of the implications of the research for the mathematical development of future teachers. In other words, we make an attempt to take at bird's eye view of the research and see how it converges onto a set of general principles for mathematics teacher preparation. Here we revisit the first author's course and outline the ways in which her practice aligns with these principles as well as how her courses deviate from them. While merely an illustration of one course, we argue that the reader can treat our description as a context in which to better understand the state of pre-service teachers' mathematical knowledge, what they need to learn to become effective mathematics teachers, and how they can best be prepared to come to know this mathematics in the context of methods courses.

2. Supporting the Mathematical Development of Pre-service Teachers

Here we address the question of what approaches have been taken to support the development of pre-service teachers' subject-matter knowledge as well as other aspects of mathematical knowledge for teachers. No systematic observations, analyses, comparisons, or evaluations have yet been conducted of the types of approaches or tasks used by MTEs in mathematics methods courses (Osana and Sierpinska, 2011), which makes it difficult for us to get a feel for what is often or even typically done in teacher training programs with respect to the mathematical preparation of prospective teachers. Nevertheless, from the literature of self-described practices, there appear to be two primary approaches taken by MTEs to "deliver" what they believe are the requisite knowledge bases to prospective teachers, namely, through the use of (a) tasks that actively engage pre-service teachers in the (re)construction of their own mathematical understandings and, by extension, those of children (we call these "student-centred tasks"), and (b) tasks that simulate, to a greater or less extent, what teachers actually do in the classroom (called "professional learning tasks" by Silver, Clark, Ghousseini, Charlambous, and Sealy, 2007).

Student-centred tasks focus on "unraveling" the knowledge that pre-service teachers have compiled and consolidated (Anderson, 1995) through their own years of schooling, including secondary and beyond. The goal is for pre-service teachers to reconstruct their own understandings of the mathematics curriculum by focusing on central conceptual underpinnings and by building on what they already know informally about the subject, in many ways experiencing some of the developmental milestones that children themselves undergo as they grow in their mathematical understanding. Many of these tasks are also models of the types of tasks that can be used with children in elementary classrooms. Previous research has shown that tasks of this variety have been shown to reconceptualize pre-service teachers' knowledge of the subject (*e.g.*, McClain, 2003; Yackel, Underwood, and Elias, 2007), broaden their views of the learner (*e.g.*, Chapman, 2007; McClain, 2003), and engender an awareness of their level of mathematical sophistication (*e.g.*, Christou, Mousoulides, Pittalis, and Pitta-Pantazi, 2005; Toluk-Ulçar, 2009).

In addition to the focus on teacher knowledge, Ball and Forzani (2009) have proposed that teacher preparation should emphasize the "work of teaching," or the central tasks in which teachers themselves engage in to promote student learning. Indeed, based on their argument that teaching qualifies as "unnatural work," Ball and Forzani suggest that it is important that MTEs equip, or train, pre-service teachers with the skills integral to performing common teaching activities that go beyond our informal notion of what it means to teach or help another individual understand something. The focus on the work of teaching might necessitate, therefore, using tasks in methods courses that closely resemble daily teaching activities and allow for different aspects of teaching knowledge (called "professional learning tasks" by Silver *et al.,* 2007) to be applied. Such tasks encompass a variety of formats of pedagogic engagement and prepare pre-service teachers for the various types of experiences (*e.g.*, lesson and task analysis; Lloyd and Behm, 2005; Prestage and Perks, 2007) and interactions involved in teaching (*e.g.*, individual and whole class student-teacher interactions; Jenkins, 2010; Moyer and Milewicz, 2002; Star and Strickland, 2007; Stockero, 2008). Tasks in general are designed to develop a specific target knowledge base or a combination of several, in complex ways, sometimes through reflection, collaboration, or by engaging in teaching actions (Watson and Mason, 2007), thereby bridging the (possibly) theoretically distinct domains of teacher knowledge rather than treating them separately. Teacher educators' interest in incorporating these types of tasks in methods courses and in reporting associated challenges is evident in the literature (see *Journal of Mathematics Teacher Education*, special issue, December 2007).

2.1. Student-Centred Tasks

In an effort to address the weak and fragmented state of pre-service teachers' mathematical knowledge, some scholars have proposed to incorporate tasks that will refresh and deepen their understanding of fundamental elementary mathematics topics. To do so, however, is not as easy as it would seem. Indeed, even with the most foundational topics (*e.g.*, place value, number sense), pre-service teachers soon realize that the teaching and learning of elementary mathematics is not so elementary. Take, for example, the topic of place value. Although pre-service teachers' general understanding of this topic is functional at best, it soon becomes clear, as they engage in tasks that require them to apply their knowledge of place value in a novel way, that there are certain concepts and procedures tied to this subject that have eluded them (see, for example, Osana, Rayner, Desrosiers, and Lévesque, 2007).

Two studies in particular, McClain (2003) and Yackel *et al.* (2007), have illustrated this point in their reports on using the Candy Factory task with pre-service teachers. This particular task on place value and multidigit operations was initially developed for elementary students (*i.e.*, Base 10) and slightly modified when used with pre-service teachers (*i.e.*, Base 8). Modifying this task builds on pre-service teachers' knowledge of Base 10 and operating in Base 10 while forcing them to draw on knowledge of the conceptual underpinnings of place value as opposed to a superficial understanding of standard multidigit algorithms. In both studies, the Candy

Factory task not only strengthened pre-service teachers' understanding of place value and its role in multidigit operations, but also allowed them to re-live the experience of learning about place value. The learning outcomes that emerged, then, not only promoted pre-service teachers' subject-matter knowledge of place value but also widened their perspective on what it means for young students to learn about place value, the way the learning process unfolds, and the challenges they may encounter.

This eye-opening experience is particularly important as the mathematics becomes increasingly complex. Topics such as fractions carry an additional level of complexity because, unlike the concept of place value, fractions take on different meanings in different contexts (Behr, Harel, Post, and Lesh, 1992). Added to that is the importance for students to understand the notion of the unit, a concept that, if not properly developed, may effect delays in understanding other key fraction concepts (Lamon, 2006).

To meet these challenges, Toluk-Ulçar (2009) examined the effect of integrating *problem posing* in a fractions unit in a mathematics methods course. Specifically, pre-service teachers enrolled in one of two sections of a methods course were given the task to generate word problems using specific fraction number sentences that involved all the operations. Following the task, the pre-service teachers discussed their solutions with the class to determine whether the problems were logically sound and solvable. The pre-service teachers enrolled in the other section were treated as a control group. The fractions unit in their methods course did not comprise a problem-posing task; rather, these pre-service teachers were asked to prepare lesson plans that they would subsequently "teach" to their peers. For both groups, the ability to procedurally calculate the answer to the number sentences, generate a word problem, represent the solution pictorially, and justify their response was compared before and after the fractions unit.

In general, the pre-service teachers in the problem-posing group experienced substantial gains in their mathematical knowledge for teaching operations with fractions compared to the pre-service teachers in the control group. While it is understandable that, compared to the control group, the pre-service teachers in the problem-posing group would demonstrate a greater shift in their ability to generate word problems, the differential gains on the other measures (*i.e.*, representing operations with fractions and justifying the response) are noteworthy. Indeed, unlike the problem-posing group, the pre-service teachers who did not perform the task demonstrated very little change in their knowledge of flexibly representing and explaining operations with fractions from pre-test to post-test.

In addition to problem posing, tasks centred on *problem solving* have also been reported as a vehicle for promoting knowledge of mathematics content and the self, the learner, the curriculum, and instruction (Chapman, 2007). While these learning outcomes speak to the pedagogical benefits of problem-solving tasks, results from Ben-Chaim, Keret, and Ilany (2007) also demonstrated positive outcomes from a content-focused perspective. The results comparing the pre-test performance (*i.e.*, 45%) to the post-test performance (*i.e.*, 90%), in particular, supported the claim that the problem-solving task improved the pre-service teachers' proportional reasoning skills. Taken together, these results highlight the benefits and consequences of including problem-posing and problem-solving tasks to develop skills that some believe are critical to effective mathematics teaching.

2.2. Professional Learning Tasks

Although some view the development of pedagogical skills and knowledge as an outcome of teaching experience, Ball and Forzani (2009) suggested that it is important to provide opportunities for pre-service teachers to develop general pedagogical skills that could be adapted to a variety of teaching situations. Professional learning tasks typically involve activities centred on the inquiry of teachers' "artifacts of practice," which include curriculum documents and textbooks (*e.g.*, Lloyd and Behm, 2005), videos of teaching and learning situations (*e.g.*, Wang and Hartley, 2003), and examples of student work (*e.g.*, Crespo 2000; Van Dooren, Verschaffel, and Onghena, 2002). At a quick glance, it appears that professional learning tasks are not in the same domain as mathematical knowledge, but a more careful examination allows one to see how many such tasks are grounded in mathematical understanding.

Consider, for instance, the job of selecting tasks used with elementary students during mathematics instruction. It has been shown that the level of student mathematical engagement in a task is, in part, determined by the cognitive complexity of the task (Campbell, 1996; Silver and Stein, 1996; Stein and Smith, 1998). Although there are other factors that influence students' cognitive engagement, it follows that a good starting point for engaging students in high-level mathematical thinking is to examine the cognitive complexity of a given task and determine whether the underlying structure (*i.e.,* the mathematical structure) of the task could support the desired learning outcomes. The results from Osana, Lacroix, Tucker, and Desrosiers (2006) and Stephens (2008) demonstrate that pre-service teachers are not equipped in this regard and show a tendency to evaluate tasks based on superficial characteristics (*e.g.*, the number of words used to describe the task or the presence or absence of letters in the case of algebra).

Based on these results, tasks that would improve pre-service teachers' analytic abilities (Prestage and Perks, 2007) and their understanding of ways to extend tasks (Bloom, 2007) are clearly warranted. Although we were unable to locate any empirical evidence supporting any specific interventions that aim to improve pre-service teachers' pedagogical task knowledge (Liljedahl, Chernoff, and Zazkis, 2007), Prestage and Perks (2007) proposed a model of a task aimed to enhance pre-service teachers' skills in *task selection and modification*. The model involved three stages. In the first stage, pre-service teachers were asked to identify: (a) the learning objectives of the task (*i.e.*, the mathematics); (b) how students would solve the task; and (c) the ways in which the teacher could support student learning. The discussion pertaining to the third task feature in particular, Prestage and Perks (2007) reported, allowed the pre-service teachers to understand how to support students' initiatives to work through the problem independently. The decision of whether and how much teachers should "tell" their students is an important issue teachers face. The second stage also involved discussion of these three ideas using a modified version of the task (*i.e.*, information was removed and added). In doing so, the pre-service teachers considered how the wording and structure of a problem constrains or broadens the decision-making options for the student and the teacher. In the final stage, the pre-service teachers were asked to modify the problem according to their needs to explore the mathematics of the problem more deeply and reflect on the progression on mathematical thinking. Prestage and Perks (2007) concluded that this task provided the pre-service teachers with the opportunity to develop general skills in task modification which, in the classroom, would allow them to flexibly build on problems on the fly in order to make the necessary connections to the curriculum and promote student understanding.

Additional pedagogical skills have been promoted by tasks that involve the analysis of (a) student errors (Tirosh, 2000), (b) classroom practice (Hiebert, Morris, Berk, and Jansen, 2007; Star and Strickland, 2007), and (c) student discourse (Jenkins, 2010; Moyer and Milewicz, 2002), all of which critically depends, for Ball, Thames, and Phelps (2008), on the teachers' mathematical knowledge. The use of video has increasingly become a popular context for engaging pre-service teachers in these types of tasks to develop Sherin and Han's (2004) notion of "professional vision," or a way of understanding events that are specific to a profession. In particular, *video-based tasks* provide pre-service teachers with opportunities to reflect on and share observations of a variety of teaching approaches, student learning, and pedagogical settings (Star and Strickland, 2007).

Similar to their task analysis skills, however, pre-service teachers' skills in observing the classroom are not adequately developed at the beginning of their teacher training. Star and Strickland (2007), for instance, used classroom videos to examine pre-service teachers' skills in observing and recalling classroom events. Following a classroom video, the pre-service teachers were asked specific questions about the classroom's environment, management, mathematics content, tasks, and communication. The percentage of accuracy of observing events for each category ranged from 44% (for classroom environment) to 80% (for classroom management). Although it may appear that their observation skills were adequate on some categories of classroom events given the range of performance, the mean percentages for the remaining three categories were relatively low (ranging from 54% to 65%).

The use of video has not been restricted to describing the nature of pre-service teachers' observation skills. Wang and Hartley's (2003) review of using video in teacher education revealed that video-based tasks were linked to improved observation skills. Building on this research, Stockero (2008) demonstrated that the video-based curriculum enhanced pre-service teachers' reflective thinking along with other key pedagogical skills such as attending to student thinking. More specifically, the integration of video-based tasks in the curriculum broadened teachers' understanding on how teaching affects student thinking and the different approaches used to interpret student thinking.

Along these lines, another type of task aimed to focus pre-service teachers' attention on children's mathematical thinking is an *interview*. For example, Moyer and Milewicz (2002) used the interview task to examine the sophistication of pre-service teachers' questioning strategies. Teachers often use questions with students because if used effectively, questioning can be a powerful tool to identify the quality of a student's mathematical thinking (Ginsburg, Jacobs, and Lopez, 1998; Moyer and Milewicz, 2002). It follows, then, that tasks that aim to develop pre-service teachers' questioning skills would play an important role in helping them to understand how they can, as teachers, assess and evaluate student learning.

Moyer and Milewicz's (2002) investigation revealed the following categories of questions: (a) checklisting, or moving from one question to the next without attending to the child's response; (b) instructing rather than assessing; and (c) probing or follow-up questions. Despite the fact that the pre-service teachers engaged in several interviews with children and received instruction on questioning strategies, Moyer and Milewicz concluded that the use of less effective questioning techniques was related to their lack of experience interacting with children in this way. That is, their questioning strategy followed the student's behaviour (*e.g.*, moving on to another question when the child seemed bored) whereas a more experienced educator with competent questioning techniques would choose questions aligned with the student's verbal response.

Although the results may imply that the interview task was not a very effective method for developing questioning skills, the probing or follow-up questions category that was observed suggests that the pre-service teachers were on the right track to becoming skilled questioners. For this reason, Moyer and Milewicz (2002) maintained that the interview task was informative for the pre-service teachers, giving them a preview, in a structured way, of the complex and fast-paced questioning that takes place in the classroom.

These two primary approaches to supporting the mathematical development of pre-service teachers (characterized here with tasks that are *student-centred* and those that involve *professional learning*) are well represented in the literature, but a great deal of variability nevertheless exists among MTEs with respect to the ways in which the approaches are incorporated in methods courses (Osana and Sierpinska, 2011). The remainder of the chapter describes the efforts of one MTE (first author) to engage her student teachers in both student-centred and professional learning tasks in her elementary mathematics methods courses. We focus on the development of the pre-service teachers' mathematical knowledge as well as on their ability to apply subject-matter understanding in the context of typical teaching tasks, such as interpreting student thinking and creating tasks that target specific learning objectives.

3. A Description of the Methods Courses of One Mathematics Teacher Educator

We now turn to the description of the elementary mathematics methods courses designed and implemented by the first author. We begin by providing an overview of both the institutional context for the courses and the theoretical frameworks that have been most influential in their design and implementation. We then move on to a detailed description of five concrete examples used in these courses. In the first three examples, the learning objective is to develop student teachers' subject-matter knowledge that will necessarily be invoked in their future practices. In the fourth and fifth examples, the learning objective is other forms of Mathematical Knowledge for Teaching (Ball *et al.,* 2008) that have (possibly) closer ties to pedagogical practice; as we explain, however, these forms are dependent on key aspects of subject-matter knowledge.

In the five examples, we address (a) the mathematical topics that are covered in the two methods courses as a function of the targeted mathematical *knowledge bases* that form the learning objectives for the students, and (b) the *structuring frameworks* that student teachers are expected to apply as they reflect on course content. These structuring frameworks can be seen as the "tools" that teachers use to make decisions as they engage in a variety of teaching tasks, such as evaluating student work, communicating with parents and other teachers, interpreting curricular materials, and using models to explain mathematical concepts. In some cases, we provide some anecdotal evidence of the impact of these teacher education practices on student teachers' mathematical thinking. Systematic and comprehensive analyses would be required to make more definitive statements in this regard, but we argue that a close look at a few students' thinking will provide further illustration of the types of knowledge and skills that are necessary for their future as mathematics teachers. Finally, in this section, we will use the first-person "I" when describing the methods course as designed and implemented by the first author.

3.1. Institutional Context

The two mathematics methods courses described here are undergraduate courses in the teacher preparation program at Concordia University. The first, called Teaching Mathematics I, is always taught in the fall semester; the second, Teaching Mathematics II, is offered in the winter of every academic year. The first course focuses on counting and whole-number operations, and the second on fractions, decimals, ratio and proportion, geometry, and measurement. Both courses are compulsory for all students in the program at the university, which is a four-year undergraduate degree ending with a teaching certificate. Most students take the courses during the second or third year of their program of study, and the majority of them are concurrently placed in an elementary classroom in a local school as one of several internship placements required by the program. The course is not designed to accompany the internship, however. This means, in particular, that there are no classes in either of the two methods courses devoted to preparing students to teach the next day or to analyse what they have done as teachers, or observed in other teachers' classrooms, the day before.

3.2. Theoretical Context

The two theoretical frameworks that have come to guide my practice as an MTE is (a) Ball *et al.*'s (2008) model of MKT, as reported in this book's Chapter 1 by Theis, and (b) Cognitively Guided Instruction (CGI; Carpenter, Fennema, and Franke, 1996), a professional development program for practising mathematics teachers. Even though CGI targets primarily in-service teachers, I nevertheless find it a useful framework for the preparation of future teachers as well, and as such, it receives a great deal of attention in my methods courses. In this section, I provide a brief overview of the CGI program as well as evidence of its effectiveness in the mathematical development of teachers.

Cognitively Guided Instruction (CGI), developed by T. Carpenter and E. Fennema at the University of Wisconsin – Madison (see, *e.g.*, Carpenter *et al.,* 1996; Carpenter, Fennema, Franke, Levi, and Empson, 1999; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang, and Loef, 1989), is a professional development program for elementary mathematics teachers that focuses on providing a theoretically coherent framework for children's knowledge in whole and rational number operations (Carpenter *et al.,* 1999; Empson, 1999) and on supporting teachers as they learn to adopt the framework in the classroom. In CGI workshops, teachers and researchers frequently engage in discussions about the level of sophistication of children's strategies and the ways in which student thinking relates to the structure of word problems. The developers of the program, and other researchers, have evidence demonstrating that students of teachers who participated in CGI professional development performed significantly higher than control groups on word problem solving and arithmetic operations (Carpenter *et al.,* 1989; Villasenor and Kepner, 1993). Furthermore, in terms of teacher knowledge, CGI has shown empirically that knowing about different types of word problems and how the four operations of addition, subtraction, multiplication, and division are related are important in the course of their work with students. The tools teachers appropriate through CGI professional development allows them to generate and maintain productive discussions with their students about the strategies they employ, which is also a key element in their mathematical knowledge for teaching (Carpenter *et al.,* 1996, 1989). For these reasons, among others, I incorporate several of the elements of CGI workshops into my own tasks and interactions with pre-service teachers.

3.3. Addressing Mathematical Knowledge: Five Concrete Examples

3.3.1. Promoting Specialized Content Knowledge (SCK) – Example 1: Numeration and place value

One of the first topics I cover in the first methods course is base numeration systems and the role of place value therein. The students are required to read a chapter from Burris (2005), a mathematics text for elementary teachers, on place value and numeration. The focus of the chapter is on how concepts related to place value serve to explain the common structure of a variety of different base systems. Burris begins the chapter by describing the operations in a candy factory in which candies are packaged by groups of fours. Burris explains, “You and other factory workers have been instructed to never ship more than three of any type of package. You are to replace four units of any type by one unit of a larger type” (p. 72). In a series of examples and exercises, Burris uses the candy factory context to describe the structure of the base-four system (namely, that the value of the digits in a number increase by a factor of four) and how place value plays a key role in the regrouping requirements of addition and subtraction in the base-four system. In later sections of the chapter, she makes the connection between the concepts revealed by the candy factory example and other numeration systems, base systems (including base ten) and non-base systems, including roman numerals.

I consider the content in this chapter as a critical component in the course because the pre-service teachers, although possessing relatively sound procedural knowledge of whole number computation, are generally not able to explain why algorithms work. I have noticed that many lack fundamental knowledge of the structure of numbers and the way in which place value figures in computational strategies, whether the strategies are idiosyncratic, as invented by young children, or standard, such as those used by the pre-service teachers themselves. This mathematical knowledge is necessary for them when they view video-clips of, for example, children combining tens and ones to solve a multi-digit addition problem; connecting the mathematical principles of children’s strategies to the place value concepts inherent in the standard algorithm appears important.

Further, the related concept of regrouping is, at least from a conceptual viewpoint, particularly foreign to pre-service teachers. The notion that regrouping from the hundreds to the tens place in subtraction involves trading one group of 100 into 10 groups of 10 is an idea that pre-service teachers have often never previously examined in any meaningful way. To them, one hundred is always 100 units; pre-service teachers rarely view 100 as 10 groups of 10, regardless of the computation at hand. By dedicating a portion of the course to the multiplicative relationship between the values represented by the digits in the various positions in a given number, I maintain that pre-service teachers will be better equipped to understand the conceptual basis of the standard algorithm, which in turn will provide them with the tools to "see the mathematics" in children's solutions and to guide children toward understanding the conceptual basis of a variety of problem-solving strategies.

To facilitate the students' understanding of the mathematical concepts that underlie place value and numeration systems, I designed an in-class activity, called the "Beans Activity," that requires students to develop concepts of place value and how they are implicated in whole number computation, but in a base four context. The task contained a series of seven activities that is sequenced from the concrete to semi-abstract to abstract (Freudenthal, 1983). Students are required to work in groups of 4 or 5. All students had received a handout on which the series of activities were described. In Activity 1, the students were given small bags that contained a predetermined number of beans. They were required to group the beans into groups of 16, 4, and 1 and to record the number of beans on the handout using base-four notation. In Activity 2, the students were required to do the same thing, but this time record their counts on base-four place value mats that were provided in the handout (these mats contained boxes in which to record the number of groups of 1s, 4s, 16s, and 64s). For Activity 3, the students were provided with base-four blocks, which were analogous to base-ten blocks and constructed ahead of time with Unifix cubes (the sets of blocks contained individual blocks, "longs" consisting of 4 blocks, "flats" consisting of blocks in a 4×4 array, and "big cubes" measuring $4 \times 4 \times 4$ cubes). The activity required the students to represent numbers in base four with these models. Activity 5 required the students to translate from base four to base ten and vice versa. In Activity 6, the students were required to use their base-four blocks to rename base-four numbers in a variety of specified ways. For example, they were asked to rename 32_{four} using exactly 3 longs, exactly 2 longs, exactly 1 long, and using no longs at all. This activity was designed to help the students develop flexibility with number representation, which is necessary in the regrouping process. Finally, Activity 7 directed the students to the exercises in the Burris chapter to consolidate their learning.

The activity lasted almost one entire class session (approximately two hours). At the end of the Beans Activity, I engaged the students in a whole-class discussion that focused on the explicit connections between the base-four and base-ten systems. The discussion included a lecture on four basic principles of base numeration systems: (1) the position of the digit determines its value, (2) the base in question determines a new system, (3) zero is a symbol used to indicate the absence of a quantity, and (4) the additive property can be used to determine the cardinality of the number. I incorporated these principles in the discussion about the structure of numbers and the role of place value in the regrouping process.

3.3.2. Promoting Specialized Content Knowledge (SCK) – Example 2: Models for thinking about multiplication and division

Another key topic covered in my methods courses is multiplicative reasoning. After a unit on addition and subtraction, I spend time on the mathematical relationship between multiplication and division, problem types for the two operations, and children's thinking about multiplicative structures. I begin the unit by emphasizing the "equal groups" structure of a multiplicative situation (*e.g.*, There are 4 baskets with 5 apples in each. How many apples are there in all?). Multiplication is invoked if the total number of items is unknown; division is invoked if one of the other two variables is unknown. Because teachers need forms of mathematical knowledge that are unique to the tasks of teaching, there are two prominent "views" of division that I emphasize in the course: partitive division and measurement division. The partitive view of division is the case where the number in each group is unknown (*e.g.*, There are 20 apples on the counter with an equal number of apples in 4 baskets. How many apples are in each basket?). The measurement view is the case where the number of groups is unknown (*e.g.*, "There are 20 apples in baskets with 4 apples in each. How many baskets of apples are on the counter?").

The distinction between these two forms of division (*i.e.*, partitive and measurement division) is important for teachers because the two forms are invoked while performing a number of tasks in the mathematics classroom. For example, awareness of the structure of division problems can help a teacher interpret a child's strategies for solving them and assist the child in ways that are consistent with the situation described in the problems, thereby encouraging meaningful explorations with mathematical relationships. In addition, depending on the context and knowledge of the child, partitive and measurement division problems can differ in terms of their difficulty. For example, a child who uses skip counting to solve division problems would have considerably more difficulty with partitive division problems because the number to skip by is unknown – for the above partitive division problem for 20 ÷ 4, for example, a child using a skip counting strategy would need to make an initial guess as to how many apples were in each basket. He might say, "Two, four, six, eight" while lifting a finger with each count. Realizing there are more than 8 apples, the child would need to revise his guess. He might then skip count by another quantity until realizing that skip counting by 5s would yield the correct number of apples altogether (*e.g.*, "5, 10, 15, 20. Right. There are 5 apples in each basket."). This is in stark contrast to solving 20 ÷ 4 viewed from the measurement perspective. Knowing that there are 4 apples in each group allows a child to skip count by a known quantity (*i.e.*, 4), and after 5 counts would get to the total number of items (*i.e.*, 20). The number of fingers raised (*i.e.*, 5) would indicate the number of groups. Finally, various interpretations of division will eventually assist children in reasoning conceptually through the mathematics they will encounter in future grades. A partitive interpretation will help students make sense of the standard division algorithm, for example, which can be illustrated by concretely distributing selected quantities to a given number of groups.

The three basic multiplicative structures (*i.e.*, multiplication, partitive division, measurement division) are described in Carpenter *et al.* (1999), one of the required texts for the first of my methods courses. The lecture I provide on the topic hinges on the equal groups structure of multiplication and division. At the beginning of the lecture, I introduce the students to the model presented in Figure 1.

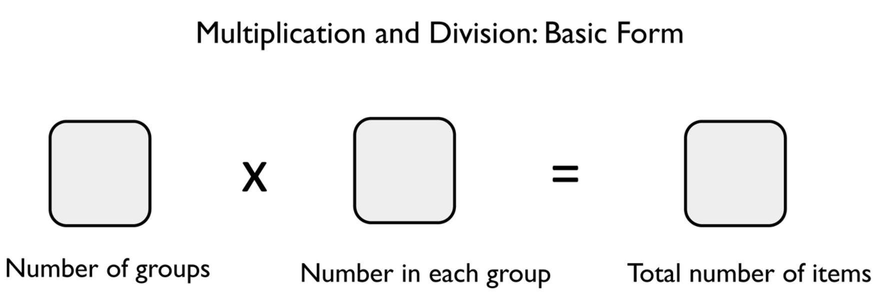


FIGURE 1
MODEL FOR MULTIPLICATION AND DIVISION PRESENTED DURING LECTURE

To illustrate the use of the model, I begin by showing students how to analyse word problems that involve discrete objects (called Grouping/Partitioning problems by Carpenter *et al.,* 1999), which are relatively easily represented with counters. I present one such problem in which the total number of items is unknown (*e.g.*, Lin has 6 boxes of pens. Each box contains 8 pens. How many pens does she have?); I then ask the students to identify what is known in the problem and what is unknown, after which we identify the structure of the problem as multiplication. In the same way, and with specific examples, I engage the students in discussions about one partitive division and one measurement division problem.

Later in the lecture, I demonstrate the use of the model for problems in three additional contexts described in Carpenter *et al.* (1999): rate, price, and multiplicative comparison. Rate problems involve quantities that change over time but remain in constant ratio (*e.g.*, Brad is driving 20 km/hour. He's driving to a small town outside of Montreal, 40 km away. How many hours will it take him to get there?). Other problems involve price, which, according to Carpenter *et al.*, constitute a special kind of rate problem (*e.g.*, Lee makes 10 jars of raspberry preserves and sells them all. Lee made $50. How much did each jar sell for?). Still other problems involve multiplicative comparisons, in which the number of groups is a scalar quantity (*e.g.*, "three times as many") that expresses the relative magnitude of one item compared to another. An example of a multiplicative comparison-partitive division problem is, "Louis bought 32 acres of land. He bought 4 times as many as Russell did. How many acres of land did Russell buy?" Although these four contexts (grouping/partitioning, rate, price, multiplicative comparison) illustrate the variety of problem types in school mathematics, the problems I use during the lecture and in the activity that follows can still be classified according to their basic structure – either multiplication, partitive division, or measurement division – which is my primary learning objective for my students in this section of the course.

As an activity to complete outside the class, I provide students with 33 word problems that involve all three problem types (multiplication, partitive division, and measurement division) across the four contexts described above. The task for the students is to sort the problems according to their problem structure. This activity is designed to support students' consolidation of the content and the reasoning behind their classifications is reviewed in a subsequent lecture.

3.3.3. Promoting Specialized Content Knowledge (SCK). Example 3: Fractions and operations with fractions

Considerable empirical evidence reveals the difficulties practising and prospective teachers have with fractions and other representations of rational numbers (*e.g.*, Leopard, 2008; Newton, 2008; Osana and Royea, in press; Tirosh, 2000; Wearne and Hiebert, 1988), and my own experience working with pre-service teachers underscores just how deep their misconceptions run. As a result, in the second of my method courses, I spend several weeks covering various aspects of rational numbers, four of which focus on fractions alone. In the four-week fractions unit, I hold a number of learning objectives for my students: the mathematical concepts at the core of rational numbers and the conceptual basis for fractions procedures, different ways of thinking about operations with fractions, children's thinking about fractions and strategies they use to solve problems, and the relative difficulty of fractions problems, with a view to understanding appropriate scopes and sequences of fractions lessons. In this section, I describe the first two weeks of the fractions unit where I focus on students' relearning of fractions using their own intuitive knowledge of rational numbers. The approach I take is one of "progressive formalization" (Freudenthal, 1983) in which students' informal knowledge of fractions are elicited and gradually connected, through specially designed tasks and careful interactions, to more formal aspects of the elementary mathematics curriculum. In the unit, students use models or pictures to solve problems in intuitive ways and are gradually coached through the process of replacing concrete tools with more abstract, symbolic means to solve similar problems. Just as children have intuitive notions of equal sharing situations that can be used to build instruction (Empson, 2001), pre-service teachers have concepts about fractions that can be capitalized on during their learning in mathematics methods courses.

To begin the new unit, I presented the students with 18 fractions story problems on index cards. I asked the students to work in small groups to find solutions to the problems by drawing pictures to represent relevant quantities and the relationships among them. The set contained equal sharing problems, as well as situations that involved adding, subtracting, multiplying, and dividing fractional quantities. Six of these problems, two of which were used by Empson (1995), are presented in Figure 2.

Problem 1.	Eight children share 6 pounds of clay for a class project. The teacher wants them to share the clay evenly. How many pounds of clay does each child get?
Problem 2.	You have 3 pans, each with 4/5 of a pizza. How much pizza do you have?
Problem 3.	Six children have ordered blueberry pancakes at a restaurant. The waiter brings 8 pancakes to their table. If the children share the pancakes evenly, how much can each child have?
Problem 4.	Aileen went to a party and took 3/4 of a cake back home with her. The next day, she noticed that someone had eaten half of what she brought back. How much of the whole cake was eaten?
Problem 5.	In art class, at one table 4 students were sharing 3 containers of clay so that everyone got the same amount. At another table, 8 students were sharing 6 containers of clay, also split evenly. At which table does a child get more clay?
Problem 6.	Marina has to read 12 pages in her English book for homework. If she reads one and 1/3 of a page a day, how many days will it take her to finish her English homework?

FIGURE 2

SIX PROBLEMS FROM THE SET OF PROBLEMS USED IN THE CLASS ACTIVITY

The students spent approximately three hours of class time solving the problems in their small groups. I circulated the room and assisted the students in reasoning through their solutions, pointing out at the same time fundamental fractions concepts that they either were or should have been using. Eight fundamental fractions concepts were highlighted during my interactions with the students; they are listed in Figure 3. By exploring and identifying these big ideas about fractions in their own work, pre-service teachers can be exposed to the rudimentary concepts of rational numbers that are not made obvious in the high-school or university mathematics courses they previously took.

At the end of the small-group activity, I gathered the students' solutions and scanned them. In subsequent classes, I projected their solutions to illustrate how fundamental fractions concepts lie at the heart of solving problems involving fractional quantities. The students' own solutions were also used in a lecture on the conceptual rationales for standard fractions algorithms. In all classes in the fractions unit, I display prominently the eight fundamental fractions concepts on the projector: together, these concepts serve as a structuring framework for the analysis of children's thinking as well as a mathematical foundation for understanding the standard fractions algorithms.

1. Wholes can be divided into parts
2. Parts have to be the same size
3. Part is smaller than the whole
4. The size of the part is based on the size of the unit
5. Fractions are expressed in terms of the original unit
6. Parts can be combined to form wholes
7. Parts (fractional units) can be combined *no matter how many there are*
8. Each fraction has many equivalent representations

FIGURE 3
FUNDAMENTAL FRACTIONS CONCEPTS

Consider as an example from one implementation of the unit a student's solution to Problem 4, a problem that involves multiplying two fractions less than 1. Many students in my class solved this problem with little trouble, at least using the tools I encouraged them to use in class. In the solution presented in Figure 4a, the student used her implicit understanding that 3/8 needed to be *expressed in terms of the original unit*, which was *one cake* in this case. This example demonstrates that pre-service teachers may know more about fractions than they think they do; by progressively formalizing the strategies they invented to multiply fractions, I was able to show them how the concepts inherent in their solutions are featured in the standard multiplication procedure. More specifically, Figure 4b shows how I illustrated the same solution using a rectangular model, making the multiplication of the numerators and denominators in the standard algorithm more transparent.

Another example involves division with fractions, a topic of notorious difficulty for teachers (Ball, 1990; Tirosh, 2000). One student's solution to Problem 5, a measurement division problem, is presented in Figure 5. I projected this student's drawing in class to highlight the fundamental fractions concepts she used to solve the problem, most specifically the concept that *parts can be combined regardless of how many there are* and the related notion that these larger parts together can be bigger than 1. This example also gave me an opportunity to demonstrate the conceptual justification for the "invert and multiply" algorithm for division with fractions. Partitioning each page into thirds resulted in 36 thirds, which I connected to the 12 × 3 portion of the algorithm. By grouping the thirds into groups of 4 amounted to dividing 12 × 3 by 4, which completes the procedure. I argue that formalizing the students' own intuitive strategies allowed them to connect fundamental fractions concepts to procedures in ways that make the knowledge pedagogically useful, but also to take ownership of the mathematical connections they were making.

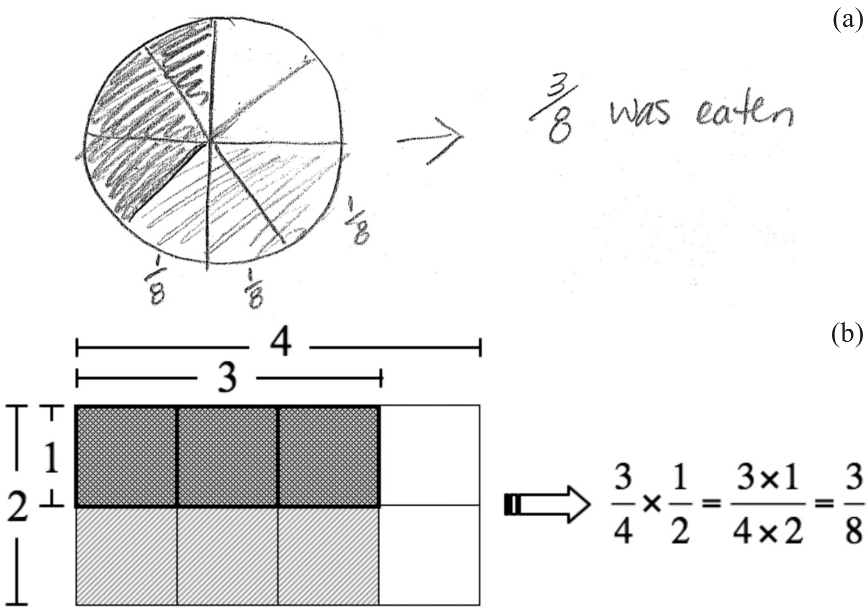


FIGURE 4
A PICTORIAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION TO 3/4 × 1/2. BELOW, A SOLUTION THAT IS ALIGNED WITH THE STANDARD MULTIPLICATION ALGORITHM

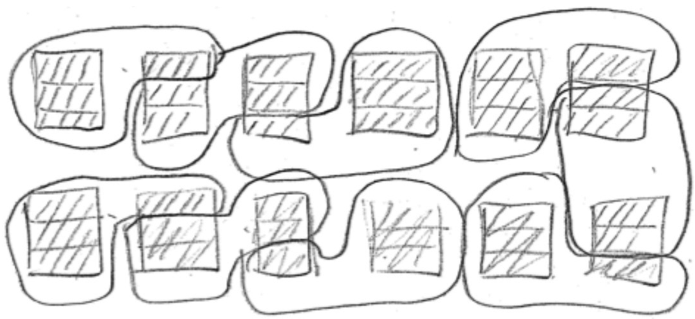


FIGURE 5
ONE PRE-SERVICE TEACHER'S PICTORIAL SOLUTION
TO THE MEASUREMENT DIVISION PROBLEM 12 ÷ 4/3

3.3.4. Promoting other forms of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). Example 4: Children's strategies for multiplication and division

The content of the CGI program is based on several decades of research on the development of children's thinking in mathematics (Carpenter and Moser, 1984). The model of children's mathematical development entails learning as a process of progressive abstraction: when children are encouraged to use personally meaningful strategies to solve problems, they often begin by using concrete methods, which, with time and practice, are then replaced by increasingly sophisticated (*i.e.*, abstract) strategies. One objective for students in CGI classrooms is that they use entirely abstract methods to solve problems that rely on their growing understanding of how numbers work.

At first, children's strategies are governed by the structure of the problem and involve concretely modeling the objects and actions in it. For example, in solving the multiplication problem, "Miranda has 4 tomato plants in her garden and there are 6 tomatoes on each plant. How many tomatoes does Miranda have in her garden?", a child using a Direct Modeling strategy would typically produce four groups of manipulatives, such as blocks, with 6 blocks in each group. The child would then count the total number of blocks to produce the answer of 24. By solving a variety of problems using *Direct Modeling*, children gradually adopt strategies that are partially abstract, called *Counting* strategies (Carpenter *et al.,* 1999).

In solving the problem above, a child using a Counting strategy would not need to physically represent both sets, but instead use some sort of aid to keep track of necessary counts to find a solution. For example, a child might use her fingers to keep track of the 4 groups of 6 as follows: "OK, there are 6 tomatoes [holding up one finger], 12 [holding up a second finger], 18 [holding up a third finger], 24 [holding up a fourth finger]. Miranda has 24 tomatoes."

Finally, with experience using Counting strategies, children appropriate problem-solving methods that capitalize on their growing conceptual understanding. Such abstract strategies, called *Derived Fact* by Carpenter *et al.* (1999), entail using known facts (often doubles in the case of multiplication and division) as the basis for thinking about the problem solution. Again in the context of the tomato problem above, a child using a Derived Fact strategy might reason, "I know that two sixes are 12, so then 12 and 12 is 24. Miranda has 24 tomatoes." In class, I refer to the pictorial representation of children's development in whole number operations presented in Figure 6.

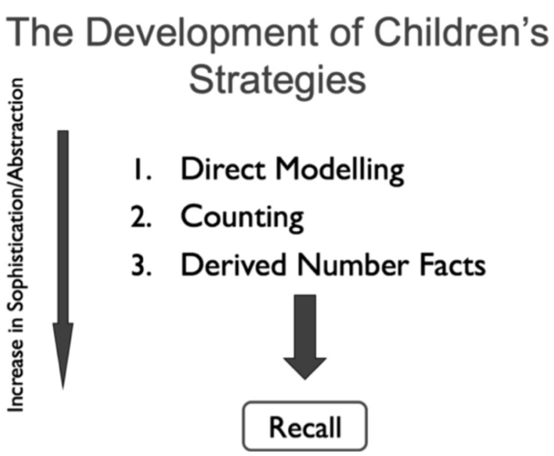


FIGURE 6
A PICTORIAL REPRESENTATION OF THE DEVELOPMENT OF CHILDREN'S THINKING IN WHOLE NUMBER OPERATIONS

This model of children's mathematical development serves as a structuring framework for students to use as they interpret student thinking in multiplication and division. The students' text (Carpenter *et al.,* 1999) provides detailed descriptions of more specific subtypes of strategies within each of the Direct Modeling, Counting, and Derived Fact categories. For example, as children move beyond Direct Modeling to use Counting strategies, they can use ways other than skip counting to keep track of the groups in the problem. Consider the multiplication problem from above: 4 tomato plants with 6 tomatoes on each. As described above, a child might raise a finger to keep track of each basket while skip-counting by 6, but another child might write down the four 6s and use an adding strategy to find the solution, as shown in Figure 7.

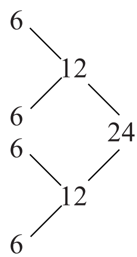


FIGURE 7
AN ADDING STRATEGY USED TO SOLVE THE PROBLEM 4×6

To support my student teachers' understanding of multiplicative structures and to assist them to "see" the mathematics in children's strategies, I engage them in a variety of strategies in and out of class. During class, I show a number of video-clips of children solving multiplication and division word problems. The first set of clips illustrate children from Kindergarten to Grade 2 solving a variety of word problems that involve multiplication, measurement division, and partitive division using Direct Modeling strategies, followed by sets of video-clips of children using Counting and Derived Fact strategies. In addition, for an assignment to be completed outside the class, the students are asked to view a video-clip of a teacher and her students interacting about the solutions to word problems in a classroom setting. There are several objectives to this assignment, some of which are to analyse the teacher's pedagogical actions and suggest possible ways to revise and extend the lesson. Another objective is to analyse the children's solution strategies and to think about how to design future lessons based on their thinking. The pre-service teachers are asked to use their knowledge about the development of student thinking to interpret the strategies seen in the video and then to use their interpretations as a basis for their actions as if they were the teacher herself.

In sum, the type of mathematical knowledge that is centrally implicated here is multiplicative structures, and in particular, the ways in which multiplication and division are related. While the pre-service teachers in my class are asked in this unit to analyse children's solution strategies (in other words, targeting the development of their knowledge of content and students [KCS]), my approach necessitates that they invoke their understanding of multiplicative structures (*i.e.*, mathematical concepts) in their analyses. Indeed, my underlying assumption is that the mathematical understanding of the pre-service teachers in my course is revisited in a variety of student solution contexts and, as such, becomes consolidated and more flexible.

3.3.5. Promoting other forms of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). Example 5: "Scope and sequence" in fractions instruction

As a final example, I describe a subsequent portion of the fractions unit in the second of my mathematics methods courses. Using a similar approach to the unit on whole number multiplication and division from the first semester course, I provide my students with a taxonomy of different fractions problem types. I created the taxonomy myself by borrowing from various sources in the literature on the teaching and learning of fractions (*e.g.*, Empson, 1999; Kribs-Zaleta, 2006) and textbooks for prospective teachers of mathematics (*e.g.*, Reys, Lindquist, Lambdin, and Smith, 2009). The taxonomy is presented in Figure 8.

The taxonomy allows the pre-service teachers to learn about the different situations that involve fractional quantities, but more importantly, as in whole number operations, knowledge about problem types allows teachers to better interpret student solutions. For example, in a problem involving addition with unlike denominators, children will often attempt to partition wholes in ways that make the parts the same size so they can be added. When modeling the solution to the problem 1/2 + 1/6, for example, many children will draw a unit divided into halves and shade in one half, but then realize that the unit would need to be divided into sixths so that three of those (equivalent to 1/2) could then be added to the 1/6, the second quantity presented in the original problem.

FRACTION PROBLEM TYPES
1. Equal Sharing
a. With Remainder, Answer > 1
b. Answer < 1
2. Addition / Subtraction
a. Addition
i. With Like Denominators
ii. With Unlike Denominators
b. Subtraction
i. Of Fraction
ii. With Like Denominators
iii. With Unlike Denominators
3. Multiplication
a. Equal Groups
b. Fraction of Whole Number
c. Fraction of a Fraction
4. Measurement Division

FIGURE 8
A TAXONOMY OF FRACTION PROBLEM TYPES

Compare this to the modeling strategy for the measurement division problem, "Theresa has to read 12 pages in her English book for homework. If she reads 1 1/3 pages a day, how many days will it take her to finish her English homework?" In the child's work presented in Figure 9 below, there was no reason for her to use equivalent fractions to model the solution. The structure of the problem allows a teacher to see how students think about measurement division with fractional quantities and, indeed, how they *should be* thinking about such problem types. Without such knowledge, it would be considerably more difficult to decipher the student's strategy for solving the problem.

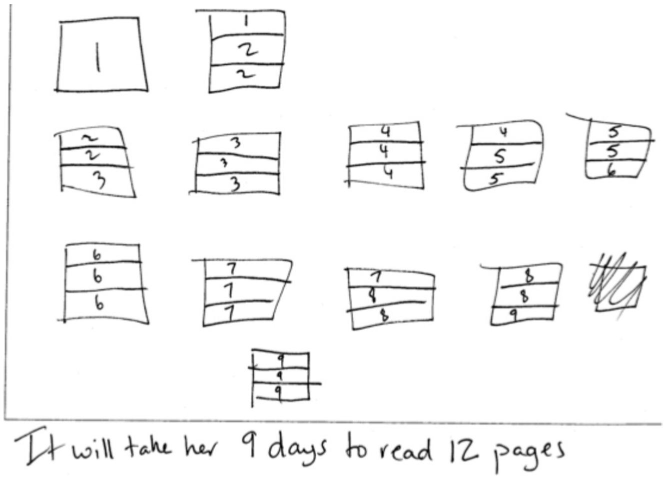


FIGURE 9
A PICTORIAL REPRESENTATION OF A SOLUTION TO 12 ÷ 4/3

Furthermore, awareness of the interplay between student thinking and problem types allows teachers to assess the relative difficulty of fractions problems. In one of my lectures during the fractions unit, I point out how Equal Sharing problems (*i.e.*, partitive division with whole numbers as dividends and divisors; see Problem 1 in Figure 2) are often the most accessible problems for young children (Empson, 1995). Indeed, I show video-clips of first-grade students successfully modeling solutions to such problems. In addition, Equal Sharing problems vary in terms of their difficulty level depending on the numbers in the problem. The most accessible ones are those whose required partitioning actions involve what is known as "repeated halving" (Empson, 1999), a strategy that comes quite naturally to young children (*e.g.*, two chocolate bars to be shared evenly among 2 children). Those that involve partitioning with thirds or fifths are considerably more challenging for young children who are first learning how to model fractional quantities. I ask my students to arrive at a generalization that would characterize problems that involve repeated addition (*i.e.*, repeated halving is possible when the number of partitions is 2^n, where n is a whole number, $n > 1$).

After Equal Sharing situations, children appear to engage quite readily in manipulating equally sized parts, making addition with like denominators, multiplication problems with equal groups, and measurement division problems suitable for them to explore. Consider the multiplication–equal groups problem and corresponding solution in Figure 10.

Nancy and her mother are baking cupcakes for the bake sale. Each cupcake needs 1/4 of a cup of frosting. They are making 12 cupcakes. How many cups of frosting do they need?

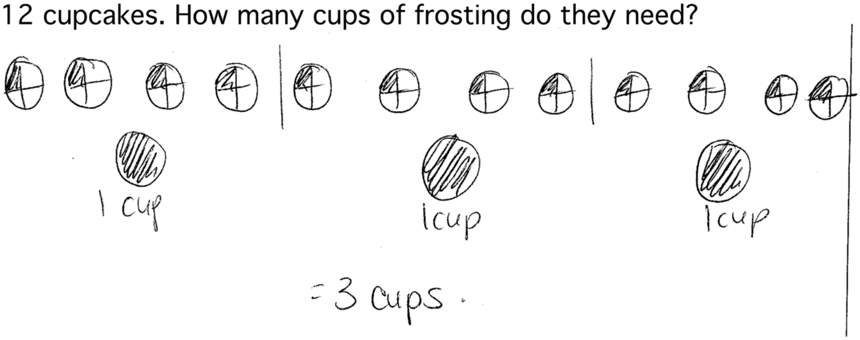


FIGURE 10
A PICTORIAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION TO 12 × 1/4

When allowed to invent their own meaningful solutions to problems such as this one, many children will intuitively know to break wholes into parts and then recombine the parts to form wholes, as can be seen in the solution in Figure 10. Combining parts of the same size is necessary for this problem, and does not appear to cause much difficulty for young children. As such, problems that involve "combining like parts" should be introduced after Equal Sharing problems. Even Measurement Division problems like the one described earlier (with its corresponding solutions in Figures 5 and 9) involves breaking wholes into equal parts and then combining them in specified groups to solve the problem. More challenging problems for children are those that involve manipulating unequal parts and multiplication problems that are not readily modeled using repeated addition, such as fraction-of-whole and fraction-of-fraction problems.

In sum, the problem type taxonomy serves as an additional structuring framework for thinking about a variety of mathematical and pedagogical issues related to the teaching and learning of fractions. From a mathematical standpoint, it requires the pre-service teachers to think about using mathematical concepts to model real-world situations. Consider the "orange problem." While clearly involving fractional quantities, the problem describes a partitive division situation where the unknown is the size of one of the servings (*i.e.*, groups). The understanding of multiplicative structures as a "big idea" will guide the pre-service teachers to understand that this is not a "fractions problem," but rather a "division problem," which entails a grasp of the concepts needed to solve the problem (Ball, 1990). From a pedagogical standpoint, knowing it is a partitive division problem and assessing its difficulty level relative to other problem types allows the teacher to interpret a child's work, which includes making logical inferences about their thinking at times. This knowledge also enables a teacher to explain, with the use of models, if necessary, the key mathematical concepts involved in the problem's solution; it can also assist teachers in planning instruction, either "on the fly" or before a lesson is given. Thus, the interplay between the knowledge of the subject matter and pedagogical practice is a complex one, which underscores the notion that much of the subject-matter in mathematics methods courses is best not taught in isolation of the situations in which it will be invoked (*i.e.*, teaching tasks that take place in the classroom setting).

4. Conclusions and Implications

Prior to the 1980s, the research on teacher knowledge focused mainly on teachers' computational abilities, which suggested a view that mathematics teachers are primarily subject-matter experts (Haney, Madaus, and Kreitzer, 1987). Shulman's (1986) seminal address at the American Educational Research Association (AERA) conference in 1986 spearheaded an awareness of a different kind of teacher knowledge, which he coined *pedagogical content knowledge* (PCK). Shulman characterized PCK as content knowledge that is unique to the teaching profession and necessarily implicated in a teacher's practice. This sparked a very different way of thinking about teachers' knowledge and teacher training in all disciplines, mathematics included. Since his AERA address, a variety of researchers have explored the nature of mathematical PCK in practicing and pre-service teachers (see, *e.g.*, Seymour and Lehrer, 2006). In the past 25 years, scholars have taken Shulman's original conception in many different directions.

In this chapter, in addition to reviewing studies focused on promoting teachers' mathematical knowledge, we provided descriptions of the ways in which some of these visions have been implemented by one MTE, the first author of the chapter. This exercise prompted one important claim, which is that the complexity of teachers' mathematical knowledge hinders in many ways scholars' views on effective instructional approaches in methods courses. An argument we put forth is that while it is clear that prospective teachers must know the subjects they will be teaching, it is unwise for MTEs to treat the mathematical content as distinct from the pedagogical actions that teachers face in the classroom. Again, the research we review points to the complex interrelations between (a) knowing school mathematics well enough to solve problems in the curriculum, and (b) the more unique, or "professional," types of mathematical knowledge that are implicated in the context of teaching actions. It is becoming increasingly clear that the mathematical knowledge of teachers entails more than a grasp of high school mathematics or calculus or linear algebra (see Ball, Lubienski and Mewborn, 2001; Fennema and Franke, 1992). It is also different from school mathematics itself. What we have come to realize, as illustrated in this chapter, is that the subject-matter knowledge is best learned in contexts that are intimately tied to teaching actions, which makes it qualitatively different from (although correlated with – see Rayner, Osana, Lacroix, and August, 2011) the mathematics in the elementary curriculum.

As a result, therefore, approaches taken by MTEs include tasks that blend a variety of professional competencies. This is clearly illustrated by the tasks used in the methods courses described. For example, through the pre-service teachers' own "relearning" of rational numbers (*e.g.*, fractions), future teachers are afforded a view into student thinking as well as ways to create tasks that will mobilize specific mathematical concepts in the classroom. As another example, tasks are assigned where the pre-service teachers must analyse the teaching actions of a practicing teacher, often demonstrated through the use of video technology. The task of critically evaluating someone else's practice calls for an analysis of student work to obtain evidence of their learning, a critical aspect of what Hiebert *et al.* (2007) called "disciplined inquiry." As suggested by Hiebert *et al.*, the ability to interpret student thinking in mathematics is critical to drawing conclusions about whether learning goals have been met, and what counts as evidence for these conclusions includes student engagement with mathematical tasks and elements of their work. The ability of a teacher to "see the mathematics" in student work, as we have attempted to demonstrate, is centrally predicated on this teacher subject-matter knowledge.

The mathematical development of prospective teachers is a process that cannot be completed in a handful of mathematics methods courses in a span of one or two years during teacher training. The development of expertise takes considerable time and practice in appropriate contexts and with careful feedback. Time, of course, is a luxury many MTEs do not have. This requires them to make strategic choices about the content and skills they target in their methods courses. The first author meets this challenge by emphasizing the "big ideas" (Hsu, Kysh, Ramage, and Resek, 2007) that span the body of mathematical knowledge necessary for teaching. In her case, for example, she includes concepts related to the structure of the numeration system, first studied in the context of whole numbers, but later extended to decimal systems. Multiplicative structures form another "big idea" that constitutes a large element of the first author's methods courses as it extends beyond whole numbers to rational numbers, measurement, and geometry.

There is a recent emphasis on engaging prospective teachers in actual teaching situations requiring careful supervision and feedback from an experienced educator. This presents another challenge for the MTE who, like the first author, is confined to a traditional university lecture-style context for her methods courses. Although work is needed to test that approach empirically, it is hoped in this course that by introducing various situations that simulate actual practice, students learn to transfer the required knowledge to other teaching contexts. Promising ways to achieve this goal, however, is the topic of another paper. Finally, the recent research on professional development initiatives in mathematics (both at the in-service and pre-service levels) places the emphasis beyond declarative knowledge: preparing teachers to master a pedagogically useful type of mathematics is closely linked to, and perhaps dependent on, the development of a practical type of knowledge (Ball and Forzani, 2009) that is invoked as teachers engage children in mathematical tasks in the classroom.

Réaction 1 au texte d'Helena P. Osana et de Vanessa Rayner

De l'ancien élève à l'enseignant

Quel parcours ?

Lucie DeBlois
Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage
Centre de recherche sur l'intervention et la réussite scolaire – CRIRES
Faculté d'éducation
Université Laval
lucie.deblois@fse.ulaval.ca

1. Introduction

Les auteures présentent les modalités de fonctionnement qu'elles ont adoptées compte tenu des résultats de recherche pertinents obtenus essentiellement en contexte anglophone. La littérature francophone offre aussi de son côté des résultats de recherches qui nous sensibilisent à l'égard de certains dispositifs. Par exemple, Robert (2008) reconnaît l'importance de la planification et des choix à faire avant la réalisation d'un stage. La prévision du déroulement de cette planification, par l'anticipation des difficultés des élèves et par la prise en compte de la composante médiative, facilite la mise en place de routines et des prises de conscience des futurs maîtres à l'égard des contraintes et de leurs marges de manœuvre. Grugeon (2008) a d'ailleurs observé comment l'anticipation des erreurs des élèves peut modifier la nature des interventions des enseignants débutants. Elle reconnaît que certaines pratiques se stabilisent rapidement compte tenu de certaines représentations de l'apprentissage et de l'enseignement en relation avec la composante personnelle de l'enseignant débutant. De son côté, Bloch (2005) suggère d'élaborer des situations que les futurs enseignants simuleront afin de prendre conscience des caractéristiques de ces dernières. Pour réagir au texte d'Osana et de Rayner, je discute d'abord des activités et des observations réalisées en contexte de formation des enseignants, pour ensuite remettre en question la posture privilégiée à l'égard des savoirs mathématiques. Je m'attarde enfin aux particularités de la formation initiale en enseignement des mathématiques avant de conclure.

2. Des observations en classe de formation des enseignants ?

Osana et Rayner visent le développement d'une compréhension profonde des futurs maîtres à l'égard des thèmes mathématiques enseignés au primaire. D'autres tâches concernent davantage un apprentissage professionnel de certaines compétences nécessaires à une utilisation pertinente notamment des manuels scolaires et des programmes d'études. La tendance des futurs maîtres à considérer des caractéristiques superficielles au début d'une formation à l'enseignement est alors traitée. Ainsi, afin d'approfondir la compréhension du système de numération en base 10, la formatrice (H. Osana) convie les futurs enseignants à explorer d'autres bases de numération. L'exploitation des variables didactiques prend forme à l'intérieur de situations ayant une structure multiplicative, et c'est alors l'occasion d'analyser des problèmes. En outre, l'apport et les limites du matériel didactique sont observés à travers la notion de fraction. Enfin, les exigences des tâches sont ensuite discutées à travers les différents contextes dans lesquels interviennent ces fractions. Une variété d'algorithmes personnels est traitée à partir des opérations de multiplication et de division. Des vidéos sont utilisées afin de présenter différentes procédures d'élèves en train de résoudre des problèmes.

On présente ainsi un arrimage entre les concepts mathématiques enseignés à l'école primaire et les différents outils mis à la disposition des enseignants et des futurs maîtres : types de problèmes, matériel didactique, algorithmes et procédures des élèves, variables didactiques. Cet arrimage illustre l'apport d'une compréhension des concepts mathématiques dans l'élaboration de situations d'enseignement-apprentissage. Toutefois, on peut se demander comment les futurs enseignants interprètent cet arrimage. Ce questionnement soulève en fait le problème de la « transparence » des savoirs didactiques.

De mon côté, dans mes cours à la formation, j'ai proposé à mes futurs maîtres la tâche suivante : « Analysez trois productions d'élèves comportant des erreurs et posez trois hypothèses différentes qui pourraient expliquer les erreurs que vous observez dans ces productions. » Certains d'entre eux ont présenté trois productions d'élèves différentes, issues d'une même tâche mathématique, d'autres ont étudié trois productions d'élèves différentes issues de trois tâches mathématiques différentes, mais quelques-uns ont analysé trois tâches différentes et trois productions d'élèves différentes pour chacune de ces tâches. Les deux premières interprétations des futurs maîtres sont conformes avec le travail demandé. Toutefois, l'interprétation du troisième groupe laisse perplexe. Comment ont-ils pu assimiler les tâches mathématiques aux productions d'élèves ?

Une explication peut s'articuler à partir de l'étude des postures épistémologiques adoptées par les futurs maîtres. Ces étudiants sont à la jonction de trois rôles : ils sont étudiants universitaires en enseignement des mathématiques au moment de recevoir les consignes ; ils prévoient réaliser des stages à partir desquels ils choisiront les productions de leurs élèves, ce qui les situe dans la posture de l'enseignant ; enfin, leur expérience d'ancien élève est très forte au moment d'entrer dans leur classe de stage. Dans le cas où leur expérience d'ancien élève est particulièrement prégnante, une production d'élève pourrait être assimilée à une tâche, puisqu'elle correspond à leur production… d'enseignant. Ils ont interprété les tâches mathématiques comme étant une production d'élèves. Ce type d'interprétation expliquerait-il certains glissements métacognitifs déjà observés dans les cours de didactique à la formation des enseignants ?

En effet, l'exploration d'une variété de bases pour comprendre le système de numération, comme l'expérimentent les auteures, pourrait conduire les futurs maîtres à enseigner différentes bases de numération avec leurs élèves sans que ces derniers ne repèrent la régularité des groupements pour la généraliser, fondement de notre système de numération. L'exploration de cette approche avec des élèves du primaire dans les années 1970 a déjà montré ses limites. L'analyse des problèmes pourrait conduire les futurs maîtres à demander aux élèves de classer les problèmes à résoudre. La connaissance de la variété d'algorithmes personnels des élèves pourrait conduire les futurs maîtres à enseigner chacun d'eux en tant qu'algorithmes conventionnels. Comment éviter ces glissements métacognitifs observés dans les classes à la suite d'une formation visant l'approfondissement des savoirs disciplinaires ?

3. Des savoirs didactiques transparents ?

Une attention portée aux cadres théoriques qui guident nos interventions en classe de didactique à la formation des enseignants permet de se préoccuper de la façon dont le message est interprété. Dans les exemples présentés, l'arrimage entre les mathématiques de la classe et les outils de l'enseignant est présenté dans une perspective où l'exploration du futur maître vise une compréhension approfondie des mathématiques. Toutefois, en oubliant l'interprétation des futurs enseignants, le risque est grand de créer des effets de contrat. Le savoir visé n'est pas transparent.

Les travaux de Power et DeBlois (2011), Boily *et al*. (2006), DeBlois et Squalli (2002), DeBlois et Vézina (2001), Noël et Mura (1999), montrent que la prise en compte des postures épistémologiques de l'ancien élève, de l'étudiant universitaire et de l'enseignant-stagiaire peut contribuer à cerner les interprétations du message des futurs enseignants. En effet, la posture de l'ancien élève contribue à entretenir les premières conceptions des mathématiques, alors que la posture de l'étudiant permet d'introduire des préoccupations qui transforment le projet d'enseignement de l'ancien élève.

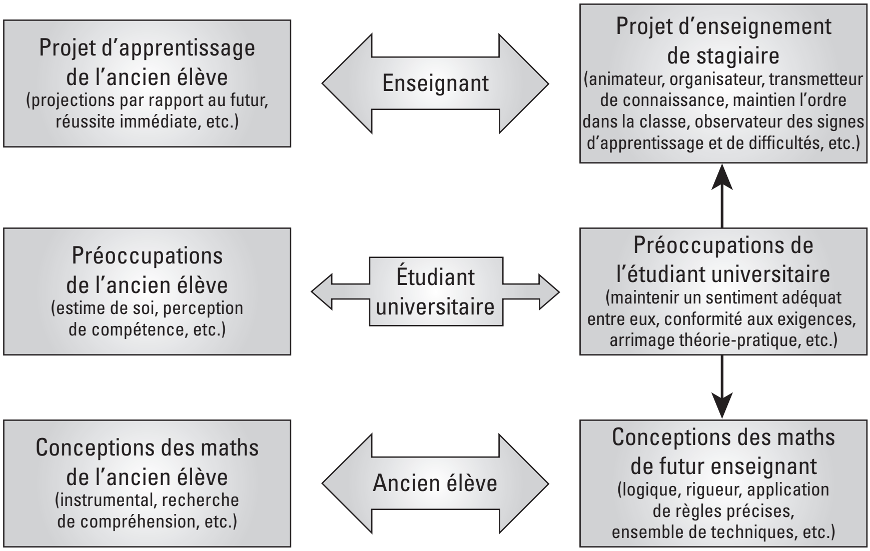


FIGURE 1
INFLUENCE DES PRÉOCCUPATIONS DES FUTURS MAÎTRES COMME PRISME POUR INTERPRÉTER

Le développement d'une compréhension profonde des thèmes fondamentaux des mathématiques enseignées au primaire sert souvent à répondre aux questions de l'ancien élève laissées en suspens. Compte tenu de la compatibilité entre les postures épistémologiques d'ancien élève et de l'enseignant (DeBlois, 2010), et sachant que les discussions entre les futurs enseignants d'une classe de didactique à la formation des enseignants cherchent à maintenir un sentiment adéquat entre les membres du groupe (DeBlois et Vézina, 2001), comment éviter que l'arrimage présenté soit assimilé à celui d'une « bonne » technique d'enseignement ? Comment susciter une transition vers la posture de l'étudiant universitaire, incontournable pour susciter une décentration à l'égard de son rôle d'ancien élève, et mettre une distance entre l'ancien élève et l'enseignant-stagiaire ?

4. Formation initiale, formation continue : quelles particularités ?

Blanchard-Laville (2000) reconnaît que le moment de la formation initiale des enseignants s’apparente à celui de la crise d’adolescence, compte tenu des changements de postures incessants exigés. Dans Cyr et DeBlois (2007), nous avons pu reconnaître l’apport de la notion de variables didactiques dans le passage vers la posture de l’étudiant universitaire. Elle ouvre la porte à l’explicitation des « intentions secrètes » (*hidden agendas*) pour considérer les composantes cognitive et affective des futurs maîtres (Krzywacki-Vainio, 2008). Cette notion attire l’attention des futurs enseignants sur les intentions d’enseignement. Le phénomène de projection du stagiaire dans sa pratique professionnelle pourrait offrir une nouvelle perspective à l’ancien élève pour orienter son interprétation des dispositifs mis en place en classe de didactique.

Cette projection pourrait faciliter l’étude du matériel didactique pour reconnaître la diversité des représentations des élèves, le questionnement comme modalité d’intervention pour étudier la relation entre l’élève et le savoir mathématique, et la distinction entre enseignement et apprentissage pour provoquer une distance à l’égard de leurs préoccupations immédiates (DeBlois, 2008). Considérer les préoccupations des futurs maîtres comme un prisme à travers lequel transitent les tâches proposées et les savoirs de la classe de didactique permet d’examiner leur interprétation.

Dans ces conditions, bien que le fait de revenir sur des thèmes fondamentaux vus dans les classes du primaire puisse favoriser la transformation de leurs conceptions d’ancien élève, il sera nécessaire de provoquer une décentration de leurs conceptions pour développer de nouvelles préoccupations. Dans ces conditions, l’analyse de problèmes ou de matériel didactique contribuera à l’approfondissement des savoirs mathématiques en situant le projet d’enseignement à partir de la posture de l’étudiant universitaire. Des retours vers la posture de l’ancien élève, mieux connue et par conséquent plus confortable, sont inévitables, ce qui explique l’émergence de leur appropriation. Une attention à l’égard de l’interprétation des futurs maîtres selon leur posture épistémologique prend alors toute son importance. La figure 2 illustre la différence entre une formation initiale et une formation continue (perfectionnement professionnel). Les contraintes de l’enseignement, particulières à la classe de mathématiques, modifient les préoccupations des enseignants à l'égard du projet d'enseignement. Les préoccupations développées à l'égard du projet d'enseignement jouent donc un rôle central, mais différent, pour les futurs enseignants et les enseignants en exercice.

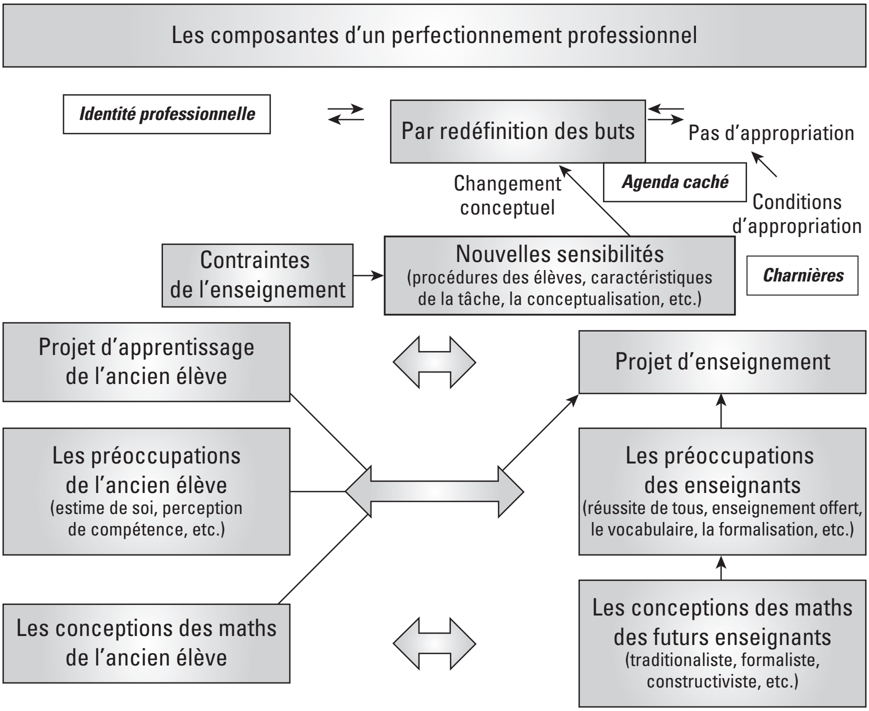


FIGURE 2
LES COMPOSANTES D'UNE FORMATION PROFESSIONNELLE

Cette observation montre que, même si la recherche collaborative semble offrir des résultats intéressants en formation continue (Bednarz, 2000 ; Bednarz et Barry, 2010), la formation initiale exige d'autres dispositifs. Négocier les contraintes de l'enseignement telles les exigences de l'évaluation, le temps, le décrochage scolaire et le manque de ressources du milieu d'enseignement (DeBlois *et al.*, 2009) sont des préoccupations particulières aux enseignants. Ces dernières apportent de nouvelles préoccupations à l'origine des changements conceptuels (Posner *et al.*, 1982), et constituent des conditions pour entrer dans un processus de redéfinition des intentions ou des buts des enseignants.

5. Conclusion

Les contraintes de l'enseignement et les difficultés des élèves peuvent contribuer à créer chez les enseignants la nécessité de transformer leur projet d'enseignement. Toutefois, les futurs maîtres ne vivent pas ces contraintes en classe de didactique à la formation des enseignants. Dans ces conditions, il est nécessaire de nous préoccuper de leur interprétation à l'égard des dispositifs mis en place. Des changements conceptuels ne pourront prendre place que dans le cas où leurs préoccupations les incitent à adopter une posture différente de celle de l'ancien élève. Cette distance pourrait contribuer à jouer sur la composante personnelle de l'enseignant débutant et influencer leurs représentations des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement.

Références bibliographiques ayant documenté la construction des figures 1 et 2

BOILY, J., L. GALERNEAU, F. RIVEST et L. DEBLOIS (2006). « L'accompagnement des stagiaires en mathématiques : une expérience à partager », *Vie Pédagogique, 140*, p. 52-53.

CHARLES-PÉZARD, M. (2010). « Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique », *Recherche en didactique des mathématiques, 30*(2), p. 197-261.

DEBLOIS, L. (2008). « Un autre joueur dans la classe de mathématique : le contrat didactique », dans J. Myre Bisaillon et N. Rousseau (dir.), *L'élève en grande difficulté : Contextes d'interventions favorables*, Québec, Presses de l'Université du Québec, coll. « Éducation – Recherche », p. 193-211.

DEBLOIS, L. (2009). « La collaboration enseignant/chercheur et leur développement professionnel respectif », *Actes du congrès de la CIEAEM*, Montréal, Québec, p. 307-311.

DEBLOIS L. et H. SQUALLI (2001). « Une modélisation des savoirs d'expérience des orthopédagogues intervenant en mathématiques », *Difficultés d'apprentissage et enseignement: évaluation et intervention*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 155-178.

DIONNE, J.J. (1988). *Vers un renouvellement de la formation et du perfectionnement des maîtres du primaire : le problème de la didactique des mathématiques*, Les publications de la faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal.

NOËL, L. et R. MURA (1999). « Images des mathématiques chez des futurs maîtres », *Revue canadienne de l'éducation, 24*(3), p. 296-310.

POWER, G. et L. DEBLOIS (2011). « La résilience chez les élèves socio-économiquement défavorisé(e)s : une analyse par quantiles », *Éducation et Francophonie, 39*(1), <http://www.acelf.ca/c/revue/sommaire.php?id=30>.

Réaction 2 au texte d'Helena P. Osana et de Vanessa Rayner

Former à l'enseignement des mathématiques au primaire

Petit éloge de l'artiste

Jean-François Maheux
Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques – GREFEM
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
maheux.jean-francois@uqam.ca

Si tu veux construire un bateau…
enseigne aux gens la nostalgie de l'infini de la mer.

Antoine de Saint-Exupéry

By the time we enter the twenty-first century…
only the teacher-artist will survive.

Joseph Axelrod

Peu importe que votre jeu soit bon ou mauvais…
l'important, c'est qu'il soit vrai.

Constantin Stanislavski

1. Introduction

Il y a des jours où il semble que ce sont les questions qui posent problème. Surtout quand les réponses, vaille que vaille, semblent faire le tour de la question : par exemple, la question de savoir « Quelle formation mathématique pour les enseignants du primaire ? ». Dans le texte auquel je réagis, Helena P. Osana et Vanessa Rayner s'intéressent à la formation mathématique des futurs maîtres du primaire. Elles se surprennent d'abord des incertitudes ressenties par les formateurs à l'égard du « contenu mathématique » à faire figurer dans leurs cours, puis relèvent un problème de manque de consensus à propos des « connaissances mathématiques » et des approches de formation à favoriser. Dans leur texte, cependant, elles s'empressent de démontrer la présence de convergences autour de grands principes et se font bien convaincantes par rapport à ce que les futurs enseignants « ont besoin » d'apprendre, et comment on devrait y parvenir. Et si c'était vrai ? Et si, vraiment, nous en venions à un consensus et à un lot de certitudes ? Répondre à une question, c'est se lier, c'est s'engager en retour (la racine latine *spondere* signifie « promettre solennellement »). La réponse n'est pas une *réponse* si elle n'oblige pas. La question n'est plus la question si l'on ne cherche pas véritablement à y répondre. Je veux, par cette réaction, faire ce que j'appelle un petit éloge de l'artiste. Et, en sous-texte, proposer par là que nous tentions de répondre à des questions peut-être assez différentes au sujet de la formation…

2. La formation en question

Quelle formation mathématique pour les enseignants du primaire ? Si telle est bien la question, sommes-nous sûrs de *désirer* y répondre ? *Et si nous savions*, serions-nous heureux de nous contenter d'agir en fonction de cette réponse ? Bien sûr, on peut argumenter qu'une *véritable* réponse est de toute manière impossible, parce qu'on ne peut jamais répondre tout à fait et encore moins une fois pour toutes. Un consensus apparaît alors invraisemblable, à moins, bien entendu, d'avoir comme souhait de faire fi de la diversité des contextes, des cultures, des besoins, des conditions, des projets, des individus, etc. Il y a aussi tout ce qui change avec le temps : même une réponse complète aujourd'hui sera, par définition, une réponse incomplète face à ce qui se présentera demain. À moins, là encore, de vouloir faire l'impasse sur ces changements. Que l'on me permette de développer un moment autour de ces deux points.

Dans leur texte, les auteures proposent de classer les activités de formation (qu'elles relèvent dans la littérature) selon qu'elles sont organisées autour de tâches d'élèves ou d'enseignants. Elles nous offrent alors un assez riche panorama de telles activités en expliquant comment elles contribuent à remédier aux difficultés mathématiques des futurs enseignants et conduisent ceux-ci à voir dans les concepts et procédures des choses qui leur avaient échappé. Elles parlent également de rendre les étudiants (un peu plus) habiles à raisonner, résoudre des problèmes, représenter, expliquer, justifier, etc. Dans un deuxième temps, les auteures expliquent comment on peut faire développer des savoirs et des habiletés pédagogiques générales permettant aux étudiants de choisir et de modifier les problèmes qu'ils posent, les approches qu'ils utilisent et les séquences qu'ils construisent. Elles soulignent, par exemple, la possibilité de rendre les étudiants plus sensibles à ce qu'ils observent d'une séance en classe ou de l'évaluation qu'ils font à travers les questions qu'ils posent. L'analyse, développée sur un mode légèrement déficitaire par rapport aux connaissances des futurs enseignants, fait l'argument que ce sont là les choses à quoi nous souhaitons former ; ce que les auteures appellent « *supporting the mathematical development of pre-service teachers* » (p. 282). Ce sont de grands principes sur lesquels nous *pourrions* nous entendre, mais j'ai tout de même des réticences parce que ceci me paraît très « technique » en regard de l'activité d'enseignement des mathématiques. Mais ce qui me préoccupe davantage est l'idée de vouloir dégager de tout cela *une* approche de formation : « *These two primary approaches to supporting the mathematical development of pre-service teachers* […] *are well represented in the literature,* but a great deal of variability nevertheless exists among MTEs with respect to the ways in which the approaches are incorporated *in methods courses* » (p. 289, je souligne). Je me demande s'il est souhaitable de vouloir éliminer cette variabilité, ou si au contraire l'intérêt n'est pas de la mettre en valeur, de l'enrichir, pour que de nouvelles idées continuent de surgir. Pourquoi ne pas plutôt se demander comment célébrer la diversité par laquelle tant de belles idées ont pris naissance ? Et pourquoi ne pas insister sur tout ce par quoi une formation se fait « locale », répondant à ce qui est perçu comme contraintes institutionnelles, besoins des étudiants, du milieu, etc. ? Il y a pour moi beaucoup de richesses ici.

Dans la seconde partie du texte, les auteures expliquent comment plusieurs des éléments dégagés dans la première analyse sont reconnaissables dans la composition d'une pratique particulière de formation. J'aime ici attirer l'attention sur le caractère évolutif de cette pratique. Dans la pratique analysée, il ne s'agit pas d'une approche toute faite, mais bien d'une formation *qui se fait*. Un bel exemple me semble être celui de la taxonomie des problèmes contenant des fractions que la formatrice (H. Osana) explique avoir construite. Comme c'est le cas ailleurs, il y a plusieurs références à la recherche, plus récentes ou plus anciennes, qui montrent à mon avis que nous avons affaire à une formatrice qui se questionne, qui s'intéresse, qui cherche à en savoir plus et à se donner des moyens. Donc, une formatrice qui (se) développe… au point de faire elle-même de la recherche sur, à partir de et pour, sa pratique. Et voilà quelque chose en quoi je me reconnais ! Ce n'est pas simplement que je retrouve dans mes manières de faire les approches que les auteures mentionnent, telle l'analyse de production d'élèves ou de vidéo, la préparation de situations d'apprentissage, l'analyse conceptuelle autour de la complexité des concepts mathématiques et des tâches soumises aux élèves ou l'appropriation de modèles théoriques à propos du développement. Bien entendu, autour de cela je crois que nous *pourrions* nous entendre. Mais je réalise surtout que ces approches ne sont plus, pour moi, ce qu'elles étaient il y a cinq ans. Cette transformation, selon moi, n'est pas simplement attribuable à une meilleure compréhension de ce que *la* formation devrait être. J'y vois un développement de moi-même comme formateur : de la manière dont je vis la formation, de ce que je souhaite pour mes étudiants, de ce que j'interprète venant d'eux, et ainsi de suite. Ceci m'amène à mettre en doute l'intérêt d'analyser nos pratiques pour en dégager des universels ou des invariants : « *that the complexity of teachers' mathematical knowledge hinders in many ways scholars' views on effective instructional approaches* » (p. 310). N'est-il pas plus intéressant de s'attarder au caractère changeant et aux transformations à travers la réalisation de ces pratiques elles-mêmes ? Ainsi, je me demande s'il est satisfaisant de dire/lire, par exemple, « *I provide my students with a taxonomy of different fractions problem type*s […] *The taxonomy allows the pre-*

service teachers to learn about the different situations that involve fractional quantities […] [*which*] *allows teachers to better interpret student solutions* » (p. 305). N'est-il pas plus intéressant de voir comment la taxonomie est donnée et reçue, comment on observe une « *better interpretation* », etc. ? Si c'est le cas, alors pourquoi se demander « quelle formation » plutôt que de s'intéresser en détail à *une* formation (et en particulier la sienne !) en tant que source d'*inspiration* pour d'autres ?

Cela étant dit, une autre possibilité, si l'on tient à la question de « la » formation, est de dire que ce n'est pas la réponse comme telle qui nous intéresse, mais plutôt la démarche ; la quête elle-même et non pas son résultat. Dans ce cas, on peut continuer de se demander « quelle formation mathématique », mais en en faisant un prétexte : le but ne sera pas de dire aux gens « quoi faire ». Après tout, questionner c'est bel et bien *quérir* (du latin *quaerere*), tout comme (j'aime à le répéter) « faire de la recherche » c'est *chercher*, et non *trouver* ! Or ce qui me préoccupe alors, c'est l'esprit et la manière de cette quête. Quand la quête, même celle du « bien », se donne pour objet la réduction des différences, l'ordonnancement de l'enchevêtré, la révélation d'une vérité de fait, elle devient nécessairement une voix monologique qui s'appose ou qui s'impose (Derrida, 1978). C'est dans cette dimension que la question qui nous (pré)occupe dans ce recueil me pose problème. Pour moi, la difficulté n'est pas dans le fait de questionner, de se mettre à la recherche de quelque chose (que l'on sait introuvable), de s'engager dans une démarche, mais bien dans ce qu'impose *cette* démarche en particulier, *cette* question.

Se demander quelle formation mathématique privilégier pour les futurs enseignants du primaire, c'est, me semble-t-il, vouloir mettre de l'ordre dans ce qui se fait, se dit et s'écrit. C'est synthétiser et dégager des principes, et inévitablement faire l'impasse sur les différences et les changements dont je parlais il y a un moment. C'est chercher à savoir ce qui fonctionne et ce qui ne fonctionne pas. C'est chercher l'essence de ce qui fonctionne dans ce qui fonctionne, et savoir ainsi comment le faire fonctionner. Dans cette entreprise, il me semble qu'on oublie des aspects essentiels : on ne semble pas se demander quels sont les possibles de la formation, on ne semble pas s'attarder aux nuances, aux contextualités ou aux différences pour en faire l'éloge et peut-être mieux comprendre tel ou tel contexte de formation. J'ai l'impression qu'on souhaite plutôt des observations systématiques, des comparaisons et des évaluations par lesquelles classer « tout cela » de manière fonctionnelle. Demander « quelle formation » selon moi est, comme toute question, une question piège. Quand la première auteure évoque sa pratique personnelle de formation, ce qui me semble être mis de l'avant n'est pas les questions qu'elle s'est posées et les ajustements qu'elle a faits, ni ses insatisfactions ou même le rationnel sous-jacent à ses actions, non plus les relations particulières qui s'établissent entre elle et ses étudiants (voir ma contribution dans le texte de Frédéric Gourdeau et Jérôme Proulx). Le regard me semble en fait en retrait, « *at birds' eye view* » (p. 282), oubliant déjà les détails, les visages, les variations et tout ce qui change. Toutefois, j'insiste : je ne mets pas en doute ce qui est mis de l'avant par les auteures, je mets en doute la question elle-même, car c'est elle qui, selon moi, produit ces constats.

3. Métaphores

À l'instar de Pineau (1994), je remarque que souvent dans nos approches de l'enseignement, c'est une certaine analogie du « travail » qui domine, remplaçant celle de l'enseignement comme « art ». Il me semble qu'on voit l'enseignant comme un *travailleur* qu'on doit *former*. Dans ce sens, on pourrait dire qu'on lui donne forme au cours d'une formation, comme s'il y avait d'abord quelque chose de plus ou moins informe[1], à quoi on donne corps : une tête bien faite, de bonnes façons de faire, etc. De fait, demander « quelle formation » ne conduit-il pas trop facilement à formuler des intentions de manière technique, en se centrant par exemple « *on the development of the pre-service teachers' mathematical knowledge as well as on their ability to apply subject-matter understanding in the context of typical teaching tasks* » (p. 290) ? N'est-ce pas un modèle où l'on *se développe* pour ensuite *appliquer* ? J'y vois une idée d'entraîner et d'équiper le travailleur avec des outils, des méthodes (il s'agit bien de *methods courses* !), de chercher à ce qu'il puisse *transférer* ses savoir-faire à des situations d'enseignement nouvelles. En contraste avec ceci, il me semble fondamental de revenir à l'idée qu'enseigner puisse être un *art*, quelque chose que l'on cultive.

1. Ou heureusement de moins en moins informe, et ce, depuis que l'on reconnaît *aussi* aux futurs enseignants un brin de connaissances pour l'enseignement (voir Bednarz et Barry, 2010 ; Bednarz et Proulx, 2009 ; Davis et Simmt, 2004).

J'aime voir l'enseignant non comme un « travailleur » (c'est-à-dire suivant une certaine image du « travail »), mais comme un artiste, qui s'enrichit non pas de ce qu'on lui donne, mais de la transformation qu'il fait de tout ce qui se présente à lui ; voir l'enseignement comme une manière d'être (c'est le sens de la racine la plus ancienne du mot « art », l'indo-européen *ar-ti* signifiant une manière, un mode). L'idée me semble importante, car je ne crois pas qu'on demanderait alors « quelle *formation* pour l'artiste » au sens où on le fait ici pour l'enseignant. Dans ce domaine, on s'inspire rarement d'une métaphore selon laquelle ce que fait l'artiste peut être connu et préparé, voire transféré. Bien entendu, on développe des habiletés, voire des techniques, mais celles-ci n'ont d'intérêt qu'*au service de l'art*.

Faisons un détour du côté de chez Paul Lockhart. Dans un texte assez connu et qu'il a récemment développé en livre, Lockhart (2009) raconte l'histoire d'un musicien s'éveillant d'un cauchemar dans lequel la formation à la musique, rendue obligatoire, est soumise à un modèle formel et bien huilé. La musique n'est plus pensée comme un art, mais comme un ensemble de savoirs et de savoir-faire : une sorte de travail. Lockhart explique comment l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques subissent bien souvent ce sort absurde. Il contraste avec la magnifique idée d'Antoine de Saint-Exupéry qui écrit, dans *Citadelle* : « Si tu veux construire un bateau, ne rassemble pas des hommes pour aller chercher du bois, préparer des outils, répartir les tâches, alléger le travail mais enseigne aux gens la nostalgie de l'infini de la mer » (Saint-Exupéry, 1948). Penser l'enseignement comme on le fait souvent participe de ce que Jim Neyland (2001) appelle une vision technocratique du monde de l'enseignement des mathématiques : il nous faut savoir quoi faire, comment le faire, quand le faire, s'assurer que ce soit bien fait, et ainsi de suite. Neyland explique le danger terrible qui vient avec une telle approche de l'éducation : l'érosion des facultés éthiques et jouissives de l'activité mathématique avec les élèves. J'aime l'idée d'une « formation » à l'enseignement des mathématiques qui soit une rencontre dont l'œuvre principale est d'éveiller une *nostalgie de l'infini* de (l'enseignement de) l'activité mathématique. Nostalgie par laquelle, en raison de son fondement, l'activité mathématique pourrait se mettre au service du plaisir (esthétique, entre autres) d'être, de faire et de connaître ensemble mathématiquement (Maheux, 2010). Je pense ainsi aux réflexions de Steven Khan (2010), qui voit l'enseignement en termes de «*performing*», et qui propose que l'activité en classe soit à la fois mathématique, esthétique et éthique. C'est aussi l'idée de Lockhart : voir l'activité mathématique comme un art !

Je reviens donc à l'idée de penser l'enseignant comme un artiste, et donc à la question (un peu bousculée) de savoir ce à quoi pourrait ressembler la formation mathématique des futurs maîtres du primaire. Un artiste, le forme-t-on à la réalisation de tâches artistiques ? Lui donne-t-on des outils ou des méthodes à transférer à des situations nouvelles ? Pensons aux artistes de la scène. Ce n'est pas que leur parcours ignore tout de la technique et des courants littéraires (au contraire !). Ces éléments, par contre, y jouent un rôle lié à « l'art » lui-même (Heidegger, 1931). Par l'expression, le senti et le développement de sensibilités uniques à chacun, l'artiste crée un monde, une expérience toujours plus riche de ce qui l'entoure… pour ensuite faire partager ces expériences. Ce partage est possible *parce que* l'art existe et que l'artiste, par ce qu'il produit, y contribue. Certaines de ces idées font insensiblement leur chemin dans le monde de la formation des maîtres depuis plusieurs années, à commencer par celle de l'enseignant comme artiste (Hill, 1985 ; Weinburg, 1988 ; Pineau, 1994). Plus précisément dans le cas de l'enseignement des mathématiques, je pense par exemple au travail de DeBlois (2006), qui parle de développer la « sensibilité » des futurs enseignants pour leur permettre de complexifier leurs interventions, qu'elle rattache à juste titre au concept d'«*awareness*», mis de l'avant par Leikin (2006). De telles entrées sur la « formation » ne signifient pas toutefois que tous nos étudiants deviendront de fameux artistes. C'est même, au contraire, accepter l'idée que tel ne sera *jamais* le cas et, de là, vouloir nous engager auprès d'eux dans l'esprit (le *thelos*) d'une vision artistique de l'enseignement des mathématiques que l'on promeut et qui devient la chose à *rechercher*.

Il me faut, hélas, reconnaître qu'il existe encore moins de travaux sur la formation des artistes que sur celle des enseignants. Il existe néanmoins quelques écoles, une des plus célèbres étant celle de Constantin Stanislavski (1984) ayant donné naissance au fameux Actors Studio. Chez Stanislavski, la technique est fondamentale, mais *au service* de l'authenticité, de l'émotion, de l'imagination qui permet au « spectateur » et à « l'acteur » de se rencontrer et d'entrer en communion : « L'art est un produit de l'imagination […] Le but de l'acteur doit être de se servir de sa technique pour transformer la pièce en une réalité dramatique» (p. 61). Bien entendu, certains possèdent «une technique très habile, et sont capables de se tirer d'un rôle uniquement grâce à des moyens techniques» (p. 27), mais alors tout devient artificiel et l'imagination disparaît. La vraie puissance et la beauté de l'activité artistique/mathématique consistent à faire participer à «la vie profonde d'un esprit humain» (p. 21) et ce n'est jamais «la technique seule qui peut faire naître en vous une image en laquelle vous puissiez croire. La création n'est pas un "truc" technique» (p. 308), il faut plutôt puiser à sa propre expérience (p. 31). Heidegger (1931) décrit cela ainsi: «La production [artistique] dépend de sa maîtrise technique [qui permet à l'artiste] d'"exprimer" sa "personnalité", laquelle "se manifeste" dans la production en "s'extrayant du tourbillon de ses sentiments"» (p. 13). Et il y a bien entendu la dimension collective, le «faire partager» de l'expérience artistique en contexte, dans l'interaction, en réponse, et comme œuvre intellectuelle. Ne peut-on, par exemple, donner un rôle plus ouvert à la maîtrise de sujets mathématiques et d'approches didactico-pédagogiques en formation des enseignants? C'est-à-dire, dans les mots de Stanislavski, s'en servir pour développer une «extrême sensibilité […] soigneusement éduqué[e]» (p. 22) au service d'une activité mathématique qui soit *vraie*?

Saint-Exupéry écrit dans l'un de ses carnets (1953) que «le poète n'est pas plus futile que le physicien [mais la vérité] du poète est plus urgente car il s'agit de sa propre conscience» (p. 112). Il est possible de regarder l'enseignant, en exercice ou en formation, du point de vue du physicien. Tout en sachant très bien qu'on ne peut pas *prévoir*, on peut vouloir *expliquer* la présence et la répétition de certains phénomènes. Il est possible de se demander «quelle formation mathématique pour les futurs maîtres?». En même temps, sachant très bien l'impossibilité (et même l'indésirabilité) de *prévoir*, s'impose en quelque sorte le besoin de s'intéresser d'abord à ceux-là mêmes, (futurs) enseignants, que nous rencontrons. Et du point de vue de l'artiste, surtout chercher le moyen *d'évoquer* la nostalgie de l'infini de la mer. C'est, me semble-t-il, la vérité urgente à laquelle nous sommes confrontés comme formateurs, et c'est la question principale qui devrait nous guider. Or, me semble-t-il, cela passe peu par l'étude systématique des dispositifs de formation et l'identification de principes généraux. Et, c'est *surtout* par une considération du *formateur comme artiste* que l'on peut l'aborder! En didactique des mathématiques, il a fallu un certain temps avant d'abandonner l'idée que nous saurions un jour à quoi et comment former les élèves du primaire, et que nous mettrions la main sur de « grands principes » permettant de mettre au point *le dispositif* qui y convienne. Cet abandon, me semble-t-il, nous ne l'avons souvent accepté qu'en échange d'un report de nos ambitions sur l'enseignant. Si c'est à l'enseignant de voir « ce qui est bon » pour ses élèves, je sens un empressement chez certains de vite trouver comment rendre celui-ci capable d'exercer un tel jugement. Faisant la distinction entre le formateur centré sur l'étudiant comme entité cognitive et le formateur-artiste qui se donne pour sujet l'étudiant comme personne à part entière, Axelrod (1973) écrit :

> [*the professor who follows the Student-as-mind is*] *organized around his desire to help his students acquire a set of skills and abilities that are intellectual in nature; students are taught to adopt reason and language as their major tools and to use problem-solving as a major means of investigating subject matter. The professor who follows the Student-as-person* [*emphasizing the personal development of the whole student and not just his mind*] *organizes his classes around his desire to help students develop as individuals, including growth in affective knowledge as well as cognitive knowledge* (p. 239).

Quelle logique alors pour les questions de formation, quelle métaphore ? Peu à peu, il faut peut-être en venir à accepter qu'il n'existe pas non plus de dispositif de formation qui puisse répondre à l'ambition de « bien former » au sens de donner une forme (intellectuellement) (pré)déterminée à l'enseignement. Le danger m'apparaît, si on conserve cette manière de penser, qu'il faudra par la suite changer à nouveau d'objet, voulant alors *former un formateur réflexif* qui puisse tirer parti de la complexité des situations de formation. Dans la même logique, on demandera comment former le formateur de formateurs, et ainsi de suite. Cette logique me semble problématique. Toutefois, je trouve que les arts et les sports nous apprennent à abandonner ce mode de pensée : mettre de côté les systèmes et les grands principes pour aller plutôt à la rencontre de l'autre. Dans un tout petit livre, l'auteur Norman Mailer (1988) décrit la « technique » du formidable boxeur Cassius Clay, aussi connu sous le nom de Mohammed Ali :

> Un homme du ring est un acteur […] [Clay] savait que les coups les plus puissants, délivrés systématiquement, ne valaient pas grand-chose […] le bombardement des poings […] c'est à cela qu'ils s'attendent. Clay variait donc l'intensité de ses coups comme personne, il jouait

> avec les coups, y allait en douceur [...] puis vous les assénait au visage comme un coup de cravache [...] vous faisait valser ensuite au corps à corps [...] s'envolait hors de portée [...] vous enfonçait un violent crochet dans les côtes [...] (p. 38-41).

C'est l'image de l'acteur qui intéresse ici. Boxer est un art, le combattant est inspiré, il improvise, il s'adapte à ce qu'il trouve et le transforme d'une manière qui lui est propre. La technique de Cassius Clay décrite par Mailer n'est pas une recette, ni le résultat d'une formation donnée. C'est « sa » technique, toute différente de celle basée sur la vitesse de Joe Frazier (qui finit par le battre dans ce « combat du siècle » !). Dans les mots de Mailer, le travail « psychologique » des deux boxeurs n'est pas sans similarité : on cherche à « terrifier » l'adversaire, c'est-à-dire le faire sortir de sa certitude (d'une victoire). Mais l'art du ring n'est pas dans ce grand principe. Il est dans les gestes qui donnent une vérité profonde au jeu de chacun, vérité sans laquelle la terreur ne tient pas, vérité que l'on ne peut puiser qu'en soi-même. Comment ne pas y voir un parallèle puissant avec la description que fait Axelrod de l'enseignant/professeur-artiste qui, dit-il, s'attaque à la tâche de la seule manière qu'il connaisse, développant son propre style, son talent, et qui, comme être unique, traite de manière particulière, avec les facteurs extérieurs qui influencent, *son* art : la nature du sujet, la personnalité de ses étudiants, les conditions institutionnelles et sociales, etc. Comment ne pas y voir la possibilité d'un point d'entrée radicalement différent sur la formation mathématique (et didactico-pédagogique) des futurs maîtres ? Penser cette formation comme une formation artistique, et cela dans les deux sens que peut prendre l'adjectif ici : artistique, dans la mesure où elle soutient le développement de l'enseignant comme artiste, et artistique, parce qu'elle est elle-même l'œuvre d'un formateur-artiste en pleine création !

Par ce petit éloge de l'artiste, c'est sur ce mouvement qui puise en soi-même une vérité profonde à l'activité (d'enseignement des) mathématique(s) que je souhaite attirer l'attention. Encore une fois, je ne pense pas que ces idées soient tout à fait nouvelles. Les résonances sont nombreuses avec, par exemple, cette idée longuement travaillée par Bednarz (2001 ; 2010) d'une formation *par* la didactique (et non *à* la didactique) dans laquelle le formateur ne cherche pas à imposer aux étudiants maîtres une vision des mathématiques, et de leur enseignement et apprentissage, mais plutôt à soutenir le développement et la complexification de leurs propres manières de faire. Que le formateur et le (futur) enseignant avec lui, et l'élève avec lui, soient engagés dans une quête artistique, dans la question de *se* former, à laquelle il n'existe de réponses qu'uniques. Uniques comme des promesses (qui) ne peuvent engager que soi (pour et par l'autre). Petit éloge visant, s'il faut le dire ainsi, à me prononcer *pour* une formation mathématique qui enseigne la « nostalgie de l'infini » de l'activité mathématique ; une formation cherchant à faire en sorte que, « bon ou mauvais », l'enseignement ainsi promu soit *vrai*.

4. Prudences

En quelques mots, Helena P. Osana et Vanessa Rayner nous offrent un examen fort intéressant de la littérature scientifique, d'une part, et d'une pratique de formation, d'autre part. J'ai expliqué que j'éprouve personnellement certaines réticences à l'égard de ce qu'elles proposent à partir de ces éléments : un début de réponse à une question qui, pour moi, nous détourne de l'essentiel. Par le biais de mon petit éloge de l'enseignant et du formateur comme artistes, je ne cherche cependant pas à imposer *ma* vision de la formation et de la recherche dans le domaine, au détriment de ce que les auteures nous présentent. Ce que je souhaite, c'est peut-être en appeler à une certaine prudence en nous invitant (tous) à nous demander à quoi peuvent bien nous conduire les réponses aux questions que nous faisons nôtres. Prudente conclusion s'il en est…

SYNTHÈSE FINALE

- **Conclusion**

Conclusion

En eux-mêmes, les divers textes du livre ouvrent sur plusieurs idées et façons de comprendre la formation mathématique des enseignants de mathématiques. À leur façon, chacun de ces textes inspire et fait réfléchir aux perspectives anciennes, actuelles et futures. Comme directeurs de la collection, cette richesse pourrait nous apparaître suffisante, dans deux des sens du terme : suffisante au niveau de la portée des idées amenées dans ces textes, qui en disent déjà considérablement sur cette problématique bien vivante de la formation mathématique des enseignants de mathématiques, mais aussi suffisante au point où en dire plus fait courir le risque d'en dire trop, de s'éloigner, et même de déformer ou de faire lire à notre façon ces idées.

Par contre, le colloque duquel est tiré ce livre regorgeait de plages de discussions dans lesquelles plusieurs idées ont été examinées, poursuivies et débattues. Ces nombreuses discussions et ces interactions nous ont inspiré cette conclusion, qui se veut en fait une certaine synthèse du colloque, développée à travers notre compréhension bien personnelle des idées et des concepts avancés. Nous vous invitons donc, dans cette dernière partie du livre, à entrer dans ce monde d'idées sur la formation mathématique que nous avons cru voir émerger durant la tenue de ce colloque.

1. Faire faire des mathématiques : une entrée doublement importante pour la formation mathématique des futurs enseignants

Si nous ne pouvions utiliser que quelques mots ou une seule expression pour décrire le colloque en entier, probablement qu'il s'agirait de celles-ci : « faire faire des mathématiques » et « activité mathématique ». La discussion sur la formation mathématique s'est en effet rapidement dirigée, et ce, dès les premières présentations et discussions, vers l'importance, au-delà des contenus, de faire faire des mathématiques aux enseignants en formation, de les plonger dans des résolutions de problèmes, réflexions mathématiques et situations authentiques, de les mettre en action, etc. Dans ce contexte, les contenus deviennent secondaires, et ce sont les activités mathématiques dans lesquelles sont plongés les futurs enseignants qui sont analysées et qui apparaissent importantes.

L'intention sous-jacente à l'idée de faire faire des mathématiques semble avoir plusieurs points d'ancrage importants. Nous en dégageons deux. Le premier concerne l'importance de rendre les enseignants fluides en mathématiques et capables de résoudre les divers problèmes mathématiques qu'ils rencontrent. Au-delà des contenus, c'est l'expérience mathématique qui est recherchée, c'est la curiosité mathématique qui veut être développée, c'est la capacité à donner un sens aux concepts et de les explorer qui est visé. Pourquoi ? Parce que, comme le dira N. Bednarz (voir son texte dans ce recueil), la formation mathématique ne se termine jamais pour un enseignant : pas après le secondaire ou le cégep, ni après la formation initiale qui sert en fait de tremplin à la formation professionnelle. En un mot, pouvoir faire des mathématiques outille l'enseignant à pouvoir continuer à en apprendre et à continuer à se former : faire faire des mathématiques à la formation (initiale et continue) contribue à former les enseignants à se former eux-mêmes en mathématiques et à trouver des moyens d'y parvenir. La formation mathématique ne peut être, en aucun moment, suffisante. S. René de Cotret nous rappelle qu'il est toujours possible de se faire coincer ou bien d'être bloqué devant un problème mathématique, et ce, quelle que soit notre expérience (voir son texte dans ce recueil). Ce sera alors les aptitudes à fouiller et à travailler en mathématiques qui seront utiles et recherchées, c'est-à-dire à faire des mathématiques. Et, dans ces moments, ce sera l'occasion d'apprendre de nouvelles façons de faire les mathématiques, de nouvelles façons de les comprendre et de les raisonner. On touche donc ici à un des nœuds les plus centraux de la formation professionnelle : la prise en charge par l'enseignant lui-même de sa formation (ici, mathématique).

Le deuxième point d'ancrage, souvent ramené en contexte de formation initiale pour sensibiliser les étudiants aux élèves et à ce qu'ils vivent, insiste sur l'idée de faire vivre des expériences mathématiques authentiques aux futurs enseignants (et qu'ils en prennent conscience), pour qu'ils puissent se mettre dans la peau de leurs élèves. D'un côté, on veut développer cette sensibilité chez les futurs enseignants envers les élèves avec lesquels ils vont travailler ; d'un autre, on peut vouloir que les enseignants, qui mettront en activité mathématique les élèves et leur en parleront, en fassent eux aussi de leur côté pour permettre de parler en cohérence et connaissance de cause. Ces arguments, à portée pragmatique, touchent et s'intéressent au contexte professionnel d'enseignement et aux événements reliés à la classe.

Une difficulté qui s'est toutefois tracée à travers les discussions est la façon de définir ces idées d'*activité mathématique* ou de *faire faire des mathématiques*. Qu'entend-on exactement par ces idées ? Qu'en sait-on ? Qu'en dit la recherche ? Et les pratiques de formation ? Une façon de s'y retrouver réside peut-être dans le concept de pratique sociale de référence de J.-L. Martinand (1981 ; voir le texte de N. Bednarz dans ce recueil), qui défend l'idée que la source des savoirs scolaires ne peut pas être exclusivement les savoirs savants, mais aussi les pratiques au sein de communautés sociales, comme l'explique Rey (2007) :

> Dès 1981, Martinand, cherchant à repérer l'écart entre les activités scolaires et ce à quoi elles réfèrent et qui leur préexiste, fait remarquer qu'il convient pour cela de prendre en compte non seulement les savoirs constitués, mais aussi les tâches, les rôles sociaux, les instruments et les problèmes. Il est ainsi amené à avancer la notion de « pratique sociale de référence » (p. 127).

Ainsi, quelles seraient les pratiques mathématiques de référence pour les cours de mathématiques avancées, quelles seraient celles pour les cours de didactique des mathématiques, quelles seraient celles pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles ? Offrir des éléments de réponse à ces questions peut aider à mieux comprendre ce qui est entendu par « activité mathématique » dans ces différents milieux et peut mener à penser la formation en lien avec ces perspectives.

De plus, cette idée de faire des mathématiques a été soulignée comme une avenue très prometteuse pour rejoindre les divers formateurs qui ont des intérêts « mathématiques » différents. Malgré le fait que le colloque a été pensé de sorte que la formation *mathématique* soit mise de l'avant, un besoin de croiser les regards didactiques et mathématiques s'est rapidement fait sentir. Ainsi, si certains ont affirmé que peu s'entendraient au final sur les contenus mathématiques à travailler (mathématiques avancées, du secondaire, professionnelles, etc.), en fonction bien certainement de leurs intérêts propres, un certain consensus (ce qui est assez rare lorsqu'on parle d'enseignement des mathématiques ou de formation des enseignants) s'est fait sentir concernant l'importance de faire faire des mathématiques aux enseignants de mathématiques. Ainsi, il a été soulevé que cet aspect peut être une bonne porte d'entrée, voire un thème porteur, pour permettre de développer un dialogue et favoriser les interactions entre les formateurs-mathématiciens et les formateurs-didacticiens sur les questions de formation, et même de développer des travaux conjoints ou du moins alignés. En bref, alors que la plupart du temps la formation est pensée en matière de contenus, tant dans les cours disciplinaires que didactiques, la trame commune de formation qui émergeait était l'activité mathématique (sous ses divers angles, évidemment). Sans être une grande surprise, cet aspect met toutefois de l'avant de façon convaincante l'importance de cet angle de formation, qui gagnera à être scruté plus en détail par les chercheurs et les divers formateurs dans l'avenir.

2. Mathématiques et didactique : quelle (inter-)relation ?

Cet intérêt pour l'alignement des perspectives plus mathématiques ou plus didactiques que l'entrée sur l'activité mathématique peut potentiellement permettre nous amène à l'articulation entre les mathématiques et la didactique à la formation des enseignants. Si consensus ou presque il y a eu concernant l'activité mathématique, ici aussi plusieurs s'entendaient sur le fait que l'articulation entre la formation mathématique et la formation didactique est centrale. Toutefois, cette articulation est complexe et elle reste, même après le colloque, à penser… Ainsi, comment articuler les cours de didactique des mathématiques avec les cours de mathématiques avancées ou tout autre cours de mathématiques (par exemple, ceux dits adaptés ou dédiés). Une des difficultés majeures de cette articulation, particulièrement entre mathématiques avancées et didactique, est que les deux ne portent vraisemblablement pas sur les mêmes contenus mathématiques.

Évidemment, l'entrée sur l'activité mathématique, plutôt que sur les contenus, peut peut-être apparaître comme piste de solution à cette articulation… Mais même sur ce point, quelques tensions entre didactique et mathématiques ont parfois été relevées, par exemple dans les cours de mathématiques (entre «prouver» et «expliquer», voir le texte de F. Gourdeau et J. Proulx dans ce recueil) ou dans les cours de didactique (sur comment les mathématiques sont expliquées, comment les étudiants sont mis en activité mathématique, comment l'enseignant travaille et dirige son cours, etc.[1]). Toutefois, l'idée d'articulation amène, au-delà des tensions, à se demander comment chacun peut nourrir et se nourrir de l'un et l'autre. Ainsi, de quelle façon les mathématiques avancées peuvent-elles nourrir la didactique ? Et de quelle façon la didactique peut-elle nourrir les mathématiques ? Les réponses à ces questions, au-delà des contenus (encore !) et même au-delà des façons de faire les mathématiques, se sont en quelque sorte tournées vers les personnes : les formateurs en mathématiques et les formateurs en didactique. Les discussions se sont portées sur ce que les formateurs en mathématiques peuvent apporter aux formateurs en didactique, et ce que les formateurs en didactique peuvent apporter aux formateurs en mathématiques. De là est née l'idée d'échanges et, rappelons-le, celle d'ouvrir les portes de classe de chacun pour favoriser ces échanges entre formateurs-didacticiens et formateurs-mathématiciens. Évidemment, ce n'est pas dans une perspective de cautionnement de l'enseignement (lorsqu'un formateur-didacticien observe un formateur-mathématicien) ou d'évaluation des mathématiques (lorsqu'un formateur-mathématicien observe un formateur-didacticien), mais plutôt

1. Voir aussi le collectif de Proulx et Gattuso (2010) sur ces questions, particulièrement à la suite des textes de P. Marchand et de J. Proulx, où plusieurs tensions dans les cours de didactique entre mathématiques et didactique sont discutées.

dans l'idée d'avoir une véritable culture d'échange sur les questions de formation mathématique des enseignants. On parlera alors de regards croisés de formateurs-didacticiens et de formateurs-mathématiciens.

Avec cela venait aussi une importante reconnaissance, qui a souvent été soulignée à travers les discours des gens, que la formation en mathématiques se fait à travers les cours de mathématiques (avancées, adaptées, etc.), mais aussi par le biais des cours de didactique. Toutefois, la nature de la formation mathématique dispensée à travers les cours de didactique, mis à part le travail fait dans le texte de Squalli et celui de Theis, reste un phénomène peu creusé et qui reste à explorer. Cette incursion du domaine mathématique à l'intérieur de la didactique a aussi fait émerger le contraire, soit la didactique à l'intérieur des cours de mathématiques. Plusieurs ont souligné la présence de nombreux angles didactiques empruntés à l'intérieur des cours de mathématiques, dans les choix faits, les façons d'expliquer, les exemples donnés, les façons de répondre aux étudiants, le choix des problèmes, etc., et même l'orientation donnée à un cours : par exemple, on dira que le fait d'avoir eu à s'adresser à de futurs enseignants a fait adapter ou changer les approches dans certains cours de mathématiques (voir le texte d'A. Boileau et celui de N. Bednarz dans ce recueil), et pour lesquels d'une certaine façon il y a eu des choix didactiques faits et des réflexions didactiques menées.

Ce jeu ou cette interrelation entre mathématiques et didactique a permis, en quelque sorte, pour plusieurs, de dépasser la question usuelle de la linéarité ou de l'ordre de formation. À la question « quoi vient en premier pour la formation d'un enseignant de mathématiques, les mathématiques ou la didactique ? » ou à « est-ce qu'un est préalable à l'autre ? », certains diront encore que les mathématiques viennent en premier, mais y verront moins la linéarité en matière de contenus et plus en matière d'activités mathématiques. D'autres proposeront le contraire, soit la didactique avant les mathématiques, particulièrement pour l'entrée sur le sens mathématique développé dans les cours de didactique des mathématiques et leur façon d'offrir une autre manière de voir les mathématiques et de les travailler, qui pourrait permettre de bonifier l'expérience mathématique lorsque les futurs enseignants vivront leurs cours de mathématiques avancées (ou adaptées). Finalement, d'autres diront que l'ordre importe peu et que le tout peut être fait en simultané ou en alternance. Chacun des cours de mathématiques et de didactique comporte des éléments de formation mathématique, mais aussi des éléments de formation didactique, et que la confrontation des éléments de chacun à travers le parcours simultané des deux peut être bénéfique pour les futurs enseignants. Ces derniers pourront développer leur façon de vouloir aborder les mathématiques en tant que professionnels, ainsi que les questions et approches didactiques, en vivant et en comparant (de façon tacite ou explicite) les façons de faire de chacun. Ainsi, on en est venu à voir autre chose qu'un ordre logique de travail à la formation à travers ces diverses perspectives et alternatives, ce qui a permis d'apprécier à sa juste valeur l'importance de penser les questions d'articulation entre mathématiques et didactique.

3. De quelles mathématiques parle-t-on ?

Bien que plusieurs semblent s'entendre sur l'importance pour un enseignant d'avoir une bonne formation mathématique, on définit peu ce que signifie une « bonne formation mathématique ». De plus, entreprendre de la définir apparaît difficile, car celle-ci peut varier en fonction de qui répond, pour quelles raisons, dans quel contexte, etc. (voir à ce sujet Bednarz, 2010). Ainsi, peu vont s'opposer à l'importance pour un enseignant d'approfondir ses mathématiques. Mais on se demandera alors de quelles mathématiques on parle. Quelles sont les mathématiques qui sont à approfondir pour l'enseignant de mathématiques ? Cette question, malheureusement, restera en suspens tout au long du colloque[2]… Par contre, cette question mènera à deux autres questions, qui ont été travaillées durant le colloque et qui ont même été soulignées comme de nouvelles questions à continuer à travailler et à réfléchir comme communauté : « Comment se distinguent les mathématiques dans une perspective purement disciplinaire et les mathématiques dans une perspective d'enseignement ? » et « Est-ce qu'il existe différentes mathématiques ou simplement des usages différents des mathématiques ? ». Dans ce qui suit, nous soulignons quelques aspects de la façon dont ces deux questions nous apparaissent avoir été travaillées plus ou moins explicitement à l'intérieur du colloque :

2. Toutefois, son évitement a été probablement bien involontaire durant le colloque, car l'accent a surtout été mis sur l'idée d'activité mathématique comme moteur de formation mathématique, comme mentionné.

- Sans avoir à cibler précisément et fixer les contenus mathématiques des cours, une certaine réflexion sur ces contenus mathématiques pour les enseignants devrait être menée en ayant une perspective sur l'enseignement (qu'on soit formateur-didacticien ou formateur-mathématicien). C'est peut-être en ayant eu ce type de réflexion qu'H. Squalli en tant que didacticien (voir le texte d'H. Squalli dans ce recueil) et F. Gourdeau en tant que mathématicien (voir le texte de F. Gourdeau et de J. Proulx dans ce recueil) en arrivent à avoir la même activité dans le journal de bord de résolution de problèmes dans leurs cours respectifs de didactique et de mathématiques. L'entrée par une réflexion ancrée dans la pratique professionnelle de l'enseignant peut apporter un angle de formation qui ne travaille pas les mathématiques en vase clos, mais les considère en fonction du contexte d'enseignement et tente d'y être pertinent et de l'approfondir.
- La formation mathématique des enseignants de mathématiques doit préparer les enseignants aux mathématiques de la classe. Mais, en même temps, cette formation doit permettre de dépasser les mathématiques qui se font en classe (du primaire ou du secondaire, selon le cas) ou ce qui est prescrit par le programme de mathématiques ; la formation mathématique doit dépasser les mathématiques qui se font dans la classe avec les élèves. Toutefois, que peuvent bien signifier les mathématiques de la classe ou le fait de bien préparer les futurs enseignants aux mathématiques de la classe ? Est-ce que cela signifie de ne travailler que sur les contenus de la classe ou de travailler de façon réaliste aux mathématiques de la classe ? Est-ce que cela signifie d'aller plus loin que les mathématiques de la classe ? Mais est-ce vraiment alors se « préparer » aux mathématiques de la classe ? Parle-t-on davantage à ce moment-là d'amener les étudiants, sans nécessairement aller vers les mathématiques avancées, à développer des compréhensions mathématiques approfondies des contenus du programme ou des événements mathématiques se produisant en classe ? On dira beaucoup qu'« il y a une limite à se centrer uniquement sur les élèves et ce qu'ils comprennent, et qu'il faut pousser les futurs enseignants plus loin en mathématiques ». Par contre, la complexité de la question demeure dans ce que signifie « pousser plus loin » et

en référence à quelles sortes de « mathématiques ». De plus, revient la question du cadre dans lequel cela devrait être travaillé : à l'intérieur des cours de mathématiques ou de ceux de didactique ?

- Les réflexions précédentes ont contribué au questionnement sur la nature des mathématiques à la formation, et particulièrement celles proposées dans les cours de didactique. Plusieurs questions ont été soulevées pour savoir s'il se fait les mêmes mathématiques en didactique ou si ce sont des mathématiques différentes qui sont travaillées. On pense alors à la citation de Brousseau (1998) :

> Il y a un certain nombre de concepts mathématiques qui n'ont pas d'intérêt pour les mathématiciens – et qui n'ont pas, de ce fait, de statut culturel ou social : par exemple l'énumération d'une collection n'est pas un concept mathématique important et c'est pourtant un concept important pour l'enseignement. Est-ce que la didactique a le droit d'introduire dans le champ des mathématiques des concepts qui lui seraient nécessaires ? C'est un sujet dont il va falloir débattre avec la communauté mathématique et avec d'autres[3]. (p. 313)

- Plutôt que de parler de mathématiques différentes, d'autres parleront, à l'instar de S. René de Cotret (voir son texte dans ce recueil), d'usages mathématiques différents. Ainsi, en faisant de la didactique, on comprend les mathématiques sous un autre jour. Par contre, est-ce les mêmes mathématiques ? Est-ce que la didactique, un peu comme le suggère Brousseau, a ses propres intérêts mathématiques ? Et crée-t-on alors de nouvelles mathématiques, des mathématiques bien didactiques, ou est-ce uniquement des usages différents des mêmes mathématiques ? Selon ces réponses, est-ce que ce type de mathématiques est plus pertinent pour la formation des enseignants ? En quoi et pourquoi ?

3. Ces idées sont aussi traitées dans Proulx (2012).

4. Le pouvoir générateur du jeu de tensions

Bien que le souhait d'obtenir une certaine osmose ou articulation entre mathématiques et didactique était palpable durant le colloque, ce regard croisé est aussi apparu comme un lieu de tension. Ces tensions sont diverses et ont leur source dans diverses « pratiques », autant celles de l'enseignant dans sa classe au quotidien, celles du formateur-didacticien que celles du formateur-mathématicien. Qu'elles soient positives ou négatives, ces tensions ont toujours un certain pouvoir générateur, alors qu'elles nous poussent à aller plus loin et à enrichir notre compréhension du phénomène.

Un bon exemple du pouvoir générateur des tensions est relié au texte d'H. Squalli (voir son texte dans ce recueil), qui traite l'interaction entre les postures d'étudiant universitaire en mathématiques, d'enseignant de mathématiques et d'étudiant universitaire réfléchissant sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques. De ces tensions riches en réflexions potentielles sur le rôle de l'apprenant et celui de l'enseignant alors que le futur enseignant vit les deux (sinon les trois) en même temps, c'est surtout la notion de fréquentation étudiante *versus* fréquentation professionnelle des mathématiques qui se démarque. « Quelles articulations et tensions entre la pratique professionnelle et la formation en mathématiques (dans les cours de didactique et dans les cours de mathématiques) ? » Comment prendre en compte ces tensions, comment comparer les différences ? D'une certaine façon, pour le futur enseignant, il existe trois dimensions mathématiques à prendre en compte : les mathématiques avancées, les mathématiques en didactique et, finalement, les mathématiques vécues dans la classe avec les élèves. Ces trois composantes sont fondamentales dans la formation mathématique des enseignants. Le travail sur les tensions entre les trois peut permettre de faire voir et comprendre les contributions à la formation mathématique de chacune des composantes, de rendre compte de leurs ressemblances et dissemblances. Elles peuvent aussi aider les formateurs (en didactique, en mathématiques, sur le terrain) à arrimer leurs interventions autant pour s'approcher des mathématiques des mathématiques avancées, de celles en didactique et de celles du terrain : la formation mathématique ne devant pas se camper uniquement dans une perspective ou dans une autre, et elle doit toujours demeurer pertinente à elle-même sous tous ses angles (mathématiques, didactiques, pratiques).

5. Les mots de la fin…

Le sujet de la formation mathématique a été traité depuis très longtemps par les différents intervenants. Les questions de formation mathématique sont vieilles. Toutefois, continuer à les travailler aide à faire avancer les réflexions, sans nécessairement s'approcher de la réponse ultime, mais en offrant des façons de voir et de comprendre ce même phénomène sous d'autres angles. Nous croyons que les différents textes du recueil et les quelques pistes de synthèse permettent de bonifier notre compréhension de la problématique de la formation mathématique des enseignants de mathématiques ; en outre, ils offrent de nouvelles pistes de compréhension pour les futures recherches, mais aussi pour les futures pratiques de formation.

Et ces inspirations nouvelles que nous croyons possibles le sont uniquement par les acteurs eux-mêmes. C'est le chercheur qui sera influencé par ces idées et conceptualisera à sa façon les questions de formation mathématique, et c'est le formateur qui sera inspiré par ces idées et conceptualisera des pratiques de formation. Le colloque, à travers ses textes et ses discussions, a permis de mettre de l'avant l'aspect personnel, voire les croyances, concernant les questions de formation mathématique et comment telle ou telle chose est bonne ou importante pour la formation mathématique des enseignants de mathématiques. Parfois, ce fut une croyance dans la recherche et ses résultats qui guidait les discussions, parfois c'était une croyance dans « ce qui fonctionne ou a fonctionné », parfois c'étaient des sentiments profonds au point d'être palpables, ou parfois c'était un témoignage d'expérience personnelle de formé, d'étudiant en mathématiques ou même de formateur. Ainsi, en allant au-delà des contenus mathématiques pour la formation, d'une certaine façon le colloque a permis d'aller au-delà des besoins de prescriptions et de façon précise et commune de faire la formation mathématique comme communauté : il y a eu la réalisation fréquente, comme le souligne Biesta (2010), que l'éducation est plus qu'une question de recherche, mais qu'elle est aussi une question de valeurs. Les choix de formation sont ancrés dans des valeurs profondes et diverses, et la considération de ces valeurs est importante, car le formateur influence beaucoup la formation qu'il offre. Sans rendre le tout uniquement une question de valeurs où la critique en deviendrait rapidement une de « tout ne peut être bon », il y a la réalisation que la formation mathématique est variée et que ses contextes institutionnels sont variés. Cela n'anéantit pas l'intérêt de vouloir traiter des questions de formation mathématique, bien au contraire, car c'est dans ce partage par des acteurs divers avec des intentions diverses que la génération de nouvelles idées et pistes de réflexion est possible. Et cette génération d'idées, qui a le potentiel de faire penser autrement, permettra aux différents acteurs (chercheurs, formateurs, didacticiens, praticiens, etc.) d'agir avec de nouvelles orientations, ce qui mènera vers de nouvelles problématiques et phénomènes… et de nouvelles façons de travailler les questions de formation mathématique des enseignants de mathématiques ! Un programme sans fin, quoi !

Références bibliographiques

Adihou, A. et C. Arsenault (2011). Des vidéoclips qui parlent de multiplications! *Actes du 54e Congrès de l'Association Mathématique du Québec (AMQ), Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, vol. LI, nº 3, p. 9-18.

Adihou, A., C. Arsenault et P. Marchand (2006). « Réflexion sur un dispositif de formation pour le développement de compétences en mathématiques chez les futurs maîtres », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2006,* [cédérom], Sherbrooke, Éditions du CRP.

Adihou, A. et P. Marchand (2010). « Trucs mathématiques », *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, vol. 50, nº 3, p. 37-51, document disponible au <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/oct10/page037_051Atelier_Marchand.pdf>.

Adler, J., D.L. Ball, K. Krainer, F. Lin et J. Novotna. (2005). « Reflections on an emerging field : Researching mathematics teacher education », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 60, nº 3, p. 359-381.

Agathocleous, E. (2011). « Why abstract algebra for pre-service primary school teachers », *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Rzeszów (Pologne), Université de Rzeszów.

Anderson, J.R. (1995). *Learning and Memory*, New York, Wiley.

Arsenault, C. (2010). « Le spectre de la maîtresse d'école : conceptions et résistances au développement des compétences professionnelles des enseignants en mathématiques », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 121-124.

Arsenault, C. et D. Voyer (2003). « Une démarche d'autoformation au service de l'actualisation des savoirs mathématiques dans le cadre de la formation à l'enseignement », *Actes du colloque de l'Association francophone internationale de recherche scientifique en éducation (AFIRSE)*, [cédérom], Paris, AFIRSE et Commission nationale française pour l'UNESCO, p. 1-11.

Artigue, M. (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*, Paris, UNESCO, document disponible au <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf>.

Auger, R. et M. Fréchette (1988). « La définition de domaine, une étape essentielle dans l'élaboration d'un instrument de mesure », *Mesure et évaluation en éducation*, vol. 10, nº 4, p. 5-22.

Axelrod, J. (1973). *The University Teacher as Artist*, San Francisco, Jossey-Bass.

Azrou, N., D. Tanguay et F. Vandebrouck (2009). « Bilan du Groupe de travail 7 : Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2009*, Dakar, Université Cheikh Anta Diop, document disponible au <http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm>.

Baggett, P. et A. Ehrenfeucht (2008). « A one-semester laboratory course in calculus for teachers », Texte présenté au Topic Study Group 16 (Research and development in the teaching and learning of calculus) lors de ICME-11, Mexico, Université de Mexico.

Balacheff, N. (1982). « Preuve et démonstration en mathématique au collège », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3, nº 3, p. 261-304.

Ball, D.L. (1988). *The Subject Matter Preparation of Prospective Mathematics Teachers : Challenging the Myths*, Rapport RR88-3, East Lansing, National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University. Document disponible au <http://ncrtl.msu.edu/research.htm>.

Ball, D.L. (1990). « Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, nº 2, p. 132-144.

Ball, D.L. et H. Bass (2000). « Interweaving content and pedagogy in teaching and *learning* to teach : Knowing and using mathematics », dans J. Boaler (dir.), *Multiple Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematics*, Westport, Ablex, p. 83-104.

Ball, D.L. et H. Bass (2003). « Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching », *Actes de la 27e Rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (GCEDM), Edmonton, CMESG, p. 3-14.

Ball, D.L. et F.M. Forzani (2009). « The work of teaching and the challenge for teacher education », *Journal of Teacher Education*, vol. 60, p. 497-511.

Ball, D.L., S. Lubienski et D. Mewborn (2001). « Research on teaching mathematics : The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge », dans V. Richardson (dir.), *Handbook of Research on Teaching*, 4e éd., New York, Macmillan, p. 433-456.

Ball, D.L., L. Sleep, T. Boerst et H. Bass (2009). « Combining the development of practice and the practice of development in teacher education », *The Elementary School Journal*, vol. 109, nº 5, p. 458-474.

Ball, D.L., M.H. Thames et G. Phelps (2008). « Content knowledge for teaching : What makes it special ? », *Journal of Teacher Education*, vol. 59, nº 5, p. 389-407.

Barquero, B., M. Bosch et J. Gascón (2011). « "Applicationism" as the predominant epistemology at university level », *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, Rzeszów (Pologne), Université de Rzeszów.

Bauersfeld, H. (1994). « Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire », *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 20, nº 1, p. 175-198.

Beaudoin, M. (2009). « L'apprentissage par problèmes en didactique des mathématiques : évolution d'une expérience », dans N. Cody et R. Gagnon (dir.), *Apprendre autrement, l'apprentissage par problèmes*, Montréal, Les Éditions Nouvelles, p. 33-40.

Bednarz, N. (2000). « Formation continue des enseignants en mathématiques : Une nécessaire prise en compte du contexte », dans P. Blouin et L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Montréal, Québec, Éditions Modulo, p. 63-78.

Bednarz, N. (2001). « Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal », *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol. 1, nº 1, p. 61-80.

Bednarz, N. (2010). « La formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire : quelques enjeux », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 185-192.

Bednarz, N. et S. Barry (2010). « Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques comme soutien au développement professionnel des enseignants », dans C. Couture et L. Dionne (dir.), *Formation initiale et continue dans le domaine des sciences, des mathématiques et de la technologie : Vers quel développement professionnel des enseignants*, Ottawa, Presses de l'Université d'Ottawa, p. 225-253.

Bednarz, N., D. Fiorentini et R. Huang (2011). *International Approaches to Professional Development for Mathematics Teachers*, Ottawa, University of Ottawa Press.

Bednarz, N., L. Gattuso et C. Mary (1995). « Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire », *Bulletin de l'Association mathématique du Québec (AMQ)*, vol. 35, nº 1, p. 17-30, document disponible au <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives>.

Bednarz, N. et M.J. Perrin-Glorian (2003). « Formation à l'enseignement des mathématiques : articulation entre formation mathématique, didactique et pratique », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2003*, [cédérom], Tozeur, Éditions CNP.

Bednarz, N. et J. Proulx (2009). « Knowing and using mathematics in teaching : Conceptual and epistemological clarifications taking their source in teachers' practice », *For the Learning of Mathematics*, vol. 29, n° 3, p. 11-17. (Une version francophone est disponible sur le site de FLM, <http://flm.educ.ualberta.ca>, sous le titre de *Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants*.)

Bednarz, N. et J. Proulx (2010a). « De quel contexte parle-t-on ? Une entrée sur les mathématiques professionnelles des enseignants », *Actes du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM)*, Moncton, Université de Moncton, p. 184-192.

Bednarz, N. et J. Proulx (2010b). « Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : Exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques », *Éducation et Formation*, n° e-293, p. 21-36, document disponible au <http://ute3.umh.ac.be/revues>.

Bednarz, N. et J. Proulx (2011a). « Spécificité du travail mathématique de l'enseignant : Un ancrage pour la formation continue », *Actes du Colloque international sur Le travail enseignant au XXIe siècle, perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle*, Lyon, Institut national de la recherche pédagogique (INRP), document disponible au <http://www.inrp.fr/archives/colloques/travail-enseignant/contrib/25.pdf>.

Bednarz, N. et J. Proulx (2011b). « An attempt at defining teachers' mathematics of their practice through research on mathematics at work », *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, Rzeszów (Pologne), Université de Rzeszów.

Behr, M., G. Harel, T. Post et R. Lesh (1992). « Rational number, ratio, and proportion », dans D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, Macmillan, p. 296-333.

Ben-Chaim, D., Y. Keret et B.-S. Ilany (2007). « Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks : The impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, nos 4-6, p. 333-340.

Biesta, G.J.J. (2010). « Why "what works" still won't work : From evidence-based education to value-based education », *Studies in Philosophy and Education*, vol. 29, p. 491-503.

Blanchard-Laville, C. et S. Nadot (2000). *Malaise dans la formation des enseignants. Savoir et formation*, Paris, L'Harmattan, coll. « Éducation pédagogie ».

BLOCH, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, thèse de doctorat inédite, Bordeaux, Université de Bordeaux 2.

BLOCH, I. (2005). « Comment analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence dans des situations a-didactiques ? », *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, ARDM et IREM de Paris 7, p. 77-114.

BLOOM, I. (2007). « Extended analyses : Promoting mathematical inquiry with preservice mathematics teachers », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, nos 4-6, p. 399-403.

BOILEAU, A. (1996). *Notes pour le cours de Structures numériques – MAT 2700*, Montréal, Université du Québec à Montréal.

BOILEAU, A. (2001). « De la compréhension et de la certitude en mathématiques : le cas de la commutativité de la multiplication des naturels », *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, vol. XLI, no 1, p. 19-30, document disponible au <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives/2001/1/2001-1-part8.pdf>.

BOILEAU, A. (2006a). « Quand les segments ressemblent à des escaliers… », dans R. Pallascio et D. Doddridge (dir.), *Montrez ces mathématiques que je ne saurais voir*, Montréal, Éditions Nouvelles, p. 88-96, complément disponible au <http://www.math.uqam.ca/~boileau/Segments.html>.

BOILEAU, A. (2006b). « La double nature du produit vectoriel », *Actes du Congrès de l'Association mathématique du Québec*, *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, vol. XLVII, no 3, p. 19-30, complément disponible au <http://www.math.uqam.ca/~boileau/AMQ2006.html>.

BOILEAU, A. (2009). « Découverte mathématique à la polyvalente », *Accromath*, vol. 4, hiver, p. 16-19, document disponible au <http://accromath.uqam.ca/contents/pdf/decouverte.pdf>.

BOILEAU, A. et M. GARANÇON (1993). « Géométrie et formation des maîtres au secondaire », *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, mars-mai, p. 40-49, document disponible au <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives/1993/1/1993-1-part15.pdf>.

BOILEAU, A. et M. GARANÇON (1998). « L'aire : une notion plus riche qu'il n'y paraît », *Envol*, no 104, p. 37-44, document disponible au <http://www.math.uqam.ca/~boileau/Textes/Aires.pdf>.

BOILEAU, A. et M. GARANÇON (2007). *Mathématiques contextualisées et technologie : le cas des hypothèques*, Atelier présenté au colloque du GRMS, Trois-Rivières, mai 2007, complément disponible au <http://www.math.uqam.ca/~boileau/GRMS2007.html>.

BOILEAU, A. et M. GARANÇON (2009). *Outils informatiques pour les enseignants de mathématiques*, Montréal, Éditions Loze-Dion, complément disponible au <http://www.math.uqam.ca/~expresso/LivreLogicielsOutils>.

Bressoud, D.M. (2008). *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*, Cambridge, Cambridge University.

Bressoud, D.M. (2011). « Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus », *American Mathematical Monthly*, vol. 118, nº 2, p. 99-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée sauvage.

Burris, A. (2005). *Understanding the Math You Teach : Content and Methods for Prekindergarten through Grade 4,* Upper Saddle River, Pearson.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers : Learning About Learning Mathematics,* Dordrecht, Kluwer.

Butlen, D. et P. Masselot (2011). « Que nous révèlent des recherches sur l'analyse des pratiques des professeurs des écoles débutants nommés dans des écoles de milieux défavorisés sur la production des difficultés des élèves, sur le processus de différenciation scolaire et sur les réponses apportées à deux grandes questions de la profession ? », texte présenté dans le cadre du colloque réalisé dans le cadre de l'ACFAS, Sherbrooke, Université de Sherbrooke.

Campbell, P.F. (1996). « Empowering children and teachers in the elementary mathematics classrooms of urban schools », *Urban Education*, vol. 30, nº 4, p. 449-475.

Carpenter, T.P., M.K. Corbitt et H.S. Jr. Kepner (1981). « What are the chances of your students knowing probability ? », *Mathematics Teacher*, vol. 74, nº 5, p. 342-345.

Carpenter, T.P. et J.M. Moser (1984). « The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 15, nº 3, p. 179-202.

Carpenter, T.P., E. Fennema et M.L. Franke (1996). « Cognitively guided instruction : A knowledge base for reform in primary mathematics instruction », *The Elementary School Journal*, vol. 97, nº 1, p. 3-20.

Carpenter, T.P., E. Fennema, M.L. Franke, L. Levi et S.B. Empson (1999). *Children's Mathematics : Cognitively Guided Instruction*, Portsmouth, Heinemann.

Carpenter, T.P., E. Fennema, P.L. Peterson, C.-P. Chiang et M.L. Franke (1989). « Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching : An experimental study », *American Educational Research Journal*, vol. 26, nº 4, p. 499-531.

Castela, C. (2009). « À propos des articulations entre les mathématiques universitaires et celles du secondaire », *Actes du XVIe Colloque national de la Commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques (CORFEM)*, Caen, IUFM de l'Université de Caen Basse-Normandie, p. 77-80.

CHAPMAN, O. (2007). « Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, n^{os} 4-6, p. 341-349.

CHEVALLARD, Y. (1984). « Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, première partie », *Petit x*, vol. 5, p. 51-94. Document disponible au <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/5/5x3.pdf>.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989a). « Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel », *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble*, Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1989b). *Arithmétique, algèbre, modélisation : Étapes d'une recherche,* IREM d'Aix-Marseille, n^{o} 16.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, 2^{e} éd., Grenoble, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992). « Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique ». *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), p. 73-112.

CHRISTOU, C., N. MOUSOULIDES, M. PITTALIS et D. PITTA-PANTAZI (2005). « Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment », *The Montana Mathematics Enthusiast*, vol. 2, n^{o} 2, p. 125-143, document disponible au <http://www.math.umt.edu/tmme/vol2no2/TMMEv2n2a5.pdf>.

COMITÉ D'ÉVALUATION DES COMPÉTENCES EN MATHÉMATIQUES – CECM (2008). Évaluation de la culture et des compétences mathématiques : guide de l'étudiant. Baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement primaire (7590), document non publié, Rimouski, Université du Québec à Rimouski.

CONNE, F. (1989). « L'articulation des contenus et des moyens et leur double nature mathématique et didactique dans l'enseignement des mathématiques et son évolution », *Bulletin de l'Association mathématique du Québec,* vol. 29, n^{o} 3, p. 8-14, document disponible au <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives>.

CONNE, F. et G. LEMOYNE (1999). « Introduction », dans G. Lemoyne et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, p. 7-28.

COONEY, T. et H. WIEGEL (2003). « Examining the mathematics in mathematics teacher education », dans A. Bishop *et al.* (dir.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer, p. 795-828.

CORRIVEAU, C. (2010). « Que signifie faire des mathématiques dans un cours de didactique des mathématiques ? », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 159-163.

Corriveau, C. et D. Tanguay (2007). « Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'algèbre linéaire comme indicateurs », *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, vol. 48, nº 1, p. 6-25, document disponible au <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mar07/Article %20- %20Tanguay-Corriveau.pdf>.

Courant, R. et H. Robbins (1969). *What is Mathematics ?*, Oxford, Oxford University Press.

Crespo, S. (2000). « Seeing more than right and wrong answers : Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work », *Journal of Mathematics Teacher Education,* vol. 3, nº 2, p. 155-181.

Cyr, S. et L. DeBlois (2007). « Étude de la compréhension des composantes de la notion de corrélation chez des futurs maîtres du secondaire », *Petit x*, vol. 75, p. 50-73, document disponible au <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/75/75x4.pdf>.

Davis, B. et E. Simmt (2004). « "Mathématiques pour l'enseignement" : une recherche longitudinale sur les connaissances mathématiques des enseignants (ou celles dont ils auraient besoin) », *Actes du colloque 2004 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, Québec, GDM, p. 7-21, document disponible au <http://turing.scedu.umontreal.ca/gdm/documents/ActesGDM2004.pdf>.

Davis, B. et E. Simmt (2006). « Mathematics-for-teaching : An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, nº 3, p. 293-319.

Davydov, V. (1991). « A psychological analysis of the operation of multiplication », dans V. Davydov et L.P. Steffe (dir.), *Psychological Abilities of Primary School Children in Learning Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, p. 9-85.

Davydov, V. et L.P. Steffe (dir.) (1991). *Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 6. Psychological Abilities of Primary School Children in Learning Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

De Corte, E. (2004). « Mainstream and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction », *Applied Psychology : An International Review*, vol. 53, nº 2, p. 279-310.

de Saint-Exupéry, A. (1948). *Citadelle*, Paris, Gallimard.

de Saint-Exupéry, A. (1953). *Carnets*, Paris, Gallimard.

DeBlois, L. (2006). « Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 62, p. 307-329.

DeBlois, L. (2008). « Alterner entre différentes postures épistémologiques pour complexifier les conceptions de l'enseignement des mathématiques », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2006*, [cédérom], Sherbrooke, Éditions du CRP.

DeBlois, L. (2010). « Développer une formation à l'enseignement : Trois entrées possibles ». dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 31-37.

DeBlois, L. et J.-F. Maheux (2005). « When things don't go exactly as planned : Leveraging from student teachers' insights to adapted interventions and professional practice », *Contributed Papers, Demonstrations and Work Sessions : The Fifteenth ICMI Study – The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, [cédérom], Sao Paulo, document disponible au <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html>.

DeBlois, L. et H. Squalli (2002). « Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres au primaire », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 50, nº 2, p. 212-237.

DeBlois, L. et N. Vézina (2001). « Conceptions des futurs maîtres du primaire relativement à des activités d'enseignement en mathématiques », *Canadian Journal of Higher Education*, vol. 31, nº 2, p. 103-134.

DeBlois, L. *et al.* (2009). « De la formation des enseignants à la relation entre apprentissage et enseignement. Synthèse du groupe de travail 2 et 9 », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2009*, Dakar, Université Cheikh Anta Diop, document disponible au <http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm>.

Delahaye, J.-P. (2000). *Merveilleux nombres premiers : Voyage au cœur de l'arithmétique*, Paris, Belin, coll. « Pour la science ».

Derrida, J. (1978). « Violence and metaphysics : An essay on the thought of Emmanual Levinas », dans J. Derrida (dir.), *Writing and Difference* (trad. par A. Bass), Chicago, University of Chicago Press, p. 79-102.

Di Falco, J.-M. et F. Beigbeder (2004). *Je crois, Moi non plus : Dialogue entre un évêque et un mécréant, arbitré par René Guitton,* Paris, Calmann-Lévy.

Durand-Guerrier, V., P. Boero, N. Douek, S. Epp et D. Tanguay (à paraître). « Argumentation and proof in the mathematics classroom », dans G. Hanna et M. de Villiers (dir.), *ICMI Study-19 : Proof and Proving in Mathematics Education*.

Eco, U. (1979). *Lector in fabula : la cooperazione interpretativa nei testi narrativi*, Milano, Bompiani.

Empson, S.B. (1995). « Using sharing situations to help children learn fractions », *Teaching Children Mathematics,* vol. 2, p. 110-114.

Empson, S.B. (1999). « Equal sharing and shared meaning : The development of fraction concepts in a first-grade classroom », *Cognition and Instruction*, vol. 17, p. 283-342.

Empson, S.B. (2001). « Equal sharing and the roots of fraction equivalence », *Teaching Children Mathematics*, vol. 7, p. 421-425.

Even, R. et D.L. Ball (dir.) (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics : The 15th ICMI Study*, New York, Springer.

Fennema, E. et M.L. Franke (1992). « Teachers' knowledge and its impact », dans D.A. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning : A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, New York, Macmillan, p. 147-164.

Fischbein, E., R. Jehian et D. Cohen (1995). « The concept of irrational number in high-school students and prospective teachers », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29, nº 1, p. 29-44.

Flowers, J., R. Rubenstein, T. Grant et K. Kline (2005). « A reasoning and problem solving-based curriculum for elementary mathematics teachers : Visions and perspectives », *Contributed Papers, Demonstrations and Work Sessions : The Fifteenth ICMI Study – The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, [cédérom], São Paulo, document disponible au <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html>.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Kluwer.

Garfield, J. et A. Ahlgren (1988). « Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics : Implications for research », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, nº 1, p. 44-63.

Gigerenzer, G. (2002). *Calculated Risks : How to Know When Numbers Deceive You*, New York, Simon and Schuster.

Ginsburg, H.P. (1997). « The myth of the deprived child : New thoughts on poor children », dans A.B. Powell et M. Frankenstein (dir.), *Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*, Albany, State University of New York Press, p. 129-155.

Ginsburg, H.P., S.F. Jacobs et L.S. Lopez (1998). *The Teacher's Guide to Flexible Interviewing in the Classroom : Learning What Children Know About Math*, Toronto, Allyn and Bacon.

Giraldo, V., A.S. González-Martín et F. Santos (2009). « An analysis of the introduction of the notion of continuity in undergraduate textbooks in Brazil », *Proceedings of 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Thessalonique, PME, vol. 3, p. 81-88.

Glaeser, G. (1981). « Épistémologie des nombres relatifs », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 2, nº 3, p. 303-346.

Godot, K. et D. Grenier (2004). « Research situations for teaching : A modelization proposal and examples », *Proceedings of 10th International Congress for Mathematics Education*, Copenhague, Université de Copenhague.

González-Martín, A.S. (2010). « The concept of series : Teachers' conceptions and teaching practices », *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Belo Horizonte, PME, vol. 3, p. 33-40.

GOURDEAU, F. (2010). « Émotion, réflexion et action : mathématiques et enseignement », *Actes de la rencontre annuelle 2010 du Groupe canadien d'études en didactique des mathématiques*, Burnaby, Simon Fraser University, GCEDM, p. 123-135, document disponible au <http://publish.edu.uwo.ca/cmesg/pdf/CMESG2010.pdf>.

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2001a). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire*, Québec, Ministère de l'Éducation, document disponible au <http://www.meq.gouv.qc.ca/lancement/prog_formation/index.htm>.

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2001b). *La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles*, Québec, Gouvernement du Québec, document disponible au <http://www.mels.gouv.qc.ca/dftps/interieur/pdf/formation_ens.pdf>.

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2002). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire. Premier cycle*. *(Document de travail pour fins de validation)*, Québec, Ministère de l'Éducation, document disponible au <http://www.mels.gouv.qc.ca/lancement/prog_formation_sec1ercycle/index.htm>.

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2003). *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, Québec, Gouvernement du Québec.

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2007). *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire deuxième cycle*, Québec, Gouvernement du Québec.

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2008). *Progression des apprentissages au primaire*, Québec, Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, document disponible au <http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/mathematique/#NDBDP>.

GROUPE AHA (1999). *Vers l'infini pas à pas : approche heuristique de l'analyse*, Bruxelles, De Boeck-Wesmael.

GRUGEON, B. (2008). « Partie 6 – Chapitre 2 – Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM ? », dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse, Éditions Octares.

HACHE, C., J. PROULX et M.M. SAGAYAR (2009). « Synthèse du GT#1 – Formation mathématique des enseignants : contenus et pratiques », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2009*, Dakar, Université Cheikh Anta Diop, document disponible au <http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm>.

HANEY, W., G. MADAUS et A. KREITZER (1987). « Charms talismanic : Testing teachers for the improvement of American education », dans E.Z. Rothkopf (dir.), *Review of Research in Education*, vol. 14, Washington, American Educational Research Association, p. 169-238.

HEIDEGGER, M. (1931). « L'origine de l'œuvre d'art », dans M. Heidegger, *Chemins qui ne mènent nulle part* (trad. par N. Rialland), Paris, Gallimard, document disponible au <http://www.rialland.org/heidegger>.

HENDERSON, K.B. (dir.) (1973). *Geometry in the Mathematics Curriculum, Thirty-Sixth Yearbook*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

HÉRAUD, B. (2000). « Quelles approches doit-on privilégier dans la formation initiale des enseignants au primaire pour l'enseignement des mathématiques ? », dans P. Blouin et L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Montréal, Modulo, p. 41-52.

HIEBERT, J. *et al.* (2007). « Preparing teachers to learn from teaching », *Journal of Teacher Education*, vol. 58, n° 1, p. 47-61.

HILL, H.C. et D.L. BALL (2009). « The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching », *Phi delta kappan*, vol. 91, n° 2, p. 68-71, document disponible au <http://estaffroom.sccoe.org/file.php/1/Principal_Networks/Elementary_Principals_Network_Files/Kaplan_math_article.pdf>.

HILL, H.C., L. SLEEP, J. LEWIS et D.L. BALL (2007). « Assessing teachers' mathematical knowledge. What knowledge matters and what evidence counts ? », dans F.K. Lester (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, National Council of Teachers of Mathematics and Information Age Publishing, vol. 1, p. 111-155.

HILL, J.C. (1985). « The teacher as artist : A case for peripheral supervision », *The Educational Forum*, vol. 49, n° 2, p. 183-187.

HITT, F. (1994). « Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions », *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 16, n° 4, p. 10-20.

HODGSON, B. (2001). « The mathematical education of school teachers : Roles and responsibilities of university mathematicians », dans D. Holton (dir.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, Amsterdam, Kluwer Academic Publishers, p. 501-518.

HSU, E., J. KYSH, K. RAMAGE et D. RESEK (2007). « Seeking big ideas in algebra : The evolution of a task », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, n^os^ 4-6, p. 325-332.

HUILLET, D. (2009). « Mathematics for teaching : An anthropological approach and its use in teacher training », *For the Learning of Mathematics*, vol. 29, n° 3, p. 4-10.

INGERSOLL, R. (1999). « The problem of underqualified teachers in American secondary schools », *Educational Researcher*, vol. 28, n° 2, p. 26-37.

JENKINS, O.F. (2010). « Developing teachers' knowledge of students as learners of mathematics through structured interviews », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 13, n° 2, p. 141-154.

KAHANE, J.-P. (2003). *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques – La formation des maîtres en mathématiques*, Paris, Centre national de documentation pédagogique, document disponible au <http://smf4.emath.fr/en/Enseignement/CommissionKahane>.

Khan, S. (2010). « Performing oneself differently : A mathemaesthethician's responsibility », *Educational Insights*, vol. 13, nº 1, p. xx-xx, document disponible au <http://ccfi.educ.ubc.ca/publication/insights/v13n01/articles/khan/index.html>.

Kilpatrick, J. (2009). « Intervention on the double discontinuity and Felix Klein », *Actes du 4th Seminario International de Pesquisa em Educaçao Mathematica (SIPEM),* Brasilia, Université de Brasilia.

Klein, F. (1932a). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint : Arithmetic, Algebra, Analysis* (trad. par E.R. Hedrick et C.A. Noble), New York, Macmillan.

Klein, F. (1932b). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint : Geometry* (trad. par E.R. Hedrick et C.A. Noble), New York, Macmillan.

Kribs-Zaleta, C. (2006). « Invented strategies for division of fractions », *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, Universidad Pedagogica Nacional, p. 371-376, document disponible au <http://www.pmena.org/2006/cd/book.pdf>.

Krummheuer, G. (1992). « Formats of argumentation in the mathematics classroom », document présenté à la 7th ICME (International Congress of Mathematics Education) conference in the working group 7 (Language and communication in the mathematics classroom), Québec, Université Laval.

Krzywacki-Vainio, H. (2008). « Pre-service mathematics teacher education orienting the formation of teacher identity mathematical education as the basis for development », *ICME 11 The International Congress on Mathematical Education. TSG 29 : The pre-service mathematical education of teachers*, Monterrey, CBT/McGraw-Hill, document disponible au <http://tsg.icme11.org/tsg/show/29>.

Lajoie, C. (2010). « Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l'UQAM », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 101-119.

Lajoie, C. et E. Barbeau (2000). « Des cours de mathématiques pour les futurs enseignants et enseignantes du primaire », *Actes de la 24e Rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques*, Edmonton, GCEDM, p. 35-41, document disponible au <http://publish.edu.uwo.ca/cmesg/pdf/CMESG2000.pdf>.

Lajoie, C. et R. Pallascio (2001). « Le jeu de rôles : une situation-problème en didactique des mathématiques pour le développement de compétences professionnelles », *Actes de colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, Montréal, GDM, p. 120-132.

Lamon, S. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding : Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*, Mahwah, Erlbaum.

Lang, V. (1999). *La professionalisation des enseignants*, Paris, Presses Universitaires de France.

Leapard, B.B. (2008). « Using think-aloud to examine pre-service elementary teachers' visualization of fractional concepts », *The Scholarship of Teaching and Learning at Eastern Michigan University*, vol. 2, nº 1, p. 105-131, document disponible au <http://commons.emich.edu/cgi/viewcontent.cgi ?article=1015&context=sotl>.

Lebesgue, H. (1932). « La mesure des grandeurs », *L'Enseignement Mathématique*, vol. 31, nº 1, p. 173-206.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Version PDF au <http://retro.seals.ch>, *L'Enseignement Mathématique*, vol. 31 à 34.

Legardez, A. (2004). « L'utilisation de l'analyse des représentations sociales dans une perspective didactique. L'exemple de questions économiques », *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 30, nº 3, p. 647-665.

Legrand, P. (1997). « Peut-on apprendre à enseigner les mathématiques ? », dans P. Legrand (dir.), *Profession enseignante, Les maths en collège et lycée*, Paris, Hachette Éducation, p. 9-11.

Leikin, R. (2006). « Learning by teaching : The case of Sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher », dans R. Zazkis et S. Campbell (dir.), *Number Theory in Mathematics Education : Perspectives and Prospects*, Mahwah, Erlbaum, p. 115-140.

Lemay, F. (1978). *Genèse des systèmes de nombres à partir de l'idée de mesure*, Québec, Laboratoire de didactique de la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université Laval.

Lemoyne, G. (2010). « Les jeux de rôles dans le cadre de la formation des enseignants du primaire en mathématiques : une prise en compte de la complexité de la formation », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 115-119.

Li, Y., Y. Ma et J. Pang (2008). « Mathematical preparation of prospective elementary teachers : Practices in selected education systems in East Asia », dans P. Sullivan et T. Wood (dir.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 1, Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development,* Rotterdam, Sense Publishers, p. 37-62.

Liljedahl, P., E. Chernoff et R. Zaskis (2007). « Interweaving mathematics and pedagogy in task design : A tale of one task », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, nºs 4-6, p. 239-249.

Liljedahl, P. *et al.* (2009). « Components of mathematics teacher training », dans R. Even et D.L. Ball (dir.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, New York, Springer, p. 25-33.

Lloyd, G.M. et S.L. Behm (2005). « Preservice elementary teachers' analysis of mathematics instructional materials », *Action in Teacher Education*, vol. 26, nº 4, p. 48-62, document disponible au <http://filebox.vt.edu/s/sbehm/articles/Lloyd_Behm_ATE_2005.pdf>.

Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament : How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form*, New York, Bellevue Literary Press.

Luk, H.S. (2005). « The gap between secondary school and university mathematics », *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 36, nos 2-3, p. 161-174.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics : Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates.

Maheux, J.-F. (2010). *How Do We Know ?*, Thèse de doctorat, Victoria, University of Victoria.

Mailer, N. (1988). *Le combat du siècle*, Paris, Clancier-Guénaud.

Mapolelo, D.C. (1999). « Do pre-service primary teachers who excel in mathematics become good mathematics teachers ? », *Teaching and Teacher Education*, vol. 15, nº 6, p. 715-725.

Marchand, P. (2010). « Formation initiale des maîtres au primaire et en adaptation scolaire et sociale : quelle formation mathématique ? », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 11-42.

Margolinas, C., L. Coulange et A. Bessot (2005). « What can the teacher learn in the classroom ? », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 59, nos 1-3, p. 205-234.

Martinand, J.-L. (1981). « Pratiques sociales de référence et compétences techniques. À propos d'un projet d'initiation aux techniques de fabrication mécanique en classe de quatrième », dans A. Giordan (dir.), *Diffusion et appropriation du savoir scientifique : enseignement et vulgarisation*, Paris, Université Paris 7, p. 149-154.

Martinand, J.-L. (1987). « Pratiques de référence, transposition didactique et savoirs professionnels en sciences et techniques », *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, nº 2, p. 23-35.

Mary, C. et H. Squalli (2006). « Dispositif de formation à l'enseignement en adaptation scolaire et sociale, Université de Sherbrooke », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2006*, [cédérom], Sherbrooke, Éditions du CRP.

Mason, J., L. Burton et K. Stancey (1994). *L'esprit mathématique* (trad. par L. Collet), Montréal, Éditions Modulo.

Mason, J. et M. Spence (1999). « Beyond mere knowledge of mathematics : The importance of knowing-to act in the moment », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, nos 1-3, p. 135-161.

Matheron, Y. (2011). *Former des enseignants de mathématiques à l'école, au collège et au lycée : approche fondée sur une dynamique d'étude et de recherche*, Lyon, INRP, document disponible au <http://www.inrp.fr/formation-formateurs/catalogue-des-formations/formations-2010-2011/former-des-enseignants-de-mathematiques-a-l2019ecole-au-college-et-au-lycee/formation-inrp-28-fev.-au-4-mars-2011.pdf>.

McClain, K. (2003). « Supporting preservice teachers' understanding of place value and multidigit arithmetic », *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 5, no 4, p. 282-306.

Moreira, P.C. et M.M. David (2005). « Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice : A revealing confrontation », *Contributed Papers, Demonstrations and Work Sessions : The Fifteenth ICMI Study – The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, [cédérom], São Paulo, document disponible au <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html>.

Moreira, P.C. et M.M. David (2008). « Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice : Some conflicting elements », *Journal for Mathematics Teacher Education*, vol. 11, no 1, p. 23-40.

Morin, M.-P. et L. Theis (2006). « Mesures d'aide en mathématiques pour soutenir les étudiantes et les étudiants de la formation initiale qui présentent des difficultés », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2006*, [cédérom], Sherbrooke, Éditions du CRP.

Moyer, P.S. et E. Milewicz (2002). « Learning to question : Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 5, no 4, p. 293-315.

Mura, R. (1994). « Les didacticiens et les didacticiennes au Canada : portrait de famille », *Actes de la rencontre annuelle 1994 du Groupe canadien d'études en didactique des mathématiques, Université de Régina, Saskatchewan,* GCEDM, p. 91-113.

Nantais, N. (2000). « Vers une formation des enseignants mieux intégrée en didactique des mathématiques », dans P. Blouin et L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Montréal, Modulo, p. 82-86.

Neyland, J. (2001). *An ethical critique of technocratic mathematics education : Towards an ethical philosophy of mathematics education*, Wellington, Victoria University, thèse de doctorat non publiée.

Newton, K.J. (2008). « An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions », *American Educational Researcher*, vol. 45, no 4, p. 1080-1110.

OCDE (2004). *Apprendre aujourd'hui, réussir demain – Premiers résultats de PISA 2003*, Paris, OCDE, document disponible au <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/48/60/34472904.pdf>.

Opolot-Okurut, C. (2005). « Teacher preparation programmes and early years of mathematics teaching in Uganda », *Contributed Papers, Demonstrations and Work Sessions : The Fifteenth ICMI Study – The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, [cédérom], São Paulo, document disponible au <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html>.

Osana, H.P., G.L. Lacroix, B.J. Tucker et C. Desrosiers (2006). « The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematical tasks », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 9, nº 4, p. 347-381.

Osana, H.P., V. Rayner, C. Desrosiers et A. Lévesque (2007). *The Specialized Mathematical Knowledge of Preservice Teachers,* Affiche présentée au congrès annuel de la Canadian Psychological Association, Ottawa, Université d'Ottawa.

Osana, H.P. et D. Royea (sous presse). « Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions : A view from a small-scale intervention study », *Journal of Mathematical Behavior*.

Osana, H.P. et A. Sierpinska (2011). « Toward common ground : A framework for the investigation of mathematics methods courses », *Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Reno, University of Nevada.

Osana, H.P. *et al.* (2010). *Construction of a Framework for Studying and Planning Elementary Mathematics Methods Courses*, Montréal, Canadian Society for the Study of Education.

Pallascio, R., R. Allaire et L. Lafortune (1996). « Formation des maîtres au primaire : un nouveau cours de mathématiques », dans R. Pallascio (dir.), *Les mathématiques à la confluence des sciences et des techniques*, Québec, Le Griffon d'argile, p. 1-10.

Pastré, P., P. Mayen et G. Vergnaud (2006). « Note de synthèse. La didactique professionnelle », *Revue française de pédagogie*, vol. 154, mars, p. 145-198, document disponible au <http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/revue-francaise-de-pedagogie/RF154-11.pdf>.

Piaget, J. (1970). *Psychologie et épistémologie*, Paris, Denoël.

Pian, J. (1999). « Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels », *Cahier de Didirem*, vol. 34, nº 34, p. 1-44.

Pineau, E.L. (1994). « Teaching is performance : Reconceptualizing a problematic metaphor », *American Educational Research Journal*, vol. 31, nº 1, p. 3-25.

Pólya, G. (1962). *Comment poser et résoudre un problème* (trad. par C. Mesnage), Paris, Dunod.

Pólya, G. (1965). *Let Us Teach Guessing : A Demonstration with George Pólya,* film, Washington, Mathematical Association of America.

Posner, G. J., K.A. Strike, P.W. Hewson et W.A. Gertzog (1982). Accommodation of a scientific conception: Towards a theory of conceptual change. « Science Education », *66*(2), p. 211-227.

Prestage, S. et P. Perks (2007). « Developing teacher knowledge using a tool for creating tasks for the classroom », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, n^os^ 4-6, p. 381-390.

Proulx, J. (2010). « Reconnecter les futurs enseignants avec les mathématiques du secondaire : travailler autour de conceptualisations riches en “faisant” des mathématiques », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 129-152.

Proulx, J. (2012). « Didactique des mathématiques ou mathématiques de la didactique ? », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2012*, Genève, Suisse.

Proulx, J. et N. Bednarz (2010). « Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1. Réflexions fondées sur une analyse des recherches », *Em Teia Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica, Iberoamericana*, vol. 1, n^o^ 1, p. 1-24, document disponible au <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia>.

Proulx, J. et L. Gattuso (dir.) (2010). *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP.

Proulx, J. et E. Simmt (2011). « Reflecting on hegemonic structures in teacher education programs through the use of empirical and historical research studies », dans T. Falkenberg et H. Smith (dir.), *The Question of Evidence in Research in Teacher Education in the Context of Teacher Education Program Review in Canada*, Winnipeg, Faculty of Education of the University of Manitoba, vol. 2, p. 215-229, <http://www.umanitoba.ca/education/TEResearch/Conference%202010.html>.

Rayner, V. *et al.* (2011). « Investigating the impact of the classroom environment on the mathematical development of first-grade children », Communication présentée au 2011 Meeting of the Society for Research in Child Development, Montréal, Université.

René de Cotret, S. (2007). « Un programme double : “Bouchons les trous” un environnement informatisé pour le travail de mise en équations algébriques et Esquisse d'une didactique du sens commun », dans G. Geudet et Y. Matheron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006*, ARDM et IREM Paris VII, p. 271-312.

René de Cotret, S. (2011). « Des domaines d'expérience au sens commun, des ingénieries du quotidien ? », dans C. Margolinas *et al.* (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, Grenoble, La Pensée sauvage, p. 150-172.

René de Cotret, S. et R. Larose (2005). « La didactique du sens commun : pour un retour dans la cité… », *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec 2005*, Montréal, Université du Québec à Montréal, p. 47-59.

Rey, B. (2007). « Autour du mot “contenu” », *Recherche et formation*, vol. 55, p. 119-133, document disponible au <http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/recherche-et-formation/RR055-09.pdf>.

Reys, R.E. *et al.* (2009). *Helping Children Learn Mathematics*, 9e éd., New York, Wiley.

Robert, A. (2008). « Partie 6 – Chapitre 1 – Des éléments généraux », dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse, Éditions Octares, p. 373-382.

Rosenhouse, J. (2009). *The Monty Hall Problem. The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brain Teaser*, New York, Oxford University Press.

Rosenthal, J. (2005). *Struck by Lightning. The Curious World of Probabilities*, Toronto, Harper Collins.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*, Paris, Didier Hatier.

Rowland, T., A. Thwaites et P. Huckstep (2005). « The knowledge quartet : A framework for reflection, discussion and professional development », *Contributed Papers, Demonstrations and Work Sessions : The Fifteenth ICMI Study – The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, [cédérom], São Paulo, document disponible au <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html>.

Saussez, F. (2005). « Entre disciplines scolaires et disciplines universitaires, l'affiliation des enseignants de l'enseignement secondaire supérieur en devenir à des cultures disciplinaires », texte présenté au Symposium REF, Montpellier, Université Montpellier 1.

Seymour, J.R. et R. Lehrer (2006). « Tracing the evolution of pedagogical content knowledge as the development of interanimated discourses », *Journal of the Learning Sciences*, vol. 15, nº 4, p. 549-582.

Sherin, M.G. et S.Y. Han (2004). « Teacher learning in the context of a video club », *Teaching and Teacher Education*, vol. 20, nº 2, p. 163-183.

Shiqi, L., H. Rongjin et S. Hyunyong (2008). « Discipline knowledge preparation for prospective secondary mathematics teachers : An East Asian perspective », dans P. Sullivan et T. Wood (dir.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 1, Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*, Rotterdam, Sense Publishers, p. 63-86.

Shulman, L.S. (1986). « Those who understand : Knowledge growth in teaching », *Educational Researcher*, vol. 15, nº 2, p. 4-14.

Shulman, L.S. (1987). « Knowledge and teaching : Foundations of the new reforms », *Harvard Educational Review*, vol. 57, nº 1, p. 1-22.

Sierpinska, A. (2011). « Research into elementary mathematics methods courses in preservice teacher education. Plenary lecture », *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, Rzeszow (Pologne), Université de Rzeszow.

Silver, E.A. et M.K. Stein (1996). « The QUASAR project : The "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middles schools », *Urban Education*, vol. 30, nº 4, p. 476-521.

Silver, E., L. Clark, H. Ghousseini, B. Strawhun, C. Charalamabous et J. Sealy (2007). « Where is the mathematics ? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, nºs 4-6, p. 261-277.

Smida, H., O. Rouan, M.A. Ould Sidaty et M. Abdelli (2007). « Les dispositifs de formation des enseignants en mathématiques des pays du Maghreb face aux défis de l'école », *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol. 7, nºs 2-3, p. 209-230.

Squalli, H. (2002). « Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques », *Instantanés mathématiques*, vol. 39, p. 4-13.

Squalli, H. (2010). « Quelle articulation entre formation mathématique, formation didactique et formation pratique dans la formation des maîtres ? », dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke, Éditions du CRP, p. 153-158.

Stanislavski, C. (1984). *La formation de l'acteur*, Paris, Payot.

Star, J.R. et S.K. Strickland (2007). « Learning to observe : Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 11, nº 2, p.107-125.

Stein, M.K. et M.S. Smith (1998). « Mathematical tasks as a framework for reflection : From research to practice », *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 3, nº 4, p. 268-275, document disponible au <http://blog.ncue.edu.tw/sys/lib/read_attach.php ?id=3954>.

Stephens, A.C. (2008). « What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers ? », *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 27, nº 1, p. 33-47.

Stockero, S.L. (2008). « Using a video-based curriculum to develop a reflective stance in prospective mathematics teachers », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 11, nº 5, p. 373-394.

Sullivan, P. et T. Wood (2008). « Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development », dans K. Krainer et T. Woods (dir.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education : Volume 1*, Rotterdam, Sense Publishers.

Swars, S., L. Hart, S. Smith, M. Smith et T. Tolar (2007). « A longitudinal study of elementary pre-service teachers' mathematical beliefs and content knowledge », *School Science and Mathematics*, vol. 107, nº 8, p. 325-335.

TANGUAY, D. et D. GRENIER (2010). « Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation », *For the Learning of Mathematics*, vol. 30, nº 3, p. 36-42.

TATTO, M.T., S. LERMAN et J. NOVOTNA (2009). « Overview of teacher education systems across the world », dans R. Even et D.L. Ball (dir.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, New York, Springer, p. 15-24.

THEIS, L. et C. MARY (à paraître). « Implicites dans la tâche mathématique : quelles conséquences sur l'activité de l'élève ? », *Actes du Colloque CREAS-LIRDEF* (3es Rencontres Montpellier – Sherbrooke) : La classe de sciences, mathématiques et technologies comme objet d'étude : quels problématiques, cadres de références et méthodologies et pour quels résultats ?, Sherbrooke, Université de Sherbrooke, 6 au 8 octobre 2010, document disponible au <http://creas.educ.usherbrooke.ca/Archives/Actes_Sherbrooke-Montpellier.pdf>.

THEIS, L., M.-P. MORIN, J. BERNIER et Y. TREMBLAY (2006). « Les impacts des connaissances mathématiques sur l'attitude envers son enseignement des futurs enseignants du primaire », *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2006*, [cédérom], Sherbrooke, Éditions du CRP.

THIBAULT, M. (2011). *L'apprentissage des probabilités par des élèves de niveau secondaire dans une séquence d'enseignement basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent : émergence de conceptions*, Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal.

THURSTON, W.P. (1994). « On proof and progress in mathematics », *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 30, nº 2, p. 161-177, document disponible au <http://www.ams.org/journals/bull/1994-30-02/S0273-0979-1994-00502-6/S0273-0979-1994-00502-6.pdf>.

TIROSH, D. (2000). « Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions : The case of division of fractions », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, nº 1, p. 5-25.

TOLUK-UÇAR, Z. (2009). « Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing », *Teaching and Teacher Education*, vol. 25, nº 1, p. 166-175.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL – UQAM (1977-1978). *Annuaire des programmes et des cours*, Montréal, UQAM, document disponible au <http://www.registrariat.uqam.ca/Pdf/annuaire/annuaire_7778.pdf>.

VAN DER MAREN, J.-M. et L. POIRIER (2007). « Produire des savoirs en pédagogie, avec les enseignants », dans V. Dupriez et G. Chapelle (dir.), *Enseigner*, Paris, Presses universitaires de France, p. 189-201.

VAN DOOREN, W., L. VERSCHAFFEL et P. ONGHENA (2002). « The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 33, nº 5, p. 319-351.

Vergnaud, G. (1983). « Multiplicative structures », dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Orlando, Academic Press Inc., p. 128-175.

Vergnaud, G. (1991). « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, nos 2-3, p. 133-170.

Villasenor, A. et H.S. Kepner (1993). « Arithmetic from a problem-solving perspective : An urban implementation », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, no 1, p. 62-69.

Voizard, A. (2001). « Une interprétation de "la signification est l'usage" », *Philosophiques*, vol. 28, no 2, p. 395-410.

Vygotski, L.S. (1998). *Pensée et langage* (trad. par F. Sève), Paris, Éditions La dispute.

Wagon, S. (1994). *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge, Cambridge University Press.

Wang, J. et K. Hartley (2003). « Video technology as a support for teacher educations reform », *Journal of Technology and Teacher Educations*, vol. 11, p. 243-257.

Watson, A. et J. Mason (2007). « Taken-as-shared : A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, nos 4-6, p. 205-215.

Watson, J.M. et B.A. Kelly (2009). « Development of student understanding of outcomes involving two or more dice », *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 7, no 1, p. 25-54.

Wearne, D. et J. Hiebert (1988). « A cognitive approach to meaningful mathematics instruction : Testing a local theory using decimal numbers », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, no 5, p. 371-384.

Weinburg, C. (1988). « On becoming an artist : Implications for the development of classroom teachers », *Teacher Education Quarterly*, vol. 15, no 3, p. 17-23.

Wideen, M., J. Mayer-Smith et B. Moon (1998). « A critical analysis of the research on learning to teach : Making the case for an ecological perspective on inquiry », *Review of Educational Research*, vol. 68, no 2, p. 130-178.

Winslow, C. (2009). « First years of teaching », dans R. Even et D.L. Ball (dir.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, New York, Springer, p. 93-101.

Yackel, E., D. Underwood et N. Elias (2007). « Mathematical tasks designed to foster a reconceptualised view of early arithmetic », *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, nos 4-6, p. 351-367.

DANS LA FORMATION À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES, la formation mathématique est une composante clé. Car pour enseigner les mathématiques efficacement, il faut d'abord les comprendre.

Quelles perspectives et approches sont proposées au Québec pour la formation mathématique des enseignants ? Quelles connaissances mathématiques apparaissent nécessaires ? Ce livre offre un regard diversifié et riche sur ces questions, grâce à la collaboration de plus de 20 auteurs travaillant soit comme formateurs ou chercheurs à l'intérieur de diverses universités québécoises.

Par le biais de textes principaux, suivis de réactions, ils engagent ensemble un dialogue fécond, notamment entre mathématiciens et didacticiens, afin de parfaire la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques du préscolaire, du primaire et du secondaire.

JÉRÔME PROULX est professeur de didactique des mathématiques au Département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (UQAM). Il coordonne le Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques (GREFEM).

CLAUDIA CORRIVEAU est doctorante en didactique des mathématiques à l'UQAM. Son projet doctoral porte sur la transition secondaire-collégial en mathématiques. Elle intervient dans la formation des futurs enseignants de mathématiques du secondaire.

HASSANE SQUALLI est professeur titulaire de didactique des mathématiques au Département de pédagogie de l'Université de Sherbrooke. Il dirige le Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences, technologies et mathématiques (CREAS).

Ont collaboré à cet ouvrage

Adolphe Adihou ▪ Cathy Arsenault ▪ Lily Bacon ▪ Michel Beaudoin Nadine Bednarz ▪ André Boileau ▪ Claudia Corriveau ▪ Lucie DeBlois Alejandro S. González-Martín ▪ Frédéric Gourdeau ▪ Bernard R. Hodgson ▪ Corneille Kazadi ▪ Caroline Lajoie ▪ Jean-François Maheux ▪ Claudine Mary ▪ Helena P. Osana ▪ Louise Poirier Jérôme Proulx ▪ Vanessa Rayner ▪ Sophie René de Cotret ▪ Anna Sierpinska ▪ Hassane Squalli ▪ Denis Tanguay ▪ Laurent Theis

GREFEM
Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques

CREAS
Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences
Université de Sherbrooke

ISBN 978-2-7605-3209-0

PUQ.CA