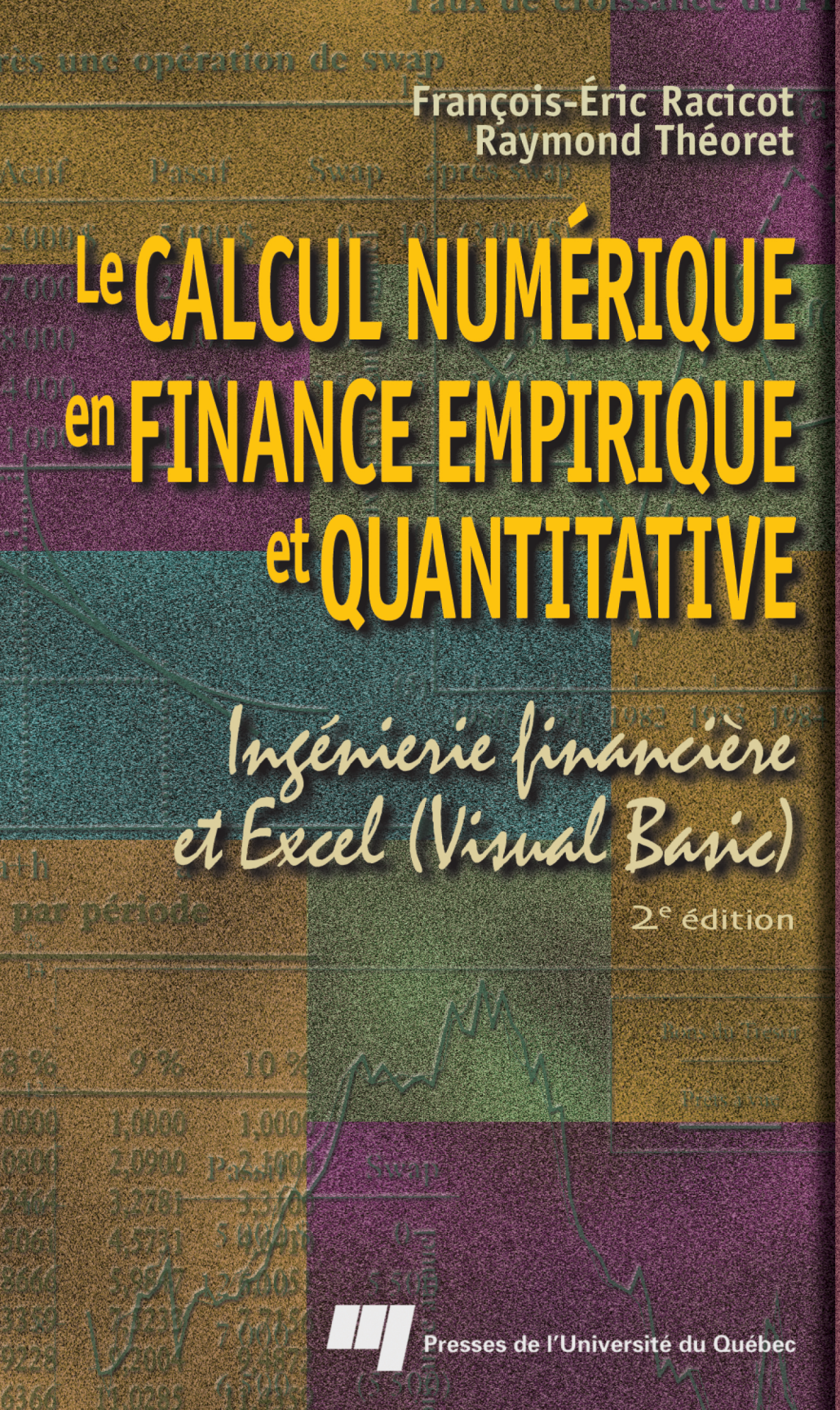
François-Éric Racicot
Raymond Théoret

Le CALCUL NUMÉRIQUE en FINANCE EMPIRIQUE et QUANTITATIVE

Ingénierie financière et Excel (Visual Basic)

2e édition



Presses de l'Université du Québec

Le CALCUL NUMÉRIQUE en FINANCE EMPIRIQUE et QUANTITATIVE

Ingénierie financière et Excel (Visual Basic)

PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC
Le Delta I, 2875, boulevard Laurier, bureau 450
Sainte-Foy (Québec) G1V 2M2
Téléphone : (418) 657-4399 · Télécopieur : (418) 657-2096
Courriel : puq@puq.ca · Internet : www.puq.ca

Distribution :

CANADA et autres pays

DISTRIBUTION DE LIVRES UNIVERS S.E.N.C.
845, rue Marie-Victorin, Saint-Nicolas (Québec) G7A 3S8
Téléphone : (418) 831-7474 / 1-800-859-7474 • Télécopieur : (418) 831-4021

FRANCE

DISTRIBUTION DU NOUVEAU MONDE
30, rue Gay-Lussac, 75005 Paris, France
Téléphone : 33 1 43 54 49 02
Télécopieur : 33 1 43 54 39 15

SUISSE

SERVIDIS SA
5, rue des Chaudronniers, CH-1211 Genève 3, Suisse
Téléphone : 022 960 95 25
Télécopieur : 022 776 35 27

La *Loi sur le droit d'auteur* interdit la reproduction des œuvres sans autorisation des titulaires de droits. Or, la photocopie non autorisée – le « photocopillage » – s'est généralisée, provoquant une baisse des ventes de livres et compromettant la rédaction et la production de nouveaux ouvrages par des professionnels. L'objet du logo apparaissant ci-contre est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit le développement massif du « photocopillage ».

François-Éric Racicot
Raymond Théoret

Le CALCUL NUMÉRIQUE en FINANCE EMPIRIQUE et QUANTITATIVE

Ingénierie financière et Excel (Visual Basic)

2e édition

2004

Presses de l'Université du Québec
Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bur. 450
Sainte-Foy (Québec) Canada G1V 2M2

Catalogage avant publication de la Bibliothèque nationale du Canada

Racicot, François-Éric

Le calcul numérique en finance empirique et quantitative : ingénierie financière et Excel (Visual Basic)

2e éd.

Comprend des réf. bibliogr.

ISBN 2-7605-1267-3

1. Instruments dérivés (Finances) – Prix – Mathématiques. 2. Ingénierie financière. 3. Microsoft Visual Basic. I. Théoret, Raymond. II. Titre.

HG6024.A3R32 2003 332.63'2042 C2003-941464-7

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Programme d'aide au développement de l'industrie de l'édition (PADIÉ) pour nos activités d'édition.

Révision linguistique : Louis Courteau

Mise en pages : Caractéra production graphique inc.

Couverture : Richard Hodgson

1 **2** 3 4 5 6 7 8 9 PUQ 2004 9 8 7 6 5 4 3 2 **1**

Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés
© 2004 Presses de l'Université du Québec

Dépôt légal – 1er trimestre 2004
Bibliothèque nationale du Québec / Bibliothèque nationale du Canada
Imprimé au Canada

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos XV

Présentation de la deuxième édition XXI

PARTIE 1
Les fondements théoriques de l'ingénierie financière 1

Chapitre 1 Les fondements du calcul numérique
Théorie de la détermination des prix des options 3

1. Le principe de l'arbitrage comme fondement de la détermination du prix d'un produit dérivé 4
2. Le calcul du prix d'une option par la technique de l'arbre binomial 15
3. Le problème de l'exercice prématuré d'une option 22
4. La simulation Monte Carlo 28
5. Flux monétaires intermédiaires versés par le sous-jacent et prix de l'option 48

Conclusion 54

Annexe 1.1 Le lemme d'Itô et l'équation différentielle partielle de Black et Scholes 56

Annexe 1.2 Le prix du risque 63
Annexe 1.3 Introduction à la programmation Visual Basic (Excel) 67
Bibliographie 76

Chapitre 2 Une introduction aux méthodes numériques en économétrie financière 79
Analyse de quelques cas : la simulation Monte Carlo, le *bootstrap* et le kernel 79
1. Simulation Monte Carlo : le cas d'une option asiatique ... 79
2. La méthode du *bootstrap* 87
3. Régression non paramétrique : une simulation Monte Carlo 89
Bibliographie 93

Chapitre 3 Les aspects théoriques de l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic 95
1. Le modèle de Black et Scholes 95
2. Arbre binomial à une période 99
3. Arbre binomial à deux périodes et généralisation 105
4. Convergence de la formule de CRR vers la solution de Black-Scholes 106
5. Les modèles de CRR et de Black et Scholes avec application Excel Visual Basic 113
Conclusion 119
Annexe 3.1 Rappels mathématiques : calcul différentiel 121
Annexe 3.2 Rappels mathématiques : calcul intégral 128
Annexe 3.3 Preuve de l'équation de Black et Scholes 139
Annexe 3.4 Démonstration mathématique du delta 152
Bibliographie 157

Chapitre 4 Les aspects théoriques de la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy
Solution à l'aide du Solveur d'Excel 159
1. Le modèle de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy .. 161
2. Les aspects formels du modèle de Black, Derman et Toy 181
3. Construction de l'arbre binomial du modèle de Black, Derman et Toy dans le logiciel Excel 185
Bibliographie 205

PARTIE 2
« Bootstrapping » et algorithmes d'optimisation 207

Chapitre 5 Variations sur les aspects théoriques de la VaR avec applications Visual Basic du calcul de la VaR selon la méthode du *bootstrapping* et selon l'expansion de Cornish-Fisher 209
1. VaR et loi normale 211
2. VaR et distributions des rendements autres que la normale 216
3. La technique du *bootstrapping* 224
4. L'expansion de Cornish-Fisher et la VaR 247
Conclusion 251
Bibliographie 251

Chapitre 6 Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation
Étude d'un cas : L'algorithme de Newton comme solution à l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy 253
1. Les algorithmes d'optimisation de type Newton 253
2. Une procédure simpliste pour programmer l'arbre binomial de Black, Derman et Toy dans Visual Basic ... 267

3. Solution de l'arbre de taux BDT par l'algorithme de Newton 274

Annexe 6.1 Enregistrement de la macro qui *monte* l'arbre du prix de l'obligation 286

Annexe 6.2 Enregistrement de la macro qui solutionne l'arbre BDT 288

Bibliographie 291

PARTIE 3
Arbres binomiaux et trinomiaux et simulation Monte Carlo 293

Chapitre 7 De la construction d'arbres binomiaux et trinomiaux des prix des produits dérivés et de ses rapports avec la simulation Monte Carlo
Une excursion dans la programmation Visual Basic 295

1. Construction de l'arbre binomial (multiplicatif) d'une option d'achat européenne et d'une option de vente américaine 296

2. Construction de l'arbre trinomial d'une option d'achat européenne 309

3. La simulation Monte Carlo 321

Bibliographie 348

Chapitre 8 Arbres binomiaux additifs et multiplicatifs pour évaluer les options américaines classiques sur actions portant dividende 351

1. Cas d'un dividende ponctuel qui est proportionnel au prix de l'action 356

2. Cas d'un seul dividende fixe (montant forfaitaire nominal) 363

3. Cas de deux dividendes fixes 368

Annexe 8.1 Calcul des prix d'options américaines par arbres binomiaux multiplicatifs 373
Annexe 8.2 Programme Visual Basic d'une fonction qui calcule la valeur d'une option américaine (put ou call) dans le cas d'une seule date ex-dividende à l'aide de l'arbre binomial additif 379
Annexe 8.3 Fonction Visual Basic de la formule de Black et Scholes avec deux versements de dividendes .. 381
Bibliographie 382

Chapitre 9 Des arbres binomiaux de taux d'intérêt des modèles de Black, Derman et Toy et de Ho et Lee à l'évaluation d'options sur taux d'intérêt dans le cadre de la programmation Visual Basic 385
1. Le modèle de Black 386
2. Options sur obligations 395
3. Options sur taux d'intérêt : cap, floor et swap 412
4. La décomposition de Jamshidian 427
Annexe 9.1 Fonction Visual Basic calculant l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy 443
Bibliographie 446

PARTIE 4
Quelques applications 449

Chapitre 10 Modélisation de la valeur de l'entreprise
Aspects théoriques et étude d'un cas : une simulation de la valeur d'une firme sur Excel 451
1. La théorie du CAPM et l'évaluation de l'entreprise 452
2. Modèles d'évaluation de la firme 463
3. Simulation de la valeur d'une entreprise sur Excel 491
Annexe 10.1 Le modèle H de Gordon 505
Bibliographie 507

Chapitre 11 Le taux repo implicite et les stratégies d'arbitrage sur le marché à terme 509
1. Le taux à terme implicite 509
2. Taux à terme (*forward*), prix à terme (*forward*) et taux repo implicite 512
3. Stratégies d'arbitrage sur le marché à terme 515
Résumé 520
Annexe 11.1 Relation entre le taux repo implicite et le taux à terme implicite 522
Annexe 11.2 Notation des variables 525

Chapitre 12 Les options réelles 527
1. La notion d'option réelle et la VAN augmentée 528
2. Cas simples d'options réelles 530
3. Cas d'options réelles plus complexes 540
Conclusion 549
Annexe 12.1 Distribution de la VAN et options réelles 551
Bibliographie 557

PARTIE 5
Méthodes modernes de la finance empirique et quantitative 559

Chapitre 13 La méthode des différences finies 561
1. L'équation différentielle de Black et Scholes 562
2. La transposition de l'équation différentielle de Black et Scholes au plan numérique 566
3. L'équivalence entre la méthode explicite des différences finies et l'arbre trinomial 570
4. Transposition des équations de la méthode explicite des différences finies dans une grille 573

5. Programmes Visual Basic pour déterminer les prix d'un call européen et d'un put américain par la méthode explicite des différences finies 576
6. La méthode implicite des différences finies 582
7. La méthode des différences finies de Crank-Nicolson ... 601
Bibliographie 609

Chapitre 14 L'analyse des données à haute fréquence .. 611
1. Méthodologie 614
2. Application économique du modèle Weibull 620
3. Application financière du modèle Weibull : modèle Weibull de durée conditionnellement autorégressive (WACD) 624
4. Conclusion 641
Annexe 14.1 Programme Fortran et GQOPT 643
Bibliographie 647

Chapitre 15 Le traitement économétrique des erreurs sur les variables par les variables instrumentales
Programmes Gauss et EViews 649
1. Conséquences des erreurs sur les variables 650
2. Les estimateurs 654
3. Performances relatives des estimateurs 668
4. Application financière de la méthode d'estimation à moments supérieurs. Un cas issu de la finance corporative : estimation du bêta dans le cadre du modèle du coût du capital de Benninga-Sarig 681
5. Conclusion 690
Annexe 15.1 Preuve multivariée de la non-convergence de MCO 692
Annexe 15.2 Preuve de la convergence de β_H et de β_E 694
Annexe 15.3 Lien entre EQM et variance des biais 702

Annexe 15.4 Programme GAUSS 703
Bibliographie 710

Annexe 1 Introduction à l'économétrie financière 713

Annexe 2 Méthode générale pour calculer une frontière efficiente avec application Visual Basic 737

Annexe 3 Évaluation de la gestion de portefeuille ... 747

Annexe 4 Techniques d'assurance de portefeuilles REPRODUCTION DES CASH-FLOWS D'UNE OPTION 769

Annexe 5 Programme Visual Basic d'une matrice de corrélation et de variance-covariance des rendements des titres d'un portefeuille 775

Annexe 6 Frontières efficientes inspirées de Benninga (2000) et de Jackson et Staunton (2001) ... 779

Annexe 7 Distinction entre l'approche du portefeuille dupliquant et l'approche risque-neutre à la construction de l'arbre binomial 791

AVANT-PROPOS

Jusqu'à récemment, les traités concernant les produits dérivés se limitaient à présenter les diverses théories dans ce domaine. Les aspects opérationnels de celles-ci étaient escamotés. Il va sans dire, une telle approche laisse beaucoup à désirer. L'étudiant n'est pas alors en mesure de mettre en application ce qu'on lui enseigne dans de tels traités. Il n'a alors qu'une compréhension bien superficielle du sujet même s'il a souvent le faux sentiment de maîtriser le domaine des produits dérivés. Que vaut une théorie sans pratique ?

Ces dernières années, quelques auteurs, que nous aurons l'occasion de citer à maintes reprises dans ce manuel[1], ont commencé à exposer dans un langage financier les rudiments du calcul numérique, essentiel à la détermination des prix des produits dérivés, et à aborder la programmation des prix de tels produits. Il reste que le matériel sur le sujet est encore fort parcimonieux et rédigé pour l'essentiel en langue anglaise. En français, les manuels sont en très petit nombre[2].

1. On pense ici aux manuels à forte teneur pédagogique publiés par Benninga (2000), Clewlow et Strickland (1998), Jackson et Stauton (2001), Neftci (2000) et Wilmott (1998, 2000, 2001).

2. Nous nous en voudrions de ne pas mentionner ici le manuel récent publié par notre collègue : Rostan, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire.

Pour être en mesure de devenir opérationnel dans le champ des produits dérivés, champ que l'on peut également désigner sous le vocable « d'ingénierie financière », il est impératif, comme nous venons de le mentionner, d'avoir une compréhension poussée du calcul numérique mais aussi de bien assimiler un langage de programmation qui soit assez souple pour s'adapter aux caractéristiques toujours changeantes des produits dérivés. Ce sont vers ces sujets que nous dirigeons notre collimateur dans ce traité.

Nous nous attaquons principalement à la détermination des prix des options les plus courantes : options d'achat et de vente européennes ou américaines sur actions avec ou sans dividendes ; options d'achat et de vente sur obligations munies ou non de coupons ; options sur taux d'intérêt tels les caps, les floors ou les swaps ; options asiatiques qui sont fortement « path-dependent », c'est-à-dire que le prix de telles options dépend du sentier suivi par le sous-jacent[3], et finalement, certaines options exotiques comme les écarts sur indices boursiers dont les processus stochastiques sont corrélés.

Notre coffre à outils pour nous attaquer au calcul numérique est bien garni. Après avoir présenté les bases du calcul stochastique au premier et au second chapitres, nous passerons beaucoup de temps à expliquer les aspects théoriques et empiriques des arbres binomiaux et trinomiaux qui sont l'un des piliers du calcul numérique en ingénierie financière. Autant que possible, nous essaierons de comparer nos résultats avec le modèle de Black et Scholes[4], qui est toujours très utilisé dans la pratique financière, cela même pour calculer les prix des options sur taux d'intérêt. La simulation Monte Carlo tient également le haut du pavé dans notre traité. Nous verrons comment elle en arrive à reproduire l'équation différentielle stochastique de l'évolution du prix d'un produit dérivé. Nous montrerons comment on peut l'utiliser de concert avec la factorisation de Cholesky ou avec des variables antithétiques.

3. Les équations différentielles des options qui sont *path-dependent* n'ont habituellement pas de solution analytique. Elles doivent donc être résolues de façon numérique, type de solutions auquel nous nous attaquons dans ce traité.

4. Qui nous sert donc de *benchmark*.

Au fil des chapitres qui suivent, nous apprendrons à maîtriser progressivement la programmation en Visual Basic par l'exemple, ce qui nous semble la façon la plus rapide d'assimiler ce langage. C'est en effet l'application Visual Basic d'Excel 2000 (version anglaise) que nous utilisons dans ce manuel pour écrire nos programmes. Le lecteur sera à même de constater toute la souplesse de la programmation en Visual Basic au fur et à mesure que nous progressons dans la problématique qui est ici la nôtre : la détermination des prix des produits dérivés. Nous sommes persuadés que Visual Basic peut être en mesure de solutionner tous les problèmes que l'on rencontre dans le domaine des produits dérivés. Il suffit d'approfondir ce type de programmation, qui occupe une place de choix dans le menu de ce manuel.

Nous ne nous limitons pas au seul sujet de la programmation des prix des produits dérivés dans ce manuel. On y verra en effet comment utiliser Excel 2000 et l'application Visual Basic qu'il renferme pour calculer la VaR d'un portefeuille de titres. Nous recourrons alors à la technique dite du *bootstrapping* pour trouver la VaR d'un portefeuille dont la distribution des rendements est leptocurtique, distribution très courante du côté des rendements journaliers ou à haute fréquence, notamment. L'expansion de Cornish-Fisher sera une autre avenue pour effectuer un tel calcul.

Tout un chapitre (le chapitre 10) sera également consacré à la modélisation de la valeur de l'entreprise, tant dans ses aspects théoriques que pratiques. Nous montrerons alors comment on peut simuler la valeur d'une entreprise sur Excel 2000 et en arriver à déterminer le juste prix de l'action qu'elle émet. Ce chapitre s'avérera utile pour les personnes qui se dédient à la finance corporative.

Finalement, puisque l'objet de notre propos a trait à la finance empirique et quantitative, nous avons inclus dans les annexes des notes de cours qui sont le fruit de notre expérience dans l'enseignement universitaire et qui sauront intéresser l'étudiant ou le professionnel qui se passionnent pour l'ingénierie financière. L'une d'elles fournit une introduction à l'économétrie financière. Nous y présentons dans un premier temps le modèle classique de régression à plusieurs variables et certains problèmes qui peuvent surgir lors de l'estimation, c'est-à-dire les problèmes d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité. Puis nous nous tournons vers la théorie des séries temporelles. Nous rappelons la forme générale des modèles ARIMA et

les problèmes qui se posent lorsque l'on estime des séries temporelles, notamment celui se rapportant à la non-stationnarité des séries. Après avoir étudié comment aborder ce problème, notamment à l'aide du test de Dickey-Fuller, nous analysons un phénomène que l'on rencontre fréquemment en finance empirique, soit celui de l'hétéroscédasticité conditionnelle. Les divers types de modèles ARCH et GARCH qui servent à modéliser ce phénomène sont survolés[5].

Dans deux autres annexes, nous abordons l'un des aspects importants de l'enseignement de la finance moderne au niveau du baccalauréat, soit celui de la construction de la frontière efficiente. Une construction faisant appel au lagrangien y est effectuée à l'aide du logiciel Excel 2000 et une autre solution à ce problème est présentée, celle-là mettant à contribution le solveur d'Excel intégré dans un programme Visual Basic.

Pour ne pas laisser le lecteur sur sa faim, deux autres annexes s'attardent à des thèmes importants de la finance empirique et quantitative : l'analyse de la performance du gestionnaire de portefeuille et l'assurance de portefeuille. Nous montrons que l'économétrie financière est fortement sollicitée au niveau de l'analyse des phénomènes de sélectivité et de synchronisme de marché (*market-timing*). La théorie ayant trait à l'assurance de portefeuille est par ailleurs particulièrement intéressante puisqu'on y enseigne comment reproduire les cash-flows des produits dérivés à l'aide des sous-jacents.

Le domaine de l'ingénierie financière se développe à très vive allure et il recourt à des outils de plus en plus sophistiqués. L'étudiant ou le professionnel qui œuvre en finance doit maintenant posséder des connaissances poussées au chapitre de ces outils. À défaut, il n'est guère opérationnel et ses chances de succès dans le domaine sont plutôt limitées, et ce n'est là qu'un euphémisme. Si autrefois le professionnel de la finance pouvait restreindre ses connaissances en mathématiques au seul calcul financier, comment pourrait-il opérer aujourd'hui avec si peu de bagage dans un monde financier dominé par des produits toujours plus hybrides et complexes et dont l'analyse

5. Pour plus de détails sur l'économétrie financière, on consultera : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001), *Traité d'économétrie financière*, *modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

passe par le calcul stochastique, le calcul numérique, l'économétrie financière et, plus globalement, par l'ingénierie financière ? Nous croyons que la lecture du présent manuel permettra tant à l'étudiant qu'au professionnel de la finance de s'initier à la finance empirique et quantitative moderne.

François-Éric RACICOT et Raymond THÉORET
Janvier 2002

PRÉSENTATION DE LA DEUXIÈME ÉDITION

La première édition de ce manuel apportait, au lecteur francophone, une contribution importante dans le domaine de l'ingénierie financière. En plus de lui expliquer les principaux outils du calcul numérique, elle lui fournissait un très grand nombre de programmes écrits en Visual Basic (Excel) conçus pour déterminer les prix d'options sur actions et d'options sur taux d'intérêt, qu'elles soient européennes ou américaines. Le chercheur et le professionnel de l'ingénierie financière y ont trouvé leur compte.

Dans cette deuxième édition, nous élargissons notre horizon de manière à ce que le lecteur puisse maîtriser davantage l'ingénierie financière, sans doute la branche la plus complexe de la finance. Nous l'invitons également à une incursion dans le domaine des développements récents en ingénierie financière. En plus d'avoir une dimension pratique très caractérisée, notre *Calcul numérique* peut dès lors servir de référence au chercheur dans le domaine. Incidemment, les chapitres 14 et 15, qui sont nouveaux, s'intéressent aux données à haute fréquence et aux processus de points, qui sont présentement des sujets très chauds dans le champ de la recherche en finance[1]. Examinons de plus près les nouveaux chapitres qui ont été incorporés dans cette seconde édition.

1. Les chapitres 14 et 15 sont une version adaptée des essais contenus dans la thèse de doctorat en finance de l'un des auteurs, François Racicot, thèse défendue à Montréal le 13 juin 2003.

LA THÉORIE DE L'INGÉNIERIE FINANCIÈRE…

Le chapitre 1, qui sert de présentation au reste du manuel, offre un vaste panorama des diverses facettes de la théorie des produits dérivés. Nous y montrons d'abord de façon rigoureuse comment la construction de l'arbre binomial repose sur le principe de l'arbitrage, et ce à l'aide de la technique du portefeuille dupliquant. La dérivation du prix d'une option dans le cadre d'un univers neutre au risque est traitée de façon détaillée. Cela nous permet de mieux comprendre l'équation différentielle de Black et Scholes. Puis nous nous intéressons au problème de l'exercice prématuré d'une option, qui prend de plus en plus de place dans la recherche en ingénierie financière. Nous examinons ce problème dans le cadre de la construction d'un arbre binomial puis dans le cadre de la simulation Monte Carlo. Si la simulation Monte Carlo est traditionnellement peu adaptée au traitement de l'exercice prématuré d'une option américaine, des recherches récentes ont montré que l'exercice prématuré pouvait être assez facilement intégré dans une simulation Monte Carlo, notamment en recourant à l'échantillonnage aléatoire ou en mettant à contribution l'économétrie pour estimer l'espérance conditionnelle des flux monétaires d'une option.

Par ailleurs, toujours dans le chapitre 1, une large place est accordée aux aspects techniques de la simulation Monte Carlo. Comme on le sait, une simulation Monte Carlo converge très lentement vers sa cible et il faut dès lors recourir aux diverses techniques de réduction de la variance pour augmenter la précision des calculs. À cet effet, nous nous sommes mis en devoir, dans cette nouvelle édition, d'expliquer en détails deux de ces techniques : la technique des variables antithétiques et celle des variables de contrôle. Et comme nous l'avons déjà mentionné, nous y avons inclus une longue section sur le traitement de l'exercice prématuré d'une option dans le cadre d'une simulation Monte Carlo. À cet effet, nous avons détaillé la méthode de Longstaff et Schwartz qui fait appel à la régression pour estimer l'espérance conditionnelle des flux monétaires simulés d'une option.

Le chapitre 1 traite ensuite des options dont l'actif sous-jacent verse des flux monétaires intermédiaires, tels les dividendes. Black, le premier à avoir étudié ce phénomène, a proposé une approximation au prix d'une telle option basée sur l'équation de Black et Scholes. Il

a démontré qu'il n'était optimal d'exercer une option que juste avant une date ex-dividendes. Qui plus est, s'il y a exercice, celui-ci n'aura fort probablement lieu qu'à la dernière date ex-dividendes que comprend la durée d'une option. Comme une option américaine devient européenne dès que la date d'exercice est connue, on peut dès lors se servir de la formule de Black et Scholes pour déterminer son prix. À la suite des travaux de Black, une autre méthode fut proposée pour traiter les flux intermédiaires du sous-jacent ; elle corrige l'arbre binomial du sous-jacent de ses flux intermédiaires. Nous la détaillons dans ce chapitre.

Le chapitre 1 renferme de nombreux programmes écrits en Visual Basic pour déterminer les prix des options qui y sont présentées. Ces programmes seront expliqués de façon détaillée dans les chapitres subséquents. Le chapitre 1 comporte également trois annexes : une annexe sur le lemme d'Itô, une sur les aspects mathématiques du prix du risque qui joue un rôle important dans le traitement des options réelles et une dernière sur les principes de programmation en Visual Basic (Excel).

DES RAPPELS SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL...

Nous avons ajouté deux annexes au chapitre 3 : l'une sur le calcul différentiel et l'autre sur le calcul intégral. L'ingénieur financier doit en effet bien maîtriser les bases de la mathématique. Comme cela apparaît au chapitre 3, la théorie des options recourt souvent à la dérivation de fonctions et d'intégrales. Ces techniques de dérivation sont bien souvent étrangères au praticien et même à l'étudiant. C'est pourquoi nous avons jugé essentiel, dans cette nouvelle édition, d'incorporer des annexes qui fournissent les principales formules et les théorèmes de base en calcul différentiel et intégral. Elles s'additionnent à nos rappels statistiques et matriciels qui sont élaborés dans notre *Traité d'économétrie financière*, publié en 2001 chez le même éditeur. Nous avons donc fourni au lecteur tous les outils mathématiques qu'il est essentiel de connaître pour devenir un financier digne de ce nom.

Les options réelles…

Les options réelles sont un domaine de pointe dans la recherche en finance. Les entreprises recourent également de plus en plus aux options réelles pour évaluer leurs projets d'investissement. Et à raison car on ne saurait plus se limiter au simple calcul de la VAN classique pour déterminer la viabilité d'un projet. Il faut également évaluer les options réelles qui y sont rattachées. La décision d'investir devient alors une véritable décision stratégique. C'est pourquoi nous avons ajouté dans ce manuel le chapitre 12 qui introduit le concept de VAN augmentée et qui montre, toujours à l'aide de programmes Visual Basic, comment déterminer les prix des options réelles suivantes à l'aide d'arbres binomiaux[2] : option d'abandon, option de contraction, option de croissance, option de choisir et option sur option (option composite). Ce chapitre comporte également une annexe qui analyse l'impact des diverses options réelles sur la distribution statistique de la VAN. Nous croyons que ce chapitre sera d'une grande utilité pour le gestionnaire qui doit régulièrement évaluer des projets d'investissement, sources de plus-values pour l'entreprise.

Variations sur les données à haute fréquence, la déformation temporelle et les processus de points…

L'ingénierie financière est souvent concernée par des décisions qui doivent être prises dans un laps de temps très court, voire instantané, la journée relevant du long terme pour l'ingénieur financier. On dit qu'il travaille avec des données à haute fréquence. Surgissent alors les problèmes de déformation temporelle et d'erreurs de mesure qui sont le lot des données financières mesurées à haute fréquence. Les processus de points sont également l'un des aspects des données mesurées à haute fréquence.

2. On évalue encore dans plusieurs cours de MBA les options réelles par des arbres de décision (Decision Tree Analysis), mais cette approche est erronée selon Copeland et Antikarov car elle viole la loi d'un seul prix ou loi de l'arbitrage. Voir à ce sujet : Copeland, T. et V. Antikarov (2001), *Real Options : A Practitioner's Guide*, New York, Texere, p. 90.

C'est pourquoi nous avons ajouté les chapitres 14 et 15. Dans ces deux chapitres, nous nous intéressons plus spécifiquement aux méthodes apparues très récemment dans la littérature ayant trait à la finance empirique, c'est-à-dire les méthodes issues de l'économétrie financière très récente. Nous nous concentrons plus particulièrement sur le sujet des erreurs de spécification en économétrie financière. Dans le chapitre 14, nous analysons les techniques d'estimation et les tests d'ajustement pour un modèle très courant dans la littérature récente. Nous présentons également deux applications ainsi que leurs programmes. Dans un premier temps, nous analysons la procédure à suivre pour estimer et tester le modèle Weibull avec des données en coupe transversale. Dans un second temps, nous élargissons notre spécification du modèle Weibull pour être en mesure de l'appliquer aux données en séries temporelles.

Dans le chapitre 15, nous dirigeons notre attention vers un autre contexte pour étudier les erreurs de spécification. Cette fois-ci, nous analysons les erreurs de mesure sur les variables explicatives dans un cadre de régression linéaire. Nous présentons également une application des techniques d'estimation développées dans ce chapitre au modèle de marché. En effet, nous proposons une nouvelle spécification du modèle de marché qui tient compte des erreurs sur les variables. Nous utilisons les résultats de notre estimation pour calculer le coût moyen du capital. Des programmes pour effectuer ce calcul sont présentés afin de rendre l'utilisateur opérationnel sur le sujet.

EN GUISE DE CONCLUSION...

Enrichie par tous ces ajouts, cette seconde édition fait de *Calcul numérique* un outil de référence essentiel sur la recherche actuelle en ingénierie financière et sur les techniques d'implantation des méthodes de cette science. Nous n'y sacrifions ni la théorie, ni la pratique. Nous avons voulu que le lecteur maîtrise bien la théorie, contenue dans les chapitres 1 à 3, avant de s'attaquer à la pratique. Nous avons également ouvert au lecteur de nouveaux horizons : options réelles, données à haute fréquence, processus de points et déformation temporelle. Du fait des exigences du marché du travail, on ne peut plus se contenter d'une compréhension superficielle de l'ingénierie financière si l'on

veut opérer dans ce domaine. Il faut plutôt avoir une maîtrise approfondie et de la théorie et de la pratique. Nous espérons que le chercheur et le praticien du domaine de l'ingénierie financière l'auront acquise après la lecture de cette seconde édition de *Calcul numérique*.

François-Éric RACICOT et Raymond THÉORET
Janvier 2004

PARTIE

1

LES FONDEMENTS THÉORIQUES DE L'INGÉNIERIE FINANCIÈRE

CHAPITRE

1

LES FONDEMENTS DU CALCUL NUMÉRIQUE

THÉORIE DE LA DÉTERMINATION DES PRIX DES OPTIONS

Depuis la parution du fameux article de Black et Scholes en 1973, les options financières ont foisonné sur les marchés. Originellement, on ne parlait que d'options d'achat et de vente européennes ou américaines classiques[1]. Mais par la suite, une grande variété d'options se sont développées, que l'on regroupe sous le vocable : options exotiques. Ces options permettent tout autant de se protéger contre divers états de la nature que de spéculer sur ces états. Font partie de cette catégorie les options composées, c'est-à-dire les options écrites sur d'autres options !

Ce chapitre sert d'introduction à tous les outils numériques qui se retrouvent dans cet ouvrage. Nous nous y intéressons particulièrement aux principes de la détermination des prix des options, au modèle de l'arbre binomial et à la simulation Monte Carlo. Dans les annexes de ce chapitre, on y retrouve la dérivation du lemme d'Itô, une analyse du prix du risque et une introduction à la programmation en Visual Basic (Excel).

1. Soit les *plain-vanilla options*, en anglais.

1. Le principe de l'arbitrage comme fondement de la détermination du prix d'un produit dérivé

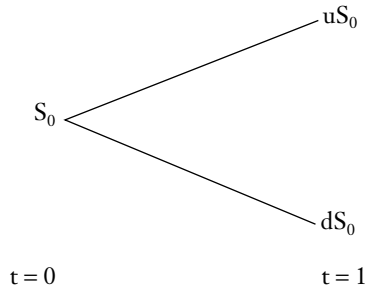
Le principe de l'arbitrage joue un rôle essentiel dans la détermination du prix d'un produit dérivé, dit encore actif contingent, qu'il soit une option ou un contrat à terme. Ce principe permet de déterminer avec certitude le prix de tels produits. Soulignons avant de poursuivre qu'il existe deux façons de déterminer le prix d'un actif : la logistique de l'équilibre général et l'arbitrage. La première est fort connue des économistes et fait appel à une représentation simplifiée des rouages économiques pour déterminer les prix d'équilibre des actifs. Tel n'est pas notre propos ici. Nous nous penchons plutôt sur la technique de l'arbitrage pour déterminer les prix des actifs contingents.

Un actif contingent est écrit sur un autre actif, que l'on nomme le sous-jacent. Dès lors, ses flux monétaires peuvent être reproduits par des transactions impliquant le sous-jacent et un autre actif, choisi comme numéraire. On suppose ici que le sous-jacent est négocié[2] sur un marché ; on abordera plus loin la situation où il ne l'est pas.

À tout actif contingent correspond donc un portefeuille dit *dupliquant* qui reproduit exactement les flux monétaires de cet actif. Selon la théorie de l'arbitrage, le prix de l'actif contingent est égal à la valeur du portefeuille dupliquant. Sinon, nous serions confrontés à une situation d'arbitrage. On dit qu'il y a arbitrage si l'on peut effectuer un profit sans risque, sans qu'il n'y ait aucun apport d'argent frais. Si l'actif contingent valait moins que son portefeuille dupliquant, il serait en effet possible de réaliser un profit sans risque en se portant acquéreur de l'actif contingent et en vendant à découvert le portefeuille dupliquant. Cette vente servirait alors de couverture (*hedge*) à un profit certain. Par ailleurs, si l'actif contingent valait plus que son portefeuille dupliquant, on effectuerait l'opération inverse, réalisant de la sorte un profit tout aussi certain.

2. On dit qu'il est un *traded asset*, en anglais.

FIGURE 1 **Arbre binomial du prix de l'action : une période**



Nous pouvons mieux camper le principe de l'arbitrage en introduisant d'ores et déjà l'approche binomiale à la détermination du prix d'une option. Envisageons le cas d'une option d'achat[3] (*call*) européenne (C) écrite sur une action (S) ne versant pas de dividendes. Nous disposons également d'un autre actif, appelé numéraire. Celui-ci prend ici figure d'un bon (B), assimilable à un dépôt. Ce bon offre un taux sans risque r.

Le prix de l'action, soit le sous-jacent de l'option d'achat, est présentement de S_0. Il suit par ailleurs un processus binomial multiplicatif. Il ne peut donc prendre que deux valeurs à tout instant : uS_0 si les prix montent ou dS_0 si les prix baissent. Par exemple, u peut être égal à 1,2 et d, à 0,8[4]. La représentation binomiale de l'évolution du prix de l'action apparaît à la figure 1.

Il n'existe donc que deux états de la nature dans cet arbre binomial fort sommaire : hausse du prix de l'action ou baisse du prix de l'action. La volatilité du prix de l'action est le seul facteur de risque. Par ailleurs, le numéraire, ici un bon ou dépôt, est un actif sans risque

3. Une option d'achat écrite sur un actif sous-jacent, disons une action, donne à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent et comporte une durée de vie égale à son échéance. Si l'option est européenne, elle ne peut être exercée ou convertie en sous-jacent qu'à son échéance. Si elle est américaine, elle peut être exercée en tout temps jusqu'à son échéance.

4. Nous spécifierons plus loin comment calculer u et d.

qui croît au taux périodique r. Sa valeur est présentement de B et sa valeur dans une période sera de B(1 + r), et cela quel que soit l'état de la nature.

Nous voulons maintenant reproduire l'option d'achat à partir d'un portefeuille formé de l'action et du bon. Or, une option d'achat est assimilable à N actions financées en partie par le bon B[5]. Cette assertion ne doit pas nous surprendre étant donné l'équation suivante de Black et Scholes :

$$C = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \qquad (1)$$

où :

N(d) = probabilité cumulative d'une variable normale unitaire, soit

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} f(z)dz$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dans ces équations, σ désigne l'écart-type du rendement de l'action ; T, l'échéance restante de l'option et r, le taux d'intérêt sans risque. Soulignons que dans l'équation de Black et Scholes, $N(d_1)$ est égal au delta, soit la sensibilité du prix du call au prix de l'action, et $N(d_2)$ est la probabilité que l'option d'achat devienne en jeu[6].

L'équation (1) peut évidemment s'écrire de façon équivalente :

$$C = NS_0 - B \qquad (2)$$

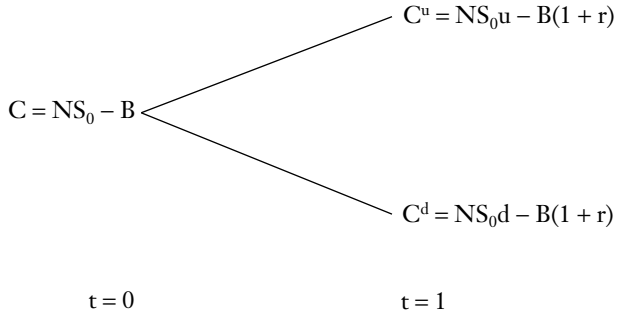
En vertu de l'équation de Black et Scholes, une option d'achat équivaut à $N(d_1)$ actions, $N(d_1)$ étant le delta ou le ratio de couverture de l'option, financées par un emprunt équivalant à $Xe^{-rT}N(d_2)$.

5. On dit alors que l'on vend le bon à découvert.

6. Pour la preuve que $N(d_2)$ est égal à la probabilité que l'option devienne en jeu, voir : Gemmill, G. (1993), *Options Pricing : An International Perspective*, New York, McGraw Hill.

Par définition, le portefeuille dupliquant doit reproduire en tout temps les flux monétaires de l'option d'achat, sinon il existe une possibilité d'arbitrage, incompatible avec l'équilibre des marchés financiers. Le prix de l'option d'achat, que nous voulons calculer à partir du portefeuille dupliquant de l'option, est représenté par C. Elle prendra une valeur C^u dans l'état haussier du prix de l'action et C^d dans l'état baissier. La figure 2 retrace l'évolution des flux monétaires de l'option et de son portefeuille dupliquant.

FIGURE 2 **Évolution du portefeuille dupliquant : une période**



Comme il se doit, les flux monétaires de l'option sont en tout temps égaux à ceux de son portefeuille dupliquant, qui sert de base à la détermination du prix de l'option. On suppose ici que l'option ne dure qu'une période. Les flux monétaires finaux de l'option, dits *payoffs* en anglais, sont donc forcément connus. Ils sont égaux à la valeur intrinsèque de l'option, c'est-à-dire[7] :

$$C^u = \left(Su - X\right)^+ \tag{3}$$

$$C^d = \left(S_0d - X\right)^+ \tag{4}$$

7. À remarquer la notation standard : $\left(S_0u - X\right)^+ = MAX\left(S_0u - X, 0\right)$

où X représente le prix d'exercice de l'option. En termes du portefeuille dupliquant, l'option peut également prendre les deux valeurs suivantes au temps (t = 1) :

$$C^u = NS_0u - B(1 + r) \tag{5}$$

$$C^d = NS_0d - B(1 + r) \tag{6}$$

Ce système d'équations ne comporte donc plus que deux inconnues, N et B. En soustrayant l'équation (6) de l'équation (5), on obtient N :

$$C^u - C^d = NS_0u - NS_0d \tag{7}$$

$$N = \frac{C^u - C^d}{S_0u - S_0d} = \frac{\Delta C}{\Delta S} \tag{8}$$

Le nombre d'actions requis pour reproduire l'option est donc égal au delta de l'option, soit le ratio de couverture de cette option. Une fois N calculé, on peut se servir de l'équation (6) pour déterminer B :

$$B = \frac{NS_0d - C^d}{1 + r} \tag{9}$$

Nous sommes parvenus au stade de déterminer le prix C de l'option d'achat, soit le but ultime de cet exercice d'arbitrage. Remarquons en passant que les probabilités observées de hausse et de baisse du prix de l'action, que l'on peut désigner par p et (1 – p), ne sont pas intervenues dans le calcul du prix de l'option. Nous verrons dans un instant que lorsque l'on recourt au principe de l'arbitrage pour déterminer le prix d'une option, on se situe dans un univers neutre au risque, c'est-à-dire un univers où les investisseurs n'éprouvent aucune aversion pour le risque. On actualise alors les flux monétaires de l'option au taux sans risque et les probabilités utilisées à cette fin sont dites neutres au risque.

Il nous reste à exprimer C au temps 0 en termes de ses flux monétaires C^u et C^d au temps 1, le portefeuille dupliquant n'étant que subsidiaire dans cette opération. Nous savons que :

$$C = NS_0 - B \tag{10}$$

En remplaçant B par sa valeur donnée dans l'équation (9), on a :

$$C = NS_0 - \frac{NS_0 d - C^d}{1 + r}$$

$$= \frac{NS_0(1 + r) - NS_0 d + C^d}{1 + r}$$

$$= \frac{N\left[S_0(1 + r) - S_0 d\right] + C^d}{1 + r} \qquad (11)$$

En remplaçant N par sa valeur donnée dans l'équation (8), on obtient :

$$C = \frac{(C^u - C^d)\left[\frac{S_0(1 + r) - S_0 d}{S_0 u - S_0 d}\right] + C^d}{1 + r}$$

$$= \frac{(C^u - C^d)\left[\frac{(1 + r) - d}{u - d}\right] + C^d}{1 + r} \qquad (12)$$

Posons :

$$q = \frac{(1 + r) - d}{u - d} \qquad (13)$$

En substituant ce terme dans l'équation (12), on obtient la forme finale du prix de l'option d'achat :

$$C = \frac{qC^u + (1 - q)C^d}{(1 + r)} \qquad (14)$$

On peut donc considérer les termes q et (1 – q) comme les probabilités respectives, neutres au risque, des deux états de la nature : hausse du prix de l'action et baisse du prix de l'action. On voit que ces deux probabilités n'entretiennent a priori aucune parenté avec les probabilités observées p et (1 – p) des deux états de la nature. En effet, les probabilités neutres au risque pondèrent les deux cash-flows de l'option dans un univers où l'on actualise les flux monétaires au taux sans risque, c'est-à-dire un univers où tous les actifs croissent au

taux sans risque. Les primes de risque n'existent pas dans un tel univers. Par ailleurs, si l'on utilisait les probabilités observées dans le monde réel, il faudrait tenir compte des primes de risque pour effectuer l'actualisation des flux monétaires. Comme le mentionne Trigeorgis[8], cette dualité entre probabilités réelles et probabilités neutres au risque se ramène à la dualité classique entre deux formes d'actualisation bien connues pour déterminer le prix d'un actif. On peut en effet déterminer un tel prix : 1) soit en calculant l'espérance de ses flux monétaires et en les actualisant au taux de rendement qui intègre la prime de risque de l'actif ; 2) soit en calculant l'équivalent certain des flux monétaires de l'actif et en actualisant le tout au taux sans risque, qui n'intègre pas de prime de risque. Les probabilités du monde réel sont associées au premier mode d'actualisation et les probabilités neutres au risque, au second[9].

Dans l'équation (14), E^Q est l'opérateur d'espérance dans un univers neutre au risque, qui met à contribution les probabilités neutres au risque désignées par q et (1 − q) dans notre arbre binomial fort simplifié. Cet opérateur d'espérance doit être distingué de l'opérateur d'espérance E du monde réel, qui escompte les flux monétaires au taux emmagasinant une prime de risque et qui pondère par voie de conséquence ces flux par des probabilités réelles. C'est le théorème de Girsanov qui permet de transformer les probabilités observées en probabilités neutres au risque. La dérivée utilisée pour passer des probabilités observées aux probabilités neutres au risque est la dérivée Radon-Nikodym.

Nous pouvons récrire l'équation (14) en termes d'espérance mathématique comme suit :

$$C = \frac{1}{1+r} E^Q\left(C_T\right) \tag{15}$$

où C_T représente le flux monétaire final, ou *payoff*, de l'option d'achat.

8. Trigeogis, L. (1996), *Real Options*, Cambridge, The MIT Press.

9. Du point de vue théorique, l'approche risque-neutre est différente de celle du portefeuille dupliquant. (Voir annexe 7.)

À remarquer que l'équation (15) est conditionnée par le choix du numéraire N[10]. En effet, son expression générale est :

$$\frac{C_0}{N_0} = E^Q\left[\frac{C_T}{N_T}\right] \tag{16}$$

où N est un numéraire quelconque et où l'on a ajouté l'indice 0 aux variables à gauche de l'équation (10) pour bien faire ressortir qu'elles sont mesurées au moment présent, par opposition aux variables de droite qui sont mesurées à l'échéance T de l'option d'achat. Si le numéraire est un bon (dépôt) comme dans l'exemple précédent et que sa valeur au temps 0 est standardisée à 1 $, c'est-à-dire $N_0 = 1$ $, alors N_T est égal à $(1 + r)^T$ si l'on suppose que le taux d'intérêt est fixe. L'équation (10) peut alors être récrite comme suit :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} E^Q(C_T) \tag{17}$$

Certes, si l'on suppose que la composition des intérêts est continue plutôt que discrète, on aurait plutôt :

$$C_0 = e^{-rT} E^Q(C_T) \tag{18}$$

forme que l'on retrouve plus fréquemment dans la littérature financière. Par contre, on peut choisir comme numéraire une obligation à coupon zéro qui verse 1 $ à son échéance, toujours en supposant un taux constant. N_0 est alors égal à e^{-rT} et N_T vaut 1 $. L'équation (16) devient dans ce cas :

$$\frac{C_0}{e^{-rT}} = E^Q\left(\frac{C_T}{1}\right) \tag{19}$$

Il s'ensuit que :

$$C_0 = e^{-rT} E^Q(C_T) \tag{20}$$

10. À ce sujet, on consultera : Tavella, D. (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*, New York, Wiley, chap. 3 ; Björk, T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Finance*, Oxford, Oxford University Press.

Il résulte que ces deux numéraires, en supposant un taux d'intérêt constant, se traduisent par une forme équivalente de l'espérance neutre au risque dans ce cas, mais cette forme peut varier grandement selon le choix du numéraire et du modèle stochastique du taux d'intérêt.

On comprendra mieux l'univers neutre au risque en examinant les dessous de l'équation (20). Supposons que l'action S, soit le sous-jacent de l'option d'achat, obéisse au processus brownien géométrique suivant :

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dz \tag{21}$$

où α désigne la dérive (*drift*) du processus brownien ; σ, l'écart-type du rendement de l'action et dz est un processus de Wiener, c'est-à-dire :

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{22}$$

où $\varepsilon \sim N(0,1)$. Comme le call est une fonction de S et de t, il satisfait à l'équation différentielle suivante, en vertu du lemme d'Itô[11] :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (\alpha - \lambda\sigma) C \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0 \tag{23}$$

On suppose ici que l'action paie un dividende continu d, défini en pourcentage du prix de l'action. Dans l'équation (23), λ représente le prix du risque[12], défini comme : $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$, μ étant le rendement espéré de l'action. Le prix du risque est donc le rendement excédentaire espéré de l'action par unité de risque. Le produit $\lambda\sigma$ représente

11. Voir l'annexe 1.1 pour le développement du lemme d'Itô.
12. Voir l'annexe 1.2 pour la dérivation du prix du risque, notion essentielle au calcul des options réelles.

pour sa part la prime de risque de l'action[13]. Dans l'équation différentielle (23), la dérive est donc corrigée de la prime de risque de l'action.

Si le sous-jacent est un actif marchand[14] ou négocié sur un marché, alors, à l'équilibre on aura[15] :

$$\alpha - \lambda\sigma = r - d \tag{24}$$

L'équation différentielle de l'option s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - d)C\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0 \tag{25}$$

On se ramène donc dans un univers neutre au risque, l'équation différentielle de l'option excluant le prix du risque. Selon le théorème de Feynman-Kac, l'équation différentielle ainsi définie peut être écrite comme une espérance, c'est-à-dire l'espérance neutre au risque

---

13. Si l'on se réfère au modèle du CAPM pour mesurer le prix du risque, il n'existe qu'un seul prix du risque, soit celui associé aux fluctuations du rendement du portefeuille du marché, qui constituent dans ce modèle le seul facteur de risque. La prime de risque du titre i (RP_i) est alors de : $RP_i = E(R_i) - R_f = \beta_i[E(R_m) - R_f]$ où $E(R_i)$ représente le rendement espéré du titre i ; $E(R_m)$, le rendement espéré du portefeuille du marché ; R_f, le taux sans risque et β_i, le bêta du titre i. Cette prime de risque peut être récrite comme suit : $\beta_i\left[\frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m}\right]\sigma_m = \beta_i\lambda_m\sigma_m$, où λ_m est le prix du risque associé au portefeuille de marché et σ_m, l'écart-type du rendement du portefeuille du marché. Supposons des valeurs plausibles sur le plan historique pour $(E(R_m) - R_f)$ et σ_m, soit 0,07 et 0,4. Le prix du risque associé à ces données serait alors de 0,175 et un titre qui aurait un bêta de 1,5 supporterait une prime de risque de 0,105 (10,5 %). Le titre qui aurait un bêta de 1 aurait évidemment une prime de risque égale à celle du portefeuille du marché, soit 7 %.

14. *Traded asset*, en anglais.

15. L'équation (21) exprime le processus de diffusion de S comme suit : $dS = \alpha Sdt + \alpha Sdz$. L'équation (24) implique que $\alpha = \mu$ à l'équilibre si l'action ne verse pas de dividendes, où μ est le rendement excédentaire espéré du prix de l'action. Dans un univers neutre au risque, l'équation de diffusion de S devient donc : $dS = rSdt + \alpha Sdz$. Si l'action verse un dividende d, la relation d'équilibre (24) implique que : $\mu_i - \alpha = d$. Par conséquent, la dérive α du processus de diffusion de S est inférieure au rendement espéré de l'action, l'écart étant donné par le taux du dividende. Dans un univers neutre au risque, l'équation de diffusion de S devient alors, en présence d'un dividende continu : $dS = (r - d)Sdt + \sigma Sdz$.

donnée par l'équation (15). Cela confère à ce théorème une grande puissance au plan empirique. En effet, on peut évaluer le prix du call soit en résolvant l'équation différentielle par une méthode numérique quelconque, soit en évaluant l'espérance neutre au risque donnée par l'équation (15), qui n'est en fait qu'une intégrale, en recourant à l'arbre binomial ou à la simulation Monte Carlo. Les techniques de solution sont alors multiples.

Qu'advient-il si l'actif sous-jacent à l'option n'est pas négocié sur un marché financier comme c'est souvent le cas pour les options réelles ? Selon Trigeorgis[16], le rendement de cet actif peut à ce moment-là dévier de l'équilibre et la relation d'équilibre donnée par la relation (24) ne tient plus. Il faut donc a priori résoudre l'équation (23) en conservant le prix du risque, une variable difficile à estimer[17]. Le théorème de Feynman-Kac reste cependant valide et permet de traduire l'équation différentielle (23) en termes d'espérance :

$$C_0 = e^{-(r+\lambda\sigma)T} E\left(C_T\right) \tag{26}$$

où E est l'opérateur d'espérance dans l'univers réel. En fait, c'est la façon classique de calculer le prix d'un titre. On voit que le taux d'actualisation de l'espérance comporte la prime de risque du sous-jacent.

On rappelle qu'avant Black et Scholes, plusieurs chercheurs[18] avaient proposé certaines équations pour estimer les prix d'options, notamment de warrants qui étaient alors pratiquement les seules options négociées sur les marchés financiers. Mais comme dans le cas des actifs non négociés, ces équations n'arrivaient pas à éliminer le prix du risque, une variable très difficile à estimer avec précision. La force du modèle de Black et Scholes fut d'éliminer cette variable gênante en imaginant la construction d'un portefeuille complètement couvert, c'est-à-dire à l'abri de tout risque. Comme le prix de l'option évolue avec celui de son sous-jacent, il est possible de former, en utilisant le sous-jacent et l'option, un portefeuille à l'abri de tout

16. Trigeorgis, L. (1996), *op. cit.*

17. Lorsque le sous-jacent est un actif marchand, l'équation (24) permet de se départir du prix du risque.

18. On pense ici bien sûr aux travaux de l'économiste Paul Samuelson. À ce sujet, on consultera : Merton, R.C. (1992), *op. cit.*

risque. Pour éviter tout arbitrage, ce portefeuille rapporte alors le taux sans risque. Mais ce portefeuille doit être rajusté à tout moment, car le delta de l'option se modifie constamment. D'où la nécessité pour le sous-jacent d'être un bien marchand.

Trigeorgis[19] relate une façon de se départir en partie du prix du risque pour un sous-jacent non marchand. Le problème relié aux biens non marchands est que leur dérive observée diffère de leur dérive d'équilibre α^*. Soit : $\delta = \alpha^* - \alpha$. On peut assimiler δ à un dividende. Il est dès lors loisible d'imaginer un monde de marchés complets où l'actif non négocié a sa contrepartie qui coûte le même prix et qui paie un dividende δ. Comme cette contrepartie est maintenant négociée, la relation d'équilibre suivante est dès lors vérifiée :

$$(\alpha + \delta) - r = \lambda\sigma \tag{27}$$

On peut alors remplacer la prime de risque qui apparaît dans l'équation différentielle (23) par sa valeur d'équilibre donnée dans l'équation (27). On peut ainsi se positionner dans un univers neutre au risque, le stigmate représenté par le prix du risque ayant disparu de l'équation différentielle stochastique. Il faut toutefois mettre à contribution son imagination pour estimer le dividende δ !

2. Le calcul du prix d'une option par la technique de l'arbre binomial

Dans la section précédente, nous avons calculé le prix d'une option d'achat européenne écrite sur une action ne versant pas de dividende dans le cas d'une seule période. Le prix de l'option d'achat était alors égal à l'expression suivante :

$$C = \frac{qC^u + (1-q)C^d}{(1+r)} \tag{28}$$

19. Trigeorgis, L. (1996), *op. cit.*

où q et (1 – q) représentent les probabilités neutres au risque. Comme l'option ne durait qu'une période, C^u et C^d étaient connus puisque les flux monétaires d'une option sont égaux à leur valeur intrinsèque à l'échéance. On pouvait dès lors écrire :

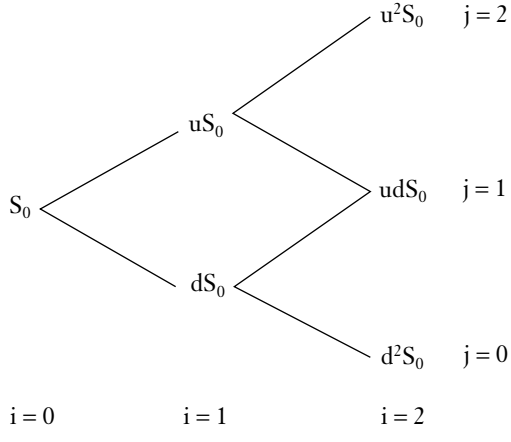
$$C = \frac{1}{1+r}\left[q\left(S_0u - X\right)^+ + \left(1-q\right)\left(S_0d - X\right)^+\right] \qquad (29)$$

Pour évaluer une option par la technique de l'arbre binomial, il faut diviser la durée de l'option en un très grand nombre de sous-périodes. Il est en effet reconnu qu'il faut recourir à au moins 30 sous-périodes pour que le prix de l'option converge vers sa vraie valeur.

Afin de mieux généraliser la construction de l'arbre binomial du prix de l'option, envisageons le cas de deux périodes, c'est-à-dire que nous divisons en 2 (N = 2) la durée T de l'option. Pour configurer l'arbre binomial, nous avons besoin de deux indices : i, la période et j, l'état de la nature. Pour construire l'arbre binomial du prix de l'action, nous devons d'abord établir l'arbre du sous-jacent, qui apparaît à la figure 3.

Comme dans le cas d'une période, le prix de l'action suit un processus multiplicatif. Au cours de la première période (i = 1), deux états sont possibles. Un état de hausse du prix, qui porte le prix de

FIGURE 3 **Arbre binomial du prix de l'action : deux périodes**



l'action à uS_0 et un état de baisse, qui amène le prix de l'action à dS_0. En vertu de la notation qui vient d'être établie, S_{10} désigne le prix de l'action à la période 1 dans l'état 0, c'est-à-dire un état de baisse de prix. S_{11} désigne pour sa part le prix de l'action à la période 1 dans l'état 1, c'est-à-dire un état de hausse de prix. À la période 2, trois états sont possibles. Un état de baisse à partir de dS_0, qui amène le prix de l'action à d^2S_0. Un état de hausse à partir de dS_0 ou un état de baisse à partir de uS_0, qui amène le prix de l'action à udS_0. Comme les nœuds de l'arbre se recombinent, ces deux mouvements se traduisent par une valeur identique pour le prix de l'action. Finalement, il peut se produire une nouvelle hausse du prix de l'action à partir de uS_0, qui élève le prix de l'action à u^2S_0.

Une fois établi l'arbre du prix de l'action, nous sommes en mesure de construire l'arbre du prix de l'option d'achat européenne. Nous connaissons les flux monétaires de l'option à sa date d'échéance ; ils sont constitués de la valeur intrinsèque de l'option. Par conséquent, contrairement au processus suivi pour l'action, l'arbre binomial du prix de l'option se construit à partir de la fin, en rétrogradant vers le nœud de la période 0, qui nous révèle le prix de l'option.

Comme illustré à la figure 4, à l'échéance de l'option, le flux monétaire de celle-ci est le maximum de sa valeur intrinsèque et de 0. Une fois ces flux monétaires calculés, il suffit de les actualiser en remontant jusqu'à la racine de l'arbre, soit C_{00}, qui révèle le prix de l'option.

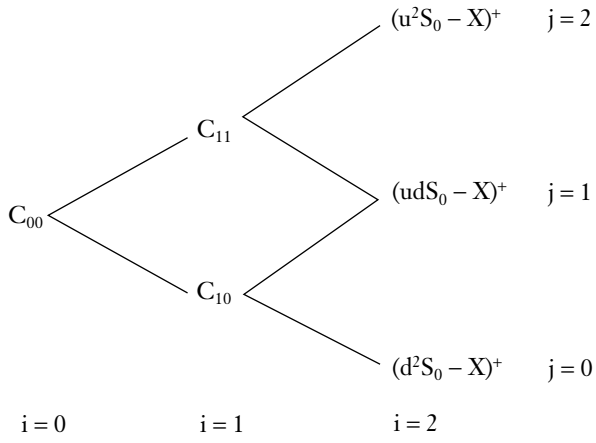
Supposons que le taux d'actualisation r soit continu et soit défini sur la même période que l'arbre. En suivant la même procédure que pour une période, on trouve :

$$C_{11} = e^{-r}\left[q\left(u^2S_0 - X\right)^+ + (1-q)(udS_0 - X)^+\right] \qquad (30)$$

$$C_{10} = e^{-r}\left[q\left(udS_0 - X\right)^+ + (1-q)(d^2S_0 - X)^+\right] \qquad (31)$$

Fort du calcul des deux flux monétaires de l'option pour le temps 1, on peut dès lors calculer le flux monétaire de l'option au temps 0, qui constitue le prix de l'option : $C_{00} = e^{-r}\left[qC_{11} + (1-q)C_{10}\right]$. Pour converger vers la véritable valeur du prix de l'option, rappelons qu'il faut

FIGURE 4 **Arbre binomial du prix du call : deux périodes**



diviser la durée T de l'option en au moins 30 sous-périodes. On suit alors la même procédure que celle qui vient d'être exposée ; il n'y a que le nombre de calculs qui diffère.

Il reste à calculer la probabilité q d'un mouvement de hausse du prix de l'action, la probabilité d'une baisse étant de (1 – q). Cox, Ross et Rubinstein[20] ont calculé les valeurs de u, d et q qui font en sorte que le modèle binomial d'une option d'achat européenne converge vers la solution du modèle de Black et Scholes. Ces valeurs sont les suivantes :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{32}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{33}$$

ce qui signifie que : $d = \frac{1}{u}$. Par ailleurs, q doit être égal à :

$$q = \frac{e^{r\sqrt{\Delta t}} - d}{u - d} \tag{34}$$

20. Cox, J., S. Ross et M. Rubinstein (1979), « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, p. 229-264.

Afin de rendre plus opérationnel le modèle binomial que nous venons de présenter, nous avons écrit en langage Visual Basic (Excel) une fonction qui calcule le prix d'une option d'achat européenne en recourant à ce modèle[21]. Ce programme se retrouve au tableau 1.

TABLEAU 1 **Fonction Visual Basic pour déterminer le prix d'un call européen par la méthode binomiale**

```
Function calleuro(X, T, S, Rf, N, sigma)
'X: prix d'exercice; T: durée de l'option; S: prix de l'action;
Rf: taux sans risque; N: nombre de pas
' sigma: écart-type des rendements de l'action
'Déclaration des variables et des vecteurs

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)

'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation

dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)

'Calcul des prix de l'action à la fin de l'arbre

Smat(0) = S * (d ^ N)

For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j

'Calcul des flux monétaires de l'option d'achat à la fin de l'arbre

For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(0, Smat(j) - X)
Next j
```

21. Le pseudo-code de ce programme se retrouve dans : Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *Implementing Derivatives Models*, Chichester, John Wiley and Sons.

TABLEAU 1 *(suite)*

```
'Actualisation des flux de l'option

For i = N - 1 To 0 Step -1
   For j = 0 To i
   Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))
   Next j
Next i

'Prix de l'option d'achat européenne

calleuro = Cash(0)

End Function
```

Utilisons les données du tableau 2 pour activer la fonction, lesquelles sont inscrites dans un chiffrier Excel.

TABLEAU 2 **Input de l'arbre binomial**

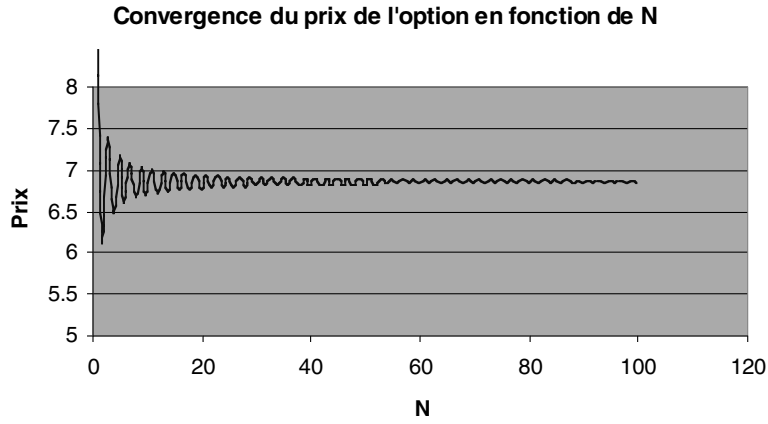
	A	B
2	X	80
3	T	0.25
4	S	80
5	Rf	0.05
6	N	1000
7	sigma	0.4

Ce tableau indique que nous commandons 1 000 simulations. La fonction calcule un prix de 6,84 $ pour l'option d'achat européenne, ce qui, à deux décimales près, est la solution qui découle de l'équation de Black et Scholes pour ces données et dont la programmation en Visual Basic se lit au tableau 3. La vitesse de convergence du prix de l'option d'achat en fonction du nombre N de simulations se retrouve à la figure 5.

TABLEAU 3 **Fonction Visual Basic pour déterminer le prix d'un call européen par la formule de Black et Scholes**

```
Function CallOptionBS(s, X, T, rf, sigma)
Num = Log(s / X) + (rf + 0.5 * sigma ^ 2) * T
d1 = Num / (sigma * Sqr(T))
CallOptionBS = s * Application.NormSDist(d1) - _
X * Exp(-T * rf) * Application.NormSDist(d1 - sigma * Sqr(T))
End Function
```

FIGURE 5



Comme on peut le constater, la vitesse de convergence est somme toute assez rapide. Il reste que le nombre de simulations habituellement suggéré, soit 30, se traduit par un calcul suffisamment imprécis du prix de l'option pour que l'on augmente le nombre de simulations N. Si N = 30, le prix de l'option est de 6,78 $, soit passablement éloigné de la cible donnée par l'équation de Black et Scholes. Si N = 29, le prix est de 6,89 $ et il remonte à ce niveau quand N = 31. Le prix de l'option fluctue donc sensiblement dans cette zone de simulation. Les fluctuations du prix dans la zone qui jouxte les 100 simulations sont encore assez élevées pour que l'on pousse N jusqu'à 1 000 de façon à obtenir un degré de précision

acceptable. On ne doit donc pas hésiter à opérer avec un N de l'ordre de 1 000, d'autant plus que la vitesse d'exécution des calculs est très élevée.

3. Le problème de l'exercice prématuré d'une option

Jusqu'ici, nous nous en sommes tenus au cas d'options européennes, c'est-à-dire des options qui ne peuvent être exercées avant leur échéance. Mais la plupart des options négociées sur les marchés financiers peuvent être exercées avant leur échéance. On les appelle *options américaines*, et on est alors confronté au phénomène de l'exercice prématuré ou anticipé[22]. L'option américaine comporte en effet une option additionnelle en regard de son homologue européen : l'option d'exercer. Le prix d'une option américaine est donc au moins aussi élevé que celui d'une option européenne, le prix de l'option d'exercer étant égal ou supérieur à 0.

L'exercice prématuré d'une option fait encore l'objet de recherches intensives, notamment du côté de ses rapports avec la simulation Monte Carlo. Mais dans le contexte de l'arbre binomial, l'exercice prématuré peut être abordé assez facilement. Pour montrer comment introduire cette nouvelle dimension dans un arbre binomial, revenons au cas de la détermination du prix d'une option européenne. Dans un univers neutre au risque, et cela en vertu de l'équation (20), le prix d'une telle option est égal à :

$$C_0 = e^{-rT} E^Q\left(C_T\right) \tag{35}$$

où C_T représente le cash-flow de l'option à son échéance, une variable aléatoire, cela va sans dire, puisque le prix du sous-jacent peut alors se situer dans un nombre très élevé d'états de la nature.

22. *Early exercise*, en anglais.

Dans le cas d'une option américaine, on doit déterminer la date optimale d'exercice. Le prix d'une telle option peut alors s'écrire comme suit[23] :

$$C_0 = \sup_{\tau}\left[e^{-r\tau}E\left(C_\tau\right)\right] \tag{36}$$

L'équation (36) indique qu'il faut effectuer un exercice d'optimisation pour déterminer le prix d'une option américaine. En d'autres termes, il faut déterminer le temps d'arrêt $\tau\left(\tau \leq T\right)$ qui donne à l'option sa valeur espérée maximale, cela dans un contexte stochastique. Dans le jargon financier, il faut déterminer la règle d'arrêt optimale.

Comment traiter le phénomène de l'exercice prématuré dans le cadre de l'arbre binomial ? Dans le cas d'une option européenne ne versant pas de dividende, il s'agissait de calculer les flux monétaires de l'option à son échéance, qui étaient conditionnés par la distribution du prix de l'action à cette échéance, puis d'actualiser la valeur espérée de ces flux jusqu'au temps 0, pour obtenir le prix de l'option. On ne faisait alors qu'appliquer directement la formule (35) du prix de l'option européenne.

Mais avec une option américaine, on ne saurait s'intéresser qu'aux flux monétaires finaux de l'option car, selon l'équation (36), le prix de l'option est également conditionné par ses flux intermédiaires. On applique alors la procédure suivante dans un arbre binomial pour déterminer le prix d'une option américaine. Par exemple, considérons le cas d'une option de vente[24] américaine écrite sur une action ne versant pas de dividende, option désignée par P. À chaque nœud intermédiaire de l'arbre, il faudra alors comparer, d'une part, la valeur intrinsèque de l'option, soit sa valeur d'exercice donnée par l'écart entre le prix d'exercice de l'option et le prix de l'action à ce nœud, et, de l'autre, la valeur actualisée des flux de l'option à ce nœud,

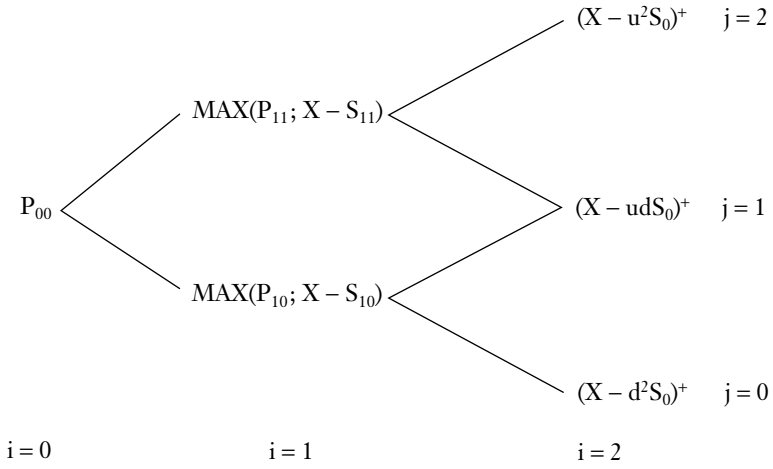
23. Sup ou supremum signifie : la plus grande borne inférieure.

24. Une option de vente écrite sur un sous-jacent donne à son détenteur le droit de vendre ce sous-jacent au prix d'exercice de l'option. Comme cette option est ici américaine, elle peut être exercée en tout temps.

c'est-à-dire la valeur de poursuite de l'option. Ce nœud se verra attribuer la valeur maximale de ces deux nombres ; cette règle d'exercice sera appliquée à tous les nœuds de l'arbre[25].

Traduisons la règle qui vient d'être établie à l'intérieur d'un arbre binomial à deux périodes. Le tracé de cet arbre apparaît à la figure 6.

FIGURE 6 **Arbre binomial d'une option de vente américaine**



où :

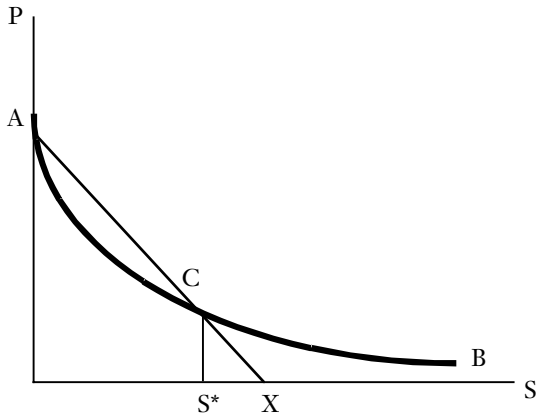
$$P_{11} = e^{-r}\left[q\left(X - u^2S_0\right)^+ + \left(1 - q\right)\left(X - udS_0\right)^+\right] \qquad (37)$$

25. Comme le disent si bien Longstaff et Schwartz, la règle d'exercice pour une option américaine avant l'échéance est de comparer la valeur intrinsèque de l'option avec son flux monétaire anticipé de continuation. On exercera si la valeur intrinsèque est supérieure au flux monétaire anticipé. Selon Tavella (2002), si la stratégie optimale d'exercice ne dépend que de la valeur courante du sous-jacent et du temps, cette stratégie n'est alors qu'une simple application de l'équation de Bellman, bien connue en programmation dynamique. Dans le cas de l'option américaine classique, la stratégie consiste à exercer ou à ne pas exercer. Le principe de Bellman en temps continu se formule alors comme suit.

Pour illustrer la règle d'exercice d'une option américaine, nous n'avons pas choisi, à dessein, le cas de l'option d'achat américaine ne versant pas de dividende. En effet, une telle option ne sera jamais exercée, car sa valeur est toujours supérieure ou égale à sa valeur d'exercice (valeur intrinsèque). Le prix d'une option d'achat américaine ne versant pas de dividende n'excède donc pas celui de son homologue européenne. Il en va autrement pour l'option de vente américaine, comme on peut le constater en examinant la figure 7, où sont présentées les courbes respectives d'un put américain et d'un put européen en fonction de la valeur du sous-jacent S.

À la figure 7, la courbe convexe ACB est celle du put européen et la courbe formée du segment de courbe CB et de la droite AC est celle du put américain. On remarque qu'en deçà de S*, le put américain vaut davantage que le put européen. Il est donc optimal dans ce cas d'exercer l'option américaine au prix S*.

FIGURE 7 **Put américain *vs* put européen**



À tout moment, la stratégie optimale est le maximum de la valeur d'exercice (valeur intrinsèque) et de la valeur associée à la sélection d'une stratégie optimale un instant plus tard. Voir à ce sujet : Longstaff, F.A. et E.S. Schwartz (2001), « Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach », *Review of Financial Studies*, p. 113-147 ; Tavella, D. (2002), *op. cit.*

Le programme du calcul du prix d'un put américain, écrit en Visual Basic, apparaît au tableau 4[26]. Par rapport au tableau 1, qui concerne un call européen, les seuls changements sont la définition de la valeur intrinsèque de l'option et l'ajout des quelques lignes, apparaissant en caractères gras, concernant la règle d'exercice de l'option américaine.

TABLEAU 4 **Programme Visual Basic du prix d'un put américain par la méthode de la binomiale**

```
Function putamer(X, T, S, Rf, N, sigma)

'Déclaration des variables et des vecteurs

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)

'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation

dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)

'Calcul des prix de l'action à la fin de l'arbre

Smat(0) = S * (d ^ N)

For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j

'Calcul des flux monétaires de l'option d'achat à la fin de l'arbre

For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(0, X - Smat(j))
Next j
```

26. Le pseudo-code de ce programme se retrouve dans : Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *op. cit.*

TABLEAU 4 *(suite)*

```
'Actualisation des flux de l'option

For i = N - 1 To 0 Step -1
    For j = 0 To i
    Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))

'On applique la règle d'exercice

    Smat(j) = Smat(j) / d
    Cash(j) = Application.Max(Cash(j), X - Smat(j))


    Next j
Next i

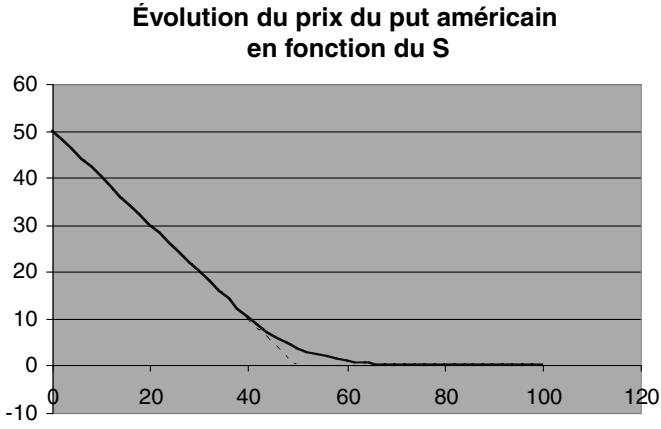
'Prix de l'option d'achat européenne

putamer = Cash(0)


End Function
```

Soit X = 50, T = 0,25, R = 0,05, N = 100 et $\alpha = 0{,}4$. Pour ces données, l'évolution du prix du put américain en fonction du prix de l'action se retrouve à la figure 8.

FIGURE 8



Comme on peut le voir dans cette figure, en deçà du prix de 40 $, la valeur de l'option d'achat se confond avec sa valeur intrinsèque : il est alors optimal d'exercer dans cette zone.

4. La simulation Monte Carlo

Une autre méthode couramment utilisée pour estimer le prix d'une option, qu'elle soit financière ou réelle, est la simulation Monte Carlo. Cette simulation, qui se base directement sur la formule (20) pour estimer le prix d'une option européenne, voit le prix d'une option comme la valeur actualisée de l'espérance du flux monétaire final d'une option évaluée dans un univers neutre au risque :

$$C_0 = e^{-rT} E^Q\left(C_T\right) \tag{38}$$

Boyle[27] fut le premier à proposer l'estimation de l'équation (38) par la simulation Monte Carlo. Son raisonnement se formule comme suit.

On sait que l'espérance d'une fonction quelconque, disons g(y), est une intégrale, c'est-à-dire :

$$E\left(g\left(y\right)\right) = \int_A g\left(y\right) f\left(y\right) dy = \overline{g} \tag{39}$$

où f(y) est la fonction de densité de : $\int_A f\left(y\right) dy = 1$. Un estimé $\hat{g}$ de $\overline{g}$ est simplement la moyenne suivante :

$$\hat{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g\left(y_i\right) \tag{40}$$

27. Boyle, P.P. (1977), « Options : A Monte Carlo Approach », *Journal of Financial Economics*, p. 323-338. On consultera également : Boyle, P., M. Broadie et P. Glasserman (1997), « Monte Carlo Methods for Security Pricing », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1267-1321.

Il suffit donc d'effectuer un très grand nombre de tirages aléatoires de la variable y, de calculer les valeurs correspondantes de g et de faire la moyenne de ces valeurs. L'écart-type de cet estimé est donné par $\hat{s}$:

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[g(y_i) - \hat{g}\right]^2} \tag{41}$$

En vertu du théorème central limite, $\hat{g}$ converge vers $\bar{g}$ quand n devient très important.

4.1. Simulation Monte Carlo et options d'achat européennes

La transposition de ces équations à la détermination du prix d'une option d'achat européenne est relativement simple. Avant d'enclencher les simulations, il faut d'abord écrire le processus stochastique du prix de l'action. Comme nous l'avons relevé auparavant, il vaut mieux simuler sur le logarithme du prix de l'action plutôt que sur son niveau. Le scénario du logarithme du prix de l'action, que l'on représente par x_t, est alors le suivant, si tant est que le prix de l'action suit un mouvement brownien géométrique :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{42}$$

Pour enclencher un scénario du prix de l'action, on divise d'abord la durée de l'option T en N sous-périodes ou N pas, c'est-à-dire $\Delta t = \frac{T}{N}$. On génère ensuite un premier nombre aléatoire et on applique l'équation (42) pour déterminer le prix de l'action une période plus tard, x_t étant alors le prix initial de l'action. Après on génère d'autres nombres aléatoires en procédant par récursivité pour calculer le prix de l'action à la fin du premier scénario de l'action. Soit S^1 ce prix. On calcule alors le flux monétaire de l'option d'achat pour le premier scénario.

$$C^1 = (S^1 - X)^+ \tag{43}$$

On effectue N scénarios en suivant cette procédure et on obtient donc N flux monétaires pour l'option. Le prix estimé de l'option d'achat est alors de :

$$\hat{C}_0 = e^{-rT}\hat{E}^Q\left(C_T\right) = e^{-rT}\frac{\sum_{i=1}^{N} C^i}{N} \qquad (44)$$

C^i étant le flux monétaire de l'option d'achat pour le scénario i. Signalons que la valeur ainsi calculée n'est qu'une estimation qui devient plus précise à mesure que le nombre de scénarios augmente. Il faut aussi remarquer que pour un nombre de scénarios donné, le résultat de la simulation se modifie chaque fois que l'on refait la simulation puisqu'une telle simulation repose sur un ensemble de variables aléatoires qui s'altère d'une simulation à l'autre.

Au tableau 5, on recourt au langage Visual Basic pour calculer le prix d'une option d'achat européenne par la simulation Monte Carlo[28]. Pour activer cette fonction, nous nous servons des données du tableau 2[29]. Nous savons que le prix de l'option correspondant à ces données est de 6,84 $ selon la formule de Black et Scholes, qui sert ici d'étalon pour mesurer la performance de la simulation Monte Carlo.

En utilisant le programme du tableau 5, on obtient 6,77 $ comme prix de l'option après 10 000 itérations, ce qui représente encore un écart assez important avec le prix découlant de la formule de Black et Scholes, soit 6,84 $. Et si l'on refait cette simulation avec le même nombre d'itérations, on obtient évidemment un résultat différent. La simulation Monte Carlo doit donc s'accompagner de techniques de réduction de la variance de la simulation ($\hat{s}^2$) à moins que l'on ne soit prêt à effectuer un très grand nombre de simulations et qu'en plus on ait à sa disposition un excellent générateur de nombres

28. Cette fonction s'inspire directement de : Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *op. cit.*

29. Dans la simulation, nous avons supposé que N = 1, c'est-à-dire que chaque scénario du prix de l'action ne comporte qu'un pas. Nous sommes en droit de procéder de la sorte, car la discrétisation donnée par l'équation (42) est exacte.

TABLEAU 5 **Simulation Monte Carlo du prix d'une option d'achat européenne en langage Visual Basic sans variables antithétiques**

```
Function calleuromonc(X, T, S, sigma, Rf, N, M)

Dim i As Integer
Dim j As Integer

Dim St As Variant

'On calcule le pas. On divise la période T en N sous-périodes

dt = T / N

'On calcule les paramètres du log de S:


nudt = (Rf - 0.5 * sigma ^ 2) * dt
sigsdt = sigma * Sqr(dt)


'sum_CT nous permet de calculer la moyenne des scénarios de calls

SUM_CT = 0

'On enclenche les itérations dont le nombre est M

For j = 1 To M

'On pose le prix de départ de l'action

lnSt = Log(S)

'On enclenche un scénario du prix de l'action

For i = 1 To N


'On génère une variable aléatoire epsilon

eps = Application.NormSInv(Rnd)

'On calcule le log. correspondant du prix de l'action

lnSt = lnSt + nudt + sigsdt * eps


Next i
```

TABLEAU 5 *(suite)*

```
' On obtient la valeur de l'action à la fin du scénario

St = Exp(lnSt)


' On trouve le flux monétaire du call correspondant

CT = Application.Max(0, St - X)


'On somme les résultats de façon à pouvoir calculer la moyenne des
prix

SUM_CT = SUM_CT + CT

'Et on passe à un autre scénario

Next j

'On calcule alors le prix du call

calleuromonc = (SUM_CT / M) * Exp(-Rf * T)

End Function
```

aléatoires. Les techniques de réduction de la variance les plus connues sont la méthode des variables antithétiques et la méthode des variables de contrôle. Nous exposerons ces méthodes l'une après l'autre.

Définissons des variables aléatoires dites antithétiques (opposées) dont la corrélation est de –1 ; c'est-à-dire que pour chaque scénario du logarithme du prix de l'action, on aura les deux équations suivantes :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (45)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\Delta t - \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (46)$$

La même variable aléatoire ε est d'abord introduite avec un signe positif pour calculer le log de S puis avec un signe négatif. Il en résulte une corrélation de (–1) entre les deux mouvements browniens, ce qui accélère la convergence. Le tableau 6 fait état d'une simulation Monte Carlo pour un call européen avec variables antithétiques[30].

TABLEAU 6 **Simulation Monte Carlo du prix d'une option d'achat européenne en langage Visual Basic avec variables antithétiques**

```
Function calleuromoncva(X, T, S, sigma, Rf, N, M)

Dim i As Integer
Dim j As Integer

Dim St As Variant

'On calcule le pas. On divise la période T en N sous-périodes

dt = T / N

'On calcule les paramètres du log de S:


nudt = (Rf - 0.5 * sigma ^ 2) * dt
sigsdt = sigma * Sqr(dt)


'sum_CT nous permet de calculer la moyenne des scénarios de calls

SUM_CT = 0

'On enclenche les itérations dont le nombre est M

For j = 1 To M

'On pose le prix de départ de l'action

lnSt = Log(S)

'On enclenche un scénario du prix de l'action
```

30. Cette fonction s'inspire directement de : Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *op. cit.*

TABLEAU 6 *(suite)*

```
For i = 1 To N


'On génère une variable aléatoire epsilon

eps = Application.NormSInv(Rnd)

'On calcule le log. correspondant du prix de l'action avec v.a.

lnSt1 = lnSt + nudt + sigsdt * eps
lnSt2 = lnSt + nudt - sigsdt * eps


Next i


' On obtient la valeur de l'action à la fin du scénario avec v.a.

St1 = Exp(lnSt1)
St2 = Exp(lnSt2)



' On trouve le flux monétaire du call correspondant

CT = 0.5 * Application.Max(0, St1 - X) + 0.5 * Application.Max(0,
St2 - X)


'On somme les résultats de façon à pouvoir calculer la moyenne des
prix


SUM_CT = SUM_CT + CT


'Et on passe à un autre scénario


Next j

'On calcule alors le prix du call

calleuromoncva = (SUM_CT / M) * Exp(-Rf * T)


End Function
```

TABLEAU 7 **Évolution du prix de l'option en fonction de M avec et sans variables antithétiques**

	F	G	H	I	J
2	sans v.a.			avec v.a.	
3	M			M	
4	100	7.12		100	6.77
5	1000	7.07		1000	6.82
6	5000	6.95		5000	6.83
7	10000	6.77		10000	6.75
8	20000	6.8		20000	6.83
9	30000	6.87		30000	6.81

Le tableau 7 montre que les résultats fluctuent beaucoup moins lorsqu'on recourt à des variables antithétiques.

La technique des variables de contrôle[31] est une autre méthode pour réduire l'écart-type d'une simulation Monte Carlo. Formellement, une variable de contrôle[32] que nous désignons par cv doit être corrélée positivement avec V, la valeur de l'actif contingent que nous voulons estimer. Cependant, E(cv) doit être égal à zéro. Construisons le portefeuille suivant V′ :

$$V' = V - \beta cv + \xi \tag{47}$$

V′ est assimilable à un portefeuille couvert au sein duquel cv sert d'instrument de couverture pour V. Mais cette couverture est imparfaite, de telle sorte que l'équation incorpore un terme d'erreur ξ. Plutôt que de simuler directement la valeur de V, nous simulons la valeur de V′ pour calculer la valeur de V. Nous avons :

$$E(V') = E(V) \tag{48}$$

E(cv) étant égal à 0, par hypothèse. Nous pouvons par conséquent approcher la valeur de V en recourant au portefeuille V′. La variance de V′ est de :

$$\sigma_{v'}^2 = \sigma_v^2 - 2\beta\sigma_{v,cv} + \beta^2\sigma_{cv}^2 \tag{49}$$

31. *Control variate*, en anglais.

32. À ce sujet, on consultera : James, J. et N. Webber (2000), *Interest Rate Modelling*, New York, John Wiley & Sons.

Étant donné que l'utilisation de cv est censée réduire la variance de la simulation, il est approprié de rechercher le β qui minimise $\sigma^2_{V'}$. En dérivant l'équation (49) par rapport à β et en égalant le résultant à 0, on obtient :

$$\hat{\beta} = \frac{\sigma_{V,cv}}{\sigma^2_{cv}} \tag{50}$$

À l'évidence, ce bêta correspond à l'estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO) d'une régression de V sur cv. Clewlow et Strickland[33] recourent à cette méthode d'estimation pour évaluer la sensibilité de V à cv. En substituant l'équation (50) dans l'équation (49) et en écrivant le résultat en termes de la corrélation ρ entre V et cv, on a :

$$\sigma^2_{V'} = \sigma^2_V\left(1 - \rho^2\right) \tag{51}$$

En vertu de l'équation (51), la variance de la simulation est reliée négativement à la corrélation entre la valeur du bien contingent et la variable de contrôle. À la limite, cette corrélation est de 1. Nous sommes alors en présence d'une couverture parfaite et l'erreur standard de la simulation est nulle. Une bonne variable de contrôle doit par conséquent entretenir une forte corrélation avec le bien contingent que nous voulons évaluer.

Le concept de variable de contrôle est si important en finance que nous devons l'illustrer par plusieurs exemples[34]. Le premier concerne la détermination du prix d'une option d'achat asiatique arithmétique. Le flux monétaire à l'échéance (*payoff*) de cette option est le suivant :

$$\text{payoff} = \left(\overline{S}_{aT} - X\right)^+ \tag{52}$$

---

33. Clewlow, L. et C. Strickland (1997), « Monte Carlo Valuation of Interest Rate Derivatives under Stochastic Volatility », *Journal of Fixed Income*, p. 35-45.

34. À ce sujet, on consultera : Clewlow, L. et A. Caverhill (1994), « On the Simulation of Contingent Claims », *Journal of Derivatives*, p. 66-74 ; Boyle, P.P. (1977), *op. cit.* ; James, J. et N. Webber (2000), *op. cit.* ; Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *op. cit.* ; Clewlow, L. et C. Strickland (1997), *op. cit.*

$\overline{S}_{aT}$ étant la moyenne arithmétique du sous-jacent calculée sur la durée de vie de l'option selon une règle spécifique. Il n'existe aucune solution analytique pour le call asiatique arithmétique, mais il en existe une pour sa version géométrique dont le prix est évidemment très corrélé avec celui de l'option arithmétique. Nous pouvons exploiter cette relation pour créer une variable de contrôle. N'oublions pas qu'une variable de contrôle est un portefeuille couvert en finance. Ce portefeuille est constitué d'une position en compte (*long*) dans le call arithmétique et d'une position à découvert (*short*) dans le call géométrique. Nous avons :

$$\tilde{A} = \hat{A} - (\beta \times cv) \tag{53}$$

où $\tilde{A}$ est le portefeuille qui sert à calculer le prix du call arithmétique et $\hat{A}$, la valeur simulée du call arithmétique. La variable de contrôle choisie cv est de $(\hat{G} - G)$, où $\hat{G}$ est la valeur simulée du call géométrique calculée en recourant aux mêmes variables aléatoires que celles qui sont utilisées dans le cas du calcul du call arithmétique et G, la valeur analytique du call géométrique, c'est-à-dire sa « vraie valeur ». En vertu de la définition de la variable de contrôle, l'équation (53) devient :

$$\tilde{A} = \hat{A} - (\hat{G} - G) \tag{54}$$

Cette variable de contrôle satisfait aux deux exigences d'une bonne variable de contrôle. Premièrement, la corrélation entre $\hat{A}$ et $(\hat{G} - G)$[35] est évidemment très élevée. À ce point que nous fixons β à 1. Deuxièmement, E(cv) = 0, parce que $E(\hat{G}) = G$. Nous pouvons réécrire l'équation (54) comme suit pour les besoins de la simulation :

$$\tilde{A} = G + (\hat{A} - \hat{G}) \tag{55}$$

À l'aide d'une simulation Monte Carlo, on obtient la valeur du portefeuille $(\hat{A} - \hat{G})$ en calculant la moyenne actualisée des flux monétaires à l'échéance (*payoffs*) de ce portefeuille sur l'ensemble des M simulations, c'est-à-dire :

$$\hat{A} - \hat{G} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \left[\left(\overline{S}_{aT}^{j} - X \right)^{+} - \left(\overline{S}_{gT}^{j} - X \right)^{+} \right] \times e^{-rT} \tag{56}$$

35. N'oublions pas que G est une constante, étant la solution analytique du call géométrique.

Conformément à l'équation (55), nous ajouterons cette valeur estimée à G à la fin des simulations de façon à obtenir une approximation du prix du call arithmétique. En agissant de la sorte, nous aurons grandement réduit l'écart-type de la simulation en raison de la corrélation très élevée des prix des calls arithmétique et géométrique.

Une autre façon de construire des variables de contrôle est de recourir aux « grecques[36] » pour couvrir un portefeuille. On peut ainsi construire un portefeuille qui est couvert par le delta[37], par le delta-gamma[38], etc. Clewlow et Strickland (1997, 1998) et Clewlow et Carverhill (1994) donnent plusieurs exemples de ces types de couvertures. Leur méthode recourt à l'économétrie pour estimer les sensibilités des prix des options à évaluer aux variables de contrôle.

Considérons un premier cas de couverture avec les grecques. Nous voulons évaluer par simulation le prix d'une option d'achat européenne standard[39]. Pour y arriver, nous simulons le portefeuille suivant :

$$\text{portfolio} = C - \Delta S \tag{57}$$

c'est-à-dire l'écriture d'un call qui est couvert par une quantité Δ du sous-jacent S[40]. Cette couverture en est une du type dynamique parce que le Δ réagit aux changements de S qui se produisent durant la durée de vie de l'option. Celui qui écrit l'option déposera la prime résultant de la vente du call dans un compte bancaire et vendra ou achètera le sous-jacent pour réajuster la couverture à la suite du changement du delta. Cela donne lieu à des mouvements de fonds positifs ou négatifs dans le compte bancaire. La contrepartie dynamique de l'équation (57) est :

$$C_0 e^{r(T)} - \left[\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial C_{ti}}{\partial S} - \frac{\partial C_{ti-1}}{\partial S} \right) S_{ti} e^{r(T-ti)} \right] = C_T + \eta \tag{58}$$

36. On appelle « grecques » les diverses dérivées du prix d'une option par rapport à ses variables explicatives.
37. Un *delta-hedged portfolio*, en anglais.
38. Un *delta-gamma hedged portfolio*, en anglais.
39. *Plain vanilla*, en anglais.
40. Cette équation est écrite en termes de flux monétaires. L'encaissement de la prime de l'option donne lieu à un flux monétaire positif. L'achat de l'action donne lieu à un flux monétaire négatif.

Le premier terme de l'équation (58) est le prix à terme (*forward price*) de l'option, c'est-à-dire C_0e^{rT}, où C_0 est la prime ou le prix de l'option. Le terme entre crochets, qui est la variable de contrôle cv, représente les réajustements du portefeuille à la suite des changements du delta $\frac{\partial C_{ti}}{\partial S}$ survenus durant la simulation du sentier temporel du sous-jacent. Le delta a une solution analytique, soit le $N(d_1)$ de l'équation de Black et Scholes. Le prix à terme de l'option additionné des réaménagements de portefeuille reproduit les flux monétaires de l'option avec une erreur égale à η puisque les calculs s'effectuent en temps discret.

En remplaçant le terme entre crochets par cv dans l'équation (58), on a :

$$C_0^j e^{rT} - cv^j = C_T{}^j + \eta^j \tag{59}$$

où l'indice j désigne un résultat de la simulation j parmi M simulations. On notera que le bêta de cv est de 1 puisqu'il est question d'une couverture par le delta. En prenant l'espérance de (59), on obtient :

$$C_0 = e^{-rT}E\left(C_T\right) \tag{60}$$

Par cette équation, on se rend compte que la méthode des variables de contrôle est entièrement compatible avec la technique de la détermination des prix dans un univers neutre au risque.

L'équation (59) peut être réécrite en ignorant η^j :

$$C_0^j = e^{-rT}\left(C_T^j + cv^j\right) \tag{61}$$

C'est là le résultat d'une simulation pour le prix du call avec variable de contrôle. Après M simulations, on obtient l'estimé final du prix du call :

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} C_0^j \tag{62}$$

Dans le cas de la couverture par le delta, nous avons fixé à 1 le coefficient de cv, soit β. Supposons que nous n'ayons aucune idée a priori sur la valeur de ce coefficient. Pour le calculer, nous réécrivons comme suit l'équation (59) :

$$e^{-rT}C_T^j = C_0^j - \beta cv^j e^{-rT} - n^j e^{-rT} \tag{63}$$

Or, avec une notation évidente :

$$C_T^{j*} = \beta_0 + \beta_1 cv^{j*} + n^{j*} \qquad j = 1, ..., M \tag{64}$$

Dans l'équation (64), C_T^{j*} et cv^{j*} sont connus. Chaque variable est un vecteur de M observations, résultant des M simulations. Si $n^{j*} \sim N(0,1)$, on peut régresser, par la méthode des moindres carrés ordinaires, C_T^{j*} sur cv^{j*} pour obtenir un estimé de $\hat{\beta}_1$ pour le coefficient de cv, soit la variable de contrôle[41]. On note, en comparant les équations (63) et (64), que $\hat{\beta}_0$ est un estimé du prix du call, qui fait l'objet de la simulation. Cet estimé peut être comparé avec le résultat de la simulation pour plus d'assurance.

Après quelques opérations élémentaires, le terme entre crochets de l'équation (58), qui fait figure de variable de contrôle, peut être exprimé comme suit[42] :

$$cv = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial C_{ti}}{\partial S}\left[S_{ti+1} - E\left(S_{ti}\right)\right]e^{r(T-t_{i+1})} \tag{65}$$

Le terme entre crochets dans l'équation (65) représente évidemment une martingale à base delta. Clewlow et Stickland (1997) s'inspirent de ce résultat pour définir une variable de contrôle fondée sur une telle martingale pour le modèle de Fong et Vasicek[43]. On veut déterminer le prix d'un call standard dont le sous-jacent est une obligation à coupon zéro. La variable de contrôle de la simulation j est égale à :

$$cv^j = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial C_{ti}}{\partial r}\left[\Delta r_{ti} - E\left(\Delta r_{ti}\right)\right]e^{r(T-t_{i+1})} \tag{66}$$

---

41. Certes, des techniques de régression plus robustes peuvent être utilisées, tel le GMM.

42. Pour cette transformation du terme entre crochets, voir : Clewlow et Strickland (1998), p. 93.

43. Cet exemple se retrouve également dans James et Webber (2000), p. 357-359.

où r est le taux d'intérêt instantané. Le delta du call relativement à r, $\frac{\partial C_{ti}}{\partial r}$, est calculé en utilisant son expression analytique dans le modèle de Jamshidian[44]. En recourant à des substitutions évidentes, on peut estimer l'équation (64) par les moindres carrés ordinaires (MCO) de manière à trouver le bêta de la variable de contrôle. On se souviendra que le terme constant de cette régression est un estimé du prix du call qui peut, encore une fois, être comparé avec l'estimé découlant de la simulation Monte Carlo. Clewlow et Strickland notent une réduction de la variance par un facteur de 200 quand ils utilisent cette technique.

Un autre problème inhérent à la simulation Monte Carlo, qui, même s'il est relié au problème de la réduction de la variance, demeure distinct, concerne le caractère aléatoire des nombres pseudo-aléatoires qui sont calculés par le générateur utilisé lors de la simulation Monte Carlo. Tout générateur de nombres aléatoires comporte des déficiences. C'est pourquoi on qualifie de pseudo-aléatoires les nombres qui sont calculés par un tel générateur. Ces nombres aléatoires peuvent être autocorrélés. Ils peuvent se répéter après un certain nombre d'itérations. Ils peuvent ne pas couvrir tout l'espace d'intégration : c'est le problème des « concentrations[45] ». Tous ces problèmes reliés à l'échantillonnage aléatoire peuvent créer des biais dans l'estimation des prix des actifs contingents.

Il existe plusieurs techniques pour améliorer l'échantillonnage aléatoire, soit les nombres à faible divergence[46] ou séquences déterministes (Halton, Sobol[47], Faure), les techniques de ponts browniens, l'échantillonnage dit de l'hypercube latin et l'appariement des moments. Pour générer des nombres quasi-aléatoires, les techniques à faible divergence ont paradoxalement une mémoire. Un nombre aléatoire se

---

44. Jamshidian, F. (1989), « An Exact Bond Pricing Formula », *Journal of Finance*, p. 205-209.

45. On dit *clumpiness* en anglais.

46. *low-discrepancy numbers* en anglais.

47. Selon Jäckel, les nombres de Sobol ont une dimension antithétique, mais qui n'est pas parfaite. C'est là l'un des cas d'interrelations entre les techniques de réduction de la variance et les techniques d'échantillonnage aléatoire. Voir : Jäckel, P. (2002), *Monte Carlo Methods in Finance*, Chichester, Wiley.

« rappelle » de sa position de telle sorte que la configuration globale des nombres aléatoires générés ne fasse pas montre de concentrations[48].

Avant de terminer cette section, nous formulons quelques commentaires sur les statistiques utilisées pour comparer les prévisions de modèles obtenues par la simulation Monte Carlo. La mesure la plus utilisée dans la littérature financière est le MSE[49] (erreur quadratique moyenne). La racine carrée de cette mesure est le RMSE[50]. Le RMSE se définit comme suit :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\left(\text{valeur prévue}\right)_t - \left(\text{valeur réalisée}\right)_t\right]^2} \qquad (67)$$

Cette mesure ne va cependant pas sans défauts. Selon Alexander[51], des problèmes surgissent si l'on utilise le RMSE dans les prévisions de volatilité. La minimisation du RMSE revient à la maximisation du critère de vraisemblance seulement quand la fonction de vraisemblance est normale et à volatilité constante. Cela n'est évidemment pas le cas si l'on est en présence d'hétéroscédasticité conditionnelle. Dans pareil cas, on doit considérer le RMSE non comme un critère de minimisation mais bien comme une simple distance métrique ou une fonction de perte quadratique.

Le RMSE a une variante, soit le HRMSE (*heteroscedasticity root mean square error*). Cette mesure corrige les données de l'hétéroscédasticité. C'est évidemment une mesure approximative, grosso modo une mesure relative, qui se définit comme suit[52] :

$$\text{HRMSE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(1 - \frac{\text{réalisé}_t}{\text{prévu}_t}\right)^2} \qquad (68)$$

48. Pour plus de détails sur l'utilisation des l'échantillonnage aléatoire en finance, on consultera Jäckel (2002) et James et Webber (2000).
49. *Mean square error* en anglais.
50. *Root mean square error* en anglais.
51. Alexander, C. (2001), *Market Models : A Guide to Financial Data Analysis*, Chichester, Wiley, p. 122-123.
52. Au sujet des critères de performance utilisés dans les prévisions de volatilité, on se référera à : Martens, M. (2002), *op. cit.* et à : Bollerslev T. et J.H. Wright (2001), « High Frequency Data, Frequency Domain and Volatility Forecasting », *The Review of Economics and Statistics*, p. 596-602.

Cette mesure peut être utile lorsque l'on compare des prévisions de volatilité. Finalement, on peut recourir à la méthode de Mincer-Zarnowitz pour mesurer la qualité d'une prévision. C'est le R^2 de la régression des valeurs réalisées ex-post sur les valeurs prévues, la régression comportant également une constante.

4.2. Simulation Monte Carlo et options d'achat américaines

Il y a encore quelques années, on considérait que la simulation Monte Carlo n'était pas adaptée au calcul des prix des options américaines. On lui reconnaissait beaucoup de vertus pour le calcul des prix des options qui dépendent du sentier suivi par le sous-jacent[53] ou lorsque le modèle du prix de l'option comporte plusieurs variables d'état, ou plusieurs dimensions, mais l'on croyait que la simulation Monte Carlo ne permettait pas de traiter le problème posé par l'exercice prématuré, qui est le lot des options américaines. Tilley[54] fut le premier à examiner les pouvoirs de la simulation Monte Carlo en matière de traitement de l'exercice prématuré. Plus récemment, Broadie et Glasserman[55] ont proposé un estimateur à biais positif et un autre à biais négatif pour évaluer des options américaines par la simulation Monte Carlo. Leur méthode repose sur l'échantillonnage aléatoire. Longstaff et Schwartz (2001) ont combiné la méthode des moindres carrés ordinaires et la simulation Monte Carlo pour évaluer une option américaine. Leur estimateur comporte certes un biais négatif mais il est convergent. Andersen et Broadie[56] ont dégagé un estimateur à biais positif en introduisant également la régression à l'intérieur de la simulation Monte Carlo. Comme on peut le constater, toutes ces méthodes comportent un biais de telle sorte qu'il est souhaitable de présenter les résultats de la simulation Monte Carlo en termes

53. Soit les *path-dependent options* en anglais.

54. Tilley, J.A. (1993), « Valuing American Options in a Path Simulation Model », *Transactions of the Society of Actuaries*, p. 83-104.

55. Broadie, M. et P. Glasserman (1997), « Pricing American Style Securities Using Simulation », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1323-1352.

56. Andersen, L. et M. Broadie (2001), « A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options », working paper, Columbia University.

d'un intervalle de confiance plutôt que de livrer un estimateur ponctuel pour le prix d'une option américaine. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons au modèle de Longstaff et Schwartz.

Mais auparavant, afin de mieux cerner le problème auquel fait face la simulation Monte Carlo en matière de détermination du prix d'une option américaine – une option d'achat rappelons-le –, supposons, comme Tavella[57], que l'on ait généré N scénarios du prix de l'action et que, pour chaque scénario, on ait retenu le prix maximal de l'action dudit scénario pour calculer le flux monétaire de l'option du scénario. On a par la suite calculé la moyenne des flux monétaires actualisés sur l'ensemble des scénarios. Le résultat est le prix simulé de l'option d'achat américaine.

On constate rapidement que cette méthode comporte un biais fortement positif, c'est-à-dire qu'elle surestime de beaucoup le prix de l'option. Qui plus est, ce biais ne se résorbe pas à mesure que le nombre de scénarios augmente, c'est-à-dire que l'estimateur fourni par la simulation n'est pas convergent. En effet, ces calculs reposent à la fois sur la connaissance de l'information passée et sur celle de l'information future. Pour chaque scénario, on choisit le maximum du prix de l'action pour calculer le flux monétaire (*payoff*) de l'option, ce qui est en fait la différence entre ce prix maximal de l'action et le prix d'exercice de l'option. En procédant comme dans un univers de prévisions parfaites, on surestime de beaucoup la valeur de l'option.

Le modèle de Longstaff et Schwartz (2001) s'attaque à la faiblesse de la simulation Monte Carlo en matière de détermination du prix d'une option américaine, disons une option d'achat. Comme nous le notions auparavant, le problème de l'exercice prématuré consiste à tout instant en la comparaison de la valeur intrinsèque de l'option avec sa valeur de poursuite, qui est la valeur espérée des flux monétaires de l'option à ce moment-là. Si la valeur intrinsèque excède la valeur espérée, on exerce l'option, sinon, on la conserve pour un autre moment. Et ainsi de suite.

57. Tavella, D. (2002), *op. cit.*

Longstaff et Schwartz (2001) recourent à la régression linéaire pour évaluer la valeur espérée du *payoff* de l'option à un instant donné, c'est-à-dire pour un scénario donné dans le cadre de la simulation Monte Carlo. On sait en effet que la valeur estimée de la variable dépendante qui découle de la régression est une espérance conditionnelle. Il s'agit de l'espérance conditionnelle du *payoff* dans le modèle de Longstaff et Schwartz qui, lorsqu'elle est comparée avec le *payoff* observé, permet de déterminer si l'on doit ou non exercer. La technique de Longstaff et Schwartz (L&S) est la suivante. Supposons que chaque scénario du prix de l'action comporte M états. Les calculs s'enclenchent au dernier scénario simulé et, pour chacun des M états, L&S calculent la valeur intrinsèque de l'option d'achat, c'est-à-dire son *payoff*[58]. Ils reculent ensuite d'un scénario et calculent les *payoffs* des M états. L&S ne retiennent que les états en jeu, c'est-à-dire ceux qui ont une valeur intrinsèque positive. Ils régressent ensuite les *payoffs* actualisés du dernier scénario qui correspondent à ces états sur les prix de l'action qui leur sont associés dans l'avant-dernier scénario et sur les carrés de ces mêmes prix. La régression est la suivante :

$$C^{(J)} = \alpha + \beta_1 S^{(J)} + \beta_2 S^{2(J)} + \varepsilon^{(J)} \tag{69}$$

Dans cette équation, J représente l'état et C, le *payoff* actualisé de l'option qui provient du dernier scénario. L'espérance conditionnelle de $C^{(J)}$ est de :

$$\hat{C}^{(J)} = E\left(C^{(J)}\right) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 S^{(J)} + \hat{\beta}_2 S^{2(J)} \tag{70}$$

Si le *payoff* de l'action pour l'état J est supérieur à $\hat{C}^{(J)}$, alors l'option est exercée et l'état prend la valeur du *payoff*. Pour le même état des scénarios subséquents, on doit alors annuler le *payoff* positif qui s'y trouverait, car selon l'équation (36), on doit choisir pour le *payoff* la plus grande borne inférieure. Par ailleurs, si le *payoff* de l'action pour l'état J est inférieur ou égal à $\hat{C}^{(J)}$, on met alors 0 comme valeur de poursuite de l'option puisque, l'action n'étant pas exercée, aucun flux monétaire n'est généré. On procède de la sorte pour chaque scénario. On obtient finalement une matrice de *payoffs* que l'on actualise de façon à estimer le prix de l'option d'achat, qui est la moyenne de ces cash-flows actualisés sur l'ensemble des scénarios.

58. Qui, rappelons-le, est la différence entre le prix de l'action et le prix d'exercice pour une option d'achat.

Pour illustrer les calculs, supposons trois scénarios du prix de l'action qui auraient été générés de la même façon que dans le cas de l'option européenne antérieure, et ce avec les mêmes données. Ces scénarios comportent chacun cinq états (voir le tableau 8).

TABLEAU 8 **Trois scénarios du prix de l'action**

29	44	45
53	39	50
55	52	55
56	56	52
45	27	53

On commence la simulation par le dernier scénario et on calcule les *payoffs* de l'option d'achat, dont le prix d'exercice est de 50. Ces *payoffs* apparaissent au tableau 9.

TABLEAU 9 ***Payoffs* de l'option du troisième scénario**

0
0
5
2
3

Puis on recule d'un scénario et on recalcule les *payoffs* (voir le tableau 10).

TABLEAU 10 ***Payoffs* du deuxième scénario**

0
0
2
6
0

Il y a deux scénarios qui comportent un *payoff* positif. On régresse les *payoffs* actualisés du scénario 3 correspondant à ces états, soit $5e^{-0,05}$ et $2e^{-0,05}$, sur les prix correspondants de l'action, soit 52 et 56, et sur leurs carrés[59]. On compare ensuite le *payoff* à sa valeur estimée par la régression, soit son espérance conditionnelle. Supposons que le *payoff* de l'état 3 soit inférieur à sa valeur estimée par la régression. On met 0 pour la valeur de cet état, car il n'y a alors aucun flux monétaire. Supposons par ailleurs que le *payoff* de l'état 4 soit supérieur à sa valeur donnée par la régression. On met alors 6 pour l'état 4 du scénario 2 puisque la règle commande alors l'exercice, et on met 0 à l'état 4 du scénario 3, car il faut choisir la plus grande borne inférieure, en vertu de la règle du calcul du prix de l'option américaine donnée par l'équation (36). À cette étape de nos calculs, les *payoffs* des deux derniers scénarios sont tels qu'ils apparaissent au tableau 11.

TABLEAU 11 ***Payoffs* des deux derniers scénarios**

0	0
0	0
0	5
6	0
0	3

Il reste à traiter le premier scénario. On identifie d'abord les *payoffs* positifs de ce scénario, qui se situent aux états 2, 3 et 4. On régresse alors les *payoffs* actualisés des deux scénarios ultérieurs correspondant à ces états, soit 0, et $5e^{-0,05\times2}$ et $6e^{-0,05}$, sur les prix des actions qui leur correspondent, soit 53, 55 et 56, de même que sur leurs carrés. Supposons que seul l'état 4 commande l'exercice. On met alors 6 pour l'état 4 du premier scénario et on annule le *payoff* de l'état 4 du second scénario, car on ne doit retenir que la plus grande borne inférieure. La matrice finale des *payoffs* de l'option d'achat apparaît au tableau 12.

59. Cette régression souffre certes d'un manque de degrés de liberté. Nous ne voulons illustrer ici que la procédure à suivre.

TABLEAU 12 **Matrice finale des *payoffs* de l'option d'achat**

0	0	0
0	0	0
0	0	5
6	0	0
0	0	3

La matrice du tableau 12 commande quelques remarques. D'abord, c'est une matrice constituée uniquement de *payoffs*, c'est-à-dire de valeurs intrinsèques. La régression n'est que subsidiaire dans la simulation : elle sert à déterminer s'il y a exercice ou non. La valeur de poursuite de l'option est toujours nulle, car il n'y a alors aucun flux monétaire qui est généré. Ensuite, pour une ligne donnée de la matrice, il ne peut y avoir qu'un seul *payoff*, c'est-à-dire une seule date d'exercice pour un état donné sur l'ensemble des scénarios. Et c'est l'exercice dans le scénario le plus rapproché qui prime, en vertu de la règle du calcul de l'option américaine donnée par l'équation (36).

À partir du tableau 12, on peut donc calculer le prix de l'option américaine[60] :

$$C_0 = \frac{5e^{-0,05\times 3} + 6e^{-0,05} + 3e^{-0,05\times 3}}{3} = 4,19\ \$ \qquad (71)$$

5. FLUX MONÉTAIRES INTERMÉDIAIRES VERSÉS PAR LE SOUS-JACENT ET PRIX DE L'OPTION

Le sous-jacent de l'option peut verser des flux intermédiaires et ces versements sont susceptibles d'influencer le prix de l'option. Dans le cas d'une action, de tels versements sont les dividendes et dans celui d'une obligation, ce sont des coupons. Nous aborderons ces deux cas l'un après l'autre.

60. Comme nous l'avons déjà signalé, ce prix comporte un biais négatif, c'est-à-dire qu'il sous-estime le prix de l'option. En effet, l'équation (36), soit la formule du prix de l'option d'achat américaine, est simulée en temps discret et non continu. Des dates d'exercice potentielles sont dès lors escamotées, d'où le biais négatif de l'estimateur de L&S. Celui-ci est toutefois convergent.

Examinons d'abord le cas d'une option d'achat européenne dont le sous-jacent, une action, verse des dividendes[61]. Supposons qu'il existe deux dates ex-dividendes durant la durée de vie de l'option. L'action peut être vue comme la somme de deux composantes : *i*) une partie déterministe, soit les dividendes actualisés ; *ii*) une partie stochastique, égale à la différence entre le prix de l'action et les dividendes actualisés, soit S*. Or, comme les dividendes auront été versés à l'échéance de l'option et comme, en vertu de la théorie de l'arbitrage, le prix de l'action diminue du montant du dividende le jour ex-dividendes, on peut tout simplement recourir à l'équation de Black et Scholes pour calculer le prix d'une option européenne dont le sous-jacent verse des dividendes en prenant soin de remplacer S par S*. Soit T la durée de l'option en fraction d'année, τ_1 la date de versement du premier dividende et τ_2, la date de versement du second. On a :

$$S^* = S - D_1 e^{-r\tau_1} - D_2 e^{-r\tau_2} \qquad (72)$$

Au tableau 13 on retrouve une fonction écrite en langage Visual Basic pour calculer le prix d'une option d'achat européenne dont la durée de vie comporte deux dates ex-dividendes.

Nous passons maintenant à la détermination du prix d'une option d'achat américaine dont le sous-jacent verse des dividendes. Nous supposons que la durée de vie de l'option comporte deux dates ex-dividendes. Pour calculer le prix de cette option, nous recourons à l'approximation de Black[62]. Selon Black, il n'est rationnel d'exercer que juste avant une date ex-dividendes. Et s'il y a exercice, celui-ci s'effectuera fort probablement juste avant la dernière date ex-dividendes. La règle d'exercice de l'option d'achat est donc ici connue. Or, lorsqu'il en est ainsi, à chaque date d'exercice, l'option américaine peut être vue comme une option européenne. Sa valeur peut donc être calculée à partir de la formule de Black et Scholes ajustée pour

61. L'ajustement du prix d'une option pour les dividendes est dû à : Merton, C. (1973), « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, p. 141-183 ; Black, F. (1975), « Fact and Fantasy in the Use of Options », *Financial Analysts Journal*, p. 36-41 et p. 61-72. On consultera également : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, 3e édition, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, chap. 6.

62. Black, F. (1975), *op. cit.*

TABLEAU 13 **Fonction Visual Basic du calcul du prix d'un call européen avec dividendes**

```
Function calloptionBS2div(s, X, T, rf, sigma, D1, D2, T1, T2)

'On calcule les dates de versement des deux dividendes. T1 et T2
sont en mois

taux1 = T1 / 12
taux2 = T2 / 12

'On actualise les deux dividendes

D1A = D1 * Exp(-rf * taux1)
D2A = D2 * Exp(-rf * taux2)

'On calcule S*

SStar = s - D1A - D2A

'Puis l'on applique la formule de B&S en remplaçant S par S*

Num = Log(SStar / X) + (rf + 0.5 * sigma ^ 2) * T
D1 = Num / (sigma * Sqr(T))
calloptionBS2div = SStar * Application.NormSDist(D1) - _
X * Exp(-T * rf) * Application.NormSDist(D1 - sigma * Sqr(T))

End Function
```

les dividendes (tableau 13). Comme nous considérons ici deux dates d'exercice, soit la date d'échéance T et la dernière date ex-dividendes τ_2, le prix de l'option d'achat c_0 est donc de :

$$c_0 = \text{MAX}\left[c_{\tau_2}, c_T\right] \tag{73}$$

c'est-à-dire que la valeur de l'option américaine est le maximum des deux valeurs suivantes : *i*) sa valeur $c_{\tau 2}$ donnée par la formule de Black et Scholes ajustée pour les dividendes en supposant que la date d'échéance de l'option, vue comme date d'exercice, soit τ_2, soit la dernière date ex-dividendes ; *ii*) sa valeur c_T toujours donnée par la formule de Black et Scholes ajustée pour les dividendes à la date d'échéance effective de l'option, soit T.

Pour illustrer la procédure qui doit être suivie dans le cas d'une option américaine, prenons l'exemple suivant. Une option est écrite sur une action qui vaut actuellement 50 $; son prix d'exercice est également de 50 $. La volatilité de l'action est de 0,2 et le taux sans risque est de 5 %. La durée de vie de l'option est de 6 mois. À l'intérieur de cet intervalle, deux dividendes de 0,70 $ chacun seront versés : l'un dans deux mois et l'autre dans cinq mois. Selon la formule (51), nous devons calculer la valeur de l'option en fixant successivement l'échéance de l'option à τ_2 et à T dans la formule de Black et Scholes ajustée pour les dividendes. Le prix de l'option d'achat américaine est le maximum de ces deux valeurs. Nous nous servons de la fonction Visual Basic apparaissant au tableau 14 pour calculer la valeur de l'option en date τ_2.

TABLEAU 14 **Fonction Visual Basic du calcul du prix du call par la formule de B&S ajustée pour les dividendes à la dernière date ex-dividendes**

```
Function calloptionamer1(s, X, rf, sigma, D1, T1, T2)

taux1 = T1 / 12
taux2 = T2 / 12

D1A = D1 * Exp(-rf * taux1)
SStar = s - D1A

Num = Log(SStar / X) + (rf + 0.5 * sigma ^ 2) * taux2
D1 = Num / (sigma * Sqr(taux2))
calloptionamer1 = SStar * Application.NormSDist(D1) - _
X * Exp(-taux2 * rf) * Application.NormSDist(D1 - sigma * Sqr(taux2))

End Function
```

Selon la formule de Black et Scholes, le prix de l'option est de 2,6729 $ si elle est détenue jusqu'à son échéance et de 2,7008 $ si elle est exercée après 5 mois. La valeur de l'option est donc de 2,7008 $.

Nous voulons maintenant calculer le prix d'une option américaine dans un arbre binomial lorsqu'il existe des versements de dividendes durant la durée de vie de l'option. Il existe deux dividendes comme dans le cas précédent, D_1 et D_2, versés aux dates τ_1 et

τ_2 ($\tau_2 > \tau_1$). Comme dans le cas précédent, on éclate le prix de l'action en deux parties : *i*) la partie stochastique S* qui est le prix de l'action diminué des dividendes actualisés ; *ii*) la partie déterministe, qui est la valeur actualisée des dividendes.

Pour construire l'arbre binomial, on se sert d'abord de S* pour monter l'arbre binomial du prix de l'action, car seule la partie stochastique du prix de l'action obéit à un processus binomial. Dans le cas actuel, le prix de départ pour construire l'arbre binomial serait de :

$$S^* = S_0 - D_1 e^{-r\tau_1} - D_2 e^{-r\tau_2} \tag{74}$$

et on applique le processus binomial à S*, exactement comme dans la section 2, pour construire l'arbre binomial du prix de l'action. Une fois cet arbre construit, on rajoute les dividendes actualisés aux nœuds de l'arbre, l'actualisation se faisant par rapport à τ_1 et τ_2.

Pour illustrer ces calculs, reprenons l'exemple précédent.

$$S^* = 50 - 0,7e^{-0,05\times\frac{2}{12}} - 0,7e^{-0,05\times\frac{5}{12}} = 48,62\ \$$$

C'est ce prix initial qui sert à calculer l'arbre binomial de la partie stochastique du prix de l'action. Dans un deuxième temps, on rajoute les dividendes actualisés aux nœuds de cet arbre. Par exemple, au nœud (0,0), soit à la racine de l'arbre, S = S* +(dividendes actualisés), résultat évidemment égal à 50 $, soit le prix effectif de l'action. Après 2 mois, on ajoute aux nœuds de cette période le montant suivant :

$0,7 + 0,7e^{-0,05\times\frac{3}{12}} = 1,3913\ \$$. En effet, le premier dividende n'est alors plus actualisé puisqu'il vient d'être versé et le second dividende sera versé dans trois mois à partir de cette date. On actualise donc ce dernier sur 3 mois. On n'ajoutera plus le premier dividende aux nœuds de l'arbre après deux mois puisqu'il a été versé. Après quatre mois, on ajouterait

aux nœuds de l'arbre pour cette période : $0,7e^{-0,05\times\frac{1}{12}} = 0,6971\ \$$ puisque le second dividende sera versé dans un mois à partir de cette date. Au bout de 5 mois, ce qui correspond à la date de versement du dernier dividende, on ajouterait 0,7 $ aux nœuds de l'arbre de cette période, et l'on cesserait d'ajouter des dividendes aux nœuds ultérieurs de l'arbre de S*. Pour déterminer le prix de l'option d'achat américaine, on procède alors exactement comme dans la section 3. On calcule les flux monétaires de l'option au bout de l'arbre du prix de

l'action, ces flux monétaires correspondant alors à la valeur intrinsèque de l'option. Puis on actualise ces flux jusqu'au début de l'arbre en appliquant à chaque nœud la règle d'exercice. Pour un nœud donné, le flux monétaire d'un nœud est en effet le maximum des deux montants suivants : *i*) la valeur intrinsèque de l'option à ce nœud ; *ii*) la valeur actualisée des flux monétaires à ce nœud[63].

La procédure pour ajuster l'arbre binomial du prix de l'obligation à ses flux monétaires intermédiaires, soit les coupons de cette obligation, est quelque peu différente de celle de l'arbre du prix de l'action. En effet, les coupons sont détachables alors que les dividendes ne le sont pas. Une obligation avec coupons peut donc être considérée comme un portefeuille d'obligations à coupon zéro, chaque coupon et la valeur nominale de l'obligation étant vus comme des obligations à coupon zéro. Pour construire l'arbre d'une obligation munie de coupons, il suffit de construire les arbres binomiaux de chacune des obligations à coupon zéro qui constituent l'obligation avec coupons et d'additionner par la suite ces arbres pour obtenir l'arbre du prix de l'obligation avec coupons. Une fois cette opération effectuée, il faut retrancher l'intérêt couru des nœuds de manière à obtenir l'arbre du prix de l'obligation. C'est la procédure suivie par Black, Derman et Toy[64]. Une procédure plus simple est proposée par Tuckman[65] ; elle repose sur la construction d'un seul arbre pour le prix de l'obligation. On débute par les nœuds de la fin de l'arbre, là où le prix de l'obligation est égal à sa valeur nominale. On ajoute le

---

63. Il est également possible d'intégrer les dividendes dans une simulation Monte Carlo. Si l'on suppose d'abord que le dividende (d) est continu, on simulerait alors le prix de l'action à partir de l'équation récursive suivante : $S_i = S_{i-1} e^{\left(r-d-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}}$, soit la version lognormale du prix de l'action avec dividende continu dans un univers neutre au risque. Si le dividende est discret, Broadie et Glasserman (1997) proposent de remplacer cette équation par la suivante : $S_i = S_{i-1} e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} - D_i$, où D_i est le dividende payé au temps t_i. Voir : Broadie, M. et P. Glasserman (1997), *op. cit.*, p. 1336.

64. Black, F., E. Derman et W. Toy (1990), « A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options », *Financial Analysts Journal*, p. 33-39.

65. Tuckman, B. (2002), *Fixed Income Securities*, New York, John Wiley & Sons.

coupon et on actualise ces flux monétaires en rétrogradant vers le début, comme pour tout arbre binomial. Il faut cependant se souvenir que lorsqu'une date de coupon se présente à un nœud donné, il faut ajouter le coupon à la valeur actualisée de ce nœud et poursuivre l'actualisation. Pour obtenir l'arbre du prix de l'obligation, on soustrait par la suite l'intérêt couru.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux outils qui nous permettront, dans les chapitres suivants, de maîtriser les diverses transpositions du calcul numérique à la finance moderne. Traditionnellement, les prix des options sont déterminés à partir d'arbres binomiaux, mais on recourt de plus en plus à la simulation Monte Carlo pour ce faire, d'autant plus qu'on peut maintenant utiliser cette dernière technique pour fixer les prix des options américaines, ce qui a beaucoup augmenté l'attrait de cette technique qui n'était, auparavant, adaptée qu'au seul calcul des options européennes. Elle peut maintenant être utilisée pour le calcul des prix d'une grande variété d'options américaines comme nous avons pu le constater.

Nous avons particulièrement insisté sur la notion d'exercice prématuré d'une option qui est le lot des options américaines et qui fait présentement l'objet d'intenses recherches, aux plans tant théorique qu'empirique. Le traitement de l'exercice prématuré d'une option est une application particulière de l'équation de Bellman. Nous avons montré dans ce chapitre comment l'arbre binomial parvenait à résoudre cette équation, ce qui constitue la façon la plus simple de l'aborder. Nous avons ensuite complexifié le problème de l'exercice prématuré en supposant que le sous-jacent de l'option verse des dividendes. Comme nous l'avons souligné, l'exercice, s'il se produit, s'effectuera tout juste avant une date ex-dividendes. La règle d'exercice est alors connue et on peut recourir à l'approximation de Black, qui n'est qu'une simple application de la célèbre formule de Black et Scholes, pour calculer le prix d'une option américaine classique : une option américaine devient en effet européenne lorsque la date d'exercice est connue. Nous avons finalement montré que ce problème peut être facilement résolu par la technique de l'arbre binomial. Il suffit en effet de construire l'arbre du prix de l'action qui exclut les dividendes, soit

le prix associé à la composante stochastique de l'action. On ajoute par la suite les dividendes actualisés aux nœuds de l'arbre et on applique alors la procédure habituelle d'évaluation d'une option américaine dont le sous-jacent ne verse pas de dividendes.

ANNEXE 1.1

Le lemme d'Itô et l'équation différentielle partielle de Black et Scholes[66]

LE LEMME D'ITÔ

Soit x, une variable aléatoire, et G(x,t), une fonction de cette variable aléatoire et du temps (t). Par exemple, x peut être le prix d'une action et G(.), une option écrite sur cette action. La variable x suit le mouvement géométrique brownien suivant :

$$dx = \mu x dt + \sigma x dz \tag{1}$$

où μ est la dérive du processus géométrique et σ, la volatilité de l'option. La variable dz obtempère à un processus de Wiener, c'est-à-dire :

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{2}$$

où $\varepsilon \sim N(0,1)$. L'espérance de dz est de :

$$E(dz) = \sqrt{dt}E(\varepsilon) = 0 \tag{3}$$

et sa variance :

$$E(dz^2) = dtE(\varepsilon^2) = dt \tag{4}$$

Réalisons l'expansion de Taylor de G jusqu'au deuxième degré. Nous obtenons :

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 \tag{5}$$

66. Cette section s'inspire des ouvrages suivants : Hull, J.C. (2003), *Options, Futures and other derivatives*, New Jersey, Prentice Hall ; Wilmott, P. (2001), *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, Chichester, John Wiley and Sons ; Neftci, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2e édition, San Diego, Academic Press.

On peut discrétiser le mouvement brownien suivi par x comme suit :

$$\Delta x = \mu x \Delta t + \sigma x \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{6}$$

Si l'on met Δx au carré, on obtient : $\sigma^2 x^2 \varepsilon^2 \Delta t$ + termes en Δt de puissance supérieure à 1

Dans le calcul différentiel et intégral classique, on négligerait toutes les variables dont l'exposant est supérieur à 1. Mais en calcul stochastique, Δx^2 contient un terme de puissance égale à 1 qui ne peut donc être ignoré. À la limite, on peut démontrer que Δx^2 tend vers $\sigma^2 x^2 dt$ quand Δt tend vers 0.

En prenant la limite de la série de Taylor tout en tenant compte de ce dernier résultat, on obtient[67] :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 dt \tag{7}$$

Cette dernière équation est le lemme d'Itô. En remplaçant dx par sa valeur donnée par l'équation (1) dans l'équation (7), on obtient finalement :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \mu x + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} \sigma x dz \tag{8}$$

L'équation différentielle partielle de G a donc une dérive de :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \mu x + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) \tag{9}$$

et une variance de :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \sigma x \right)^2 \tag{10}$$

67. Les termes qui comprennent Δx^2, Δt^2, $\Delta x \Delta t$, ou toute autre variation des deux variables x et t dont l'exposant est supérieur à 1, sont considérés comme négligeables à la limite et disparaissent donc de la série de Taylor.

On peut généraliser le lemme d'Itô en écrivant le mouvement brownien de x sous la forme générale suivante :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{11}$$

Par exemple, dans le cas précédent :

$$a(x,t) = \mu x \tag{12}$$

$$b(x,t) = \sigma x \tag{13}$$

Le lemme d'Itô s'exprime alors comme suit pour la fonction G(x,t) :

$$dG = \left[a\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right] dt + b\frac{\partial G}{\partial x} dz \tag{14}$$

Cette équation permet de mieux visualiser le lien entre les paramètres de l'équation de diffusion donnée par la relation (11) et l'équation différentielle partielle. C'est en effet la dérive **a** du mouvement brownien qui précède $\frac{\partial G}{\partial x}$ dans la dérive de l'équation différentielle de G, mais c'est **b** qui précède cette même dérivée dans la partie stochastique de cette équation. Finalement, c'est $\frac{1}{2} b^2$ qui précède $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$.

Considérons une application du lemme d'Itô. Revenons au cas du prix de l'action, désigné par S, qui obtempère à un mouvement brownien géométrique, soit :

$$dS = \mu S dS + \sigma S dz \tag{15}$$

Supposons que :

$$F = \ln(S) \tag{16}$$

L'équation différentielle partielle de F est donc, en vertu du lemme d'Itô[68] :

$$dF = \frac{dF}{dS} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 F}{dS^2} dt \tag{17}$$

68. À remarquer ici que F n'est pas fonction de t. La dérivée de F par rapport à t n'apparaît donc pas dans l'équation différentielle de F.

Puisque F est égal à ln(S), ses dérivées premières et secondes sont de :

$$\frac{dF}{dS} = \frac{1}{S} \text{ et } \frac{d^2F}{dS^2} = -\frac{1}{S^2} \tag{18}$$

En substituant ces expressions dans l'équation de dF, on obtient :

$$dF = \frac{1}{S}(\mu S dt + \sigma S dz) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{19}$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz \tag{20}$$

On constate que le passage à la forme logarithmique a pour effet de faire disparaître le niveau du prix de l'action dans l'équation différentielle de ln(S), ce qui présente un certain intérêt pour les simulations. Qui plus est, par rapport à l'équation différentielle de S, l'équation différentielle de ln(S) voit la dérive de S dégonflée de $\frac{1}{2}\sigma^2$.

Supposons maintenant une option d'achat (C) écrite sur F, soit le logarithme de S, c'est-à-dire :

$$C = f(F,t) \tag{21}$$

Son équation différentielle partielle s'écrit alors, en vertu du lemme d'Itô (équation 14) :

$$dC = \left[\frac{\partial C}{\partial F}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F^2}\sigma^2\right]dt + \frac{\partial C}{\partial F}\sigma dz \tag{22}$$

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PARTIELLE DE BLACK ET SCHOLES

L'équation différentielle partielle de Black et Scholes, qui a permis d'établir leur désormais célèbre formule du prix d'une option d'achat européenne, repose sur la formation d'un portefeuille à l'abri de tout risque. Imaginons un portefeuille formé d'une position en compte (*long*) dans une option d'achat européenne et d'une position à découvert

(*short*) dans l'actif sous-jacent, à hauteur de ΔS. La valeur de ce portefeuille est de :

$$\Pi = C(S, t) - \Delta S \tag{23}$$

où Π représente la valeur du portefeuille. S suit un mouvement brownien géométrique donné par l'équation (15). Le changement du portefeuille de la période durant l'intervalle dt est le suivant :

$$d\Pi = dC - \Delta dS \tag{24}$$

En vertu du lemme d'Itô, on peut écrire :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt \tag{25}$$

En substituant l'équation (25) dans l'équation (24), on a :

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt - \Delta dS \tag{26}$$

Les termes qui comprennent dS représentent le risque de ce portefeuille. Nous voulons éliminer ce risque. Pour ce faire, nous donnons à Δ la valeur suivante :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \tag{27}$$

On parle alors de couverture par le delta (*delta hedging*). En substituant cette valeur dans l'équation (26), on obtient :

$$d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt \tag{28}$$

Comme le portefeuille ne présente plus de risque, il devrait rapporter $r\Pi dt$ durant la période dt, r étant le taux d'intérêt de l'actif sans risque. On peut donc écrire :

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{29}$$

En remplaçant $d\Pi$ et Π par leurs expressions respectives, on a :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt = r(C - \Delta S) dt = r\left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) dt \tag{30}$$

En divisant par dt et en réarrangeant, on obtient finalement :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \qquad (31)$$

C'est là la fameuse équation différentielle de Black et Scholes. Comme on le sait, cette équation admet une forme analytique, mais on peut également la simuler en recourant à une méthode numérique de façon à évaluer le prix de l'option d'achat européenne.

Comme nous le disions auparavant, il est préférable d'exprimer le prix de l'option d'achat européenne en termes du logarithme du prix de l'action. Soit F le logarithme de S. Exprimé en termes de F, nous savons que dC est alors égal à :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial F}dF + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2}dt \qquad (32)$$

La seule différence avec l'équation différentielle exprimée en termes de S est que S^2 n'apparaît pas dans le terme de la dérivée seconde, puisque l'équation de diffusion de F, donnée par la relation (20), n'admet pas le niveau de S comme coefficient de dz, cela contrairement au mouvement brownien suivi par le prix de l'action.

La variation de notre portefeuille composé de C et de S s'écrit alors :

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial F}dF + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2}dt - \Delta dS \qquad (33)$$

Exprimons dS en termes de dF en recourant à l'équation (19) :

$$dS = SdF + \frac{1}{2}S\sigma^2 dt \qquad (34)$$

En substituant cette valeur dans l'équation (33), on a :

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial F}dF + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2}dt - \Delta SdF - \frac{1}{2}\Delta\sigma^2 Sdt \qquad (35)$$

Pour éliminer le risque de cette équation représenté par dF, il faut fixer le delta à :

$$\Delta = \frac{\partial C/\partial F}{S} \qquad (36)$$

En remplaçant Δ par cette valeur dans l'équation (35), on a :

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial F^2}dt - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial C}{\partial F}dt \qquad (37)$$

En suivant maintenant les mêmes étapes que dans le cas précédent, on a :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial F^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial C}{\partial F}\right)dt = r\left(C - \Delta S\right)$$

$$= r\left(C - \frac{\partial C / \partial F}{S}S\right)dt$$

$$= r\left(C - \frac{\partial C}{\partial F}\right)dt \qquad (38)$$

On obtient finalement l'équation différentielle de Black et Scholes exprimée en termes du logarithme du prix de l'action :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial F^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial C}{\partial F} - rC = 0 \qquad (39)$$

Qu'arrive-t-il si l'action verse un dividende continu défini en termes du prix de l'action, ce dividende étant désigné par d ? L'action verse alors un dividende de dSdt dans l'intervalle de temps dt. Dans l'équation de la variation du portefeuille, soit l'équation (26) dans le cas pour lequel l'équation différentielle est formulée en termes du prix de l'action, s'ajoute alors le terme $-\Delta dSdt$, car le portefeuille renferme une quantité $-\Delta$ de l'action. On peut montrer facilement que le coefficient de $\frac{\partial C}{\partial S}$ est alors de $(r - d)$ dans l'équation différentielle de Black et Scholes. Lorsque cette équation est formulée en termes du logarithme du prix de l'action, soit l'équation (33), le coefficient de $\frac{\partial C}{\partial F}$ est alors de : $r - d - \frac{1}{2}\sigma^2$.

ANNEXE 1.2

Le prix du risque[69]

L'un des avantages de l'équation différentielle de Black et Scholes est l'absence, dans cette équation, du prix du risque. Comme nous l'avons mentionné dans ce chapitre, le prix du risque est une variable difficile à estimer. Mais, lorsque le sous-jacent n'est pas négocié, le prix du risque ne peut être éliminé facilement de l'équation différentielle stochastique d'un produit dérivé. C'est le cas par exemple pour les options sur taux d'intérêt dont le sous-jacent, le taux d'intérêt, n'est pas à l'évidence un actif négocié. C'est le cas également pour bon nombre d'options réelles.

Supposons que deux produits dérivés, C_1 et C_2, dépendent d'un facteur de risque θ et de t. Ce facteur de risque n'est pas nécessairement un instrument négocié. Ce peut être, au dire de Hull, la température au centre de la Nouvelle-Orléans. Le facteur de risque suit le mouvement brownien géométrique suivant :

$$d\theta = m\theta dt + s\theta dz \quad (1)$$

Les deux produits dérivés dont le sous-jacent est θ sont également soumis à un mouvement brownien géométrique :

$$dC_1 = \mu_1 C_1 dt + \sigma_1 C_1 dz \quad (2)$$

$$dC_2 = \mu_2 C_2 dt + \sigma_2 C_2 dz \quad (3)$$

À remarquer que la variable dz qui représente le processus de Wiener est la même dans les équations (2) et (3) que dans l'équation (1), car les deux produits dérivés subissent le risque du facteur, lequel est représenté par dz dans l'équation de $d\theta$.

Nous voulons former un portefeuille à l'abri de tout risque composé de C_1 et C_2. Dans les équations différentielles des deux produits dérivés, il faut donc éliminer les termes qui incorporent dz. En

69. Cette section s'inspire de : Hull, J.C. (2003), *op. cit.* ; Björk, T. (1998), *op. cit.*

formant un portefeuille composé de $\sigma_2 C_2$ du premier produit dérivé et de $-\sigma_1 C_1$ du second, on parviendra à ce résultat. Ce portefeuille Π est par conséquent défini comme suit :

$$\Pi = (\sigma_2 C_2) C_1 - (\sigma_1 C_1) C_2 \tag{4}$$

Sa variation est la suivante :

$$d\Pi = (\sigma_2 C_2) dC_1 - (\sigma_1 C_1) dC_2 \tag{5}$$

En substituant les équations (2) et (3) dans l'équation (5), on a :

$$d\Pi = (\mu_1 \sigma_2 C_1 C_2 - \mu_2 \sigma_1 C_1 C_2) dt \tag{6}$$

Comme le portefeuille Π est à l'abri de tout risque, il doit rapporter le taux sans risque. On peut donc écrire :

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{7}$$

En remplaçant Π et $d\Pi$ par leurs équations respectives (4 et 6), l'équation (7) devient :

$$[\mu_1 \sigma_2 C_1 C_2 - \mu_2 \sigma_1 C_1 C_2] dt = [r(\sigma_2 C_2 C_1 - \sigma_1 C_1 C_2)] dt \tag{8}$$

$$\mu_1 \sigma_2 - \mu_2 \sigma_1 = r\sigma_2 - r\sigma_1 \tag{9}$$

L'équation (9) peut être récrite :

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \tag{10}$$

On reconnaît dans l'équation (10) les ratios de Sharpe pour les produits dérivés C_1 et C_2. Ils doivent être identiques lorsque le portefeuille Π est à l'abri de tout risque. C'est pourquoi nous écrivons ce ratio commun sans indices dans l'équation (10) et que nous le désignons par λ, que nous appelons « prix du risque ». Il existe une seule source de risque dans notre exemple, soit θ. Il n'y a donc qu'un seul prix du risque, un prix du risque étant associé à un facteur de risque et non à un titre particulier. Le prix du risque est le rendement excédentaire qu'exigent les investisseurs par unité de ce risque. Le prix du risque est déterminé par son marché respectif[70].

70. À ce sujet, on consultera : Björk, T. (1998), *op. cit.*

L'équation (10) peut être réécrite comme suit :

$$\mu - r = \lambda\sigma \tag{11}$$

L'équation (11) montre que lorsque le portefeuille est parfaitement couvert, les rendements excédentaires des produits dérivés sont égaux à leur prime de risque, donnée par le produit du prix du risque, commun aux deux produits dérivés, et de leur écart-type respectif.

Nous nous mettons maintenant en devoir de décrypter l'équation différentielle à laquelle obtempère un produit dérivé lorsque le portefeuille Π est à l'abri de tout risque. Nous déterminerons ici l'équation différentielle de C_1 de la section précédente. On rappelle le mouvement brownien auquel obéit ce produit :

$$dC_1 = \mu_1 C_1 dt + \sigma_1 C_1 dz \tag{12}$$

Mais comme le sous-jacent de C_1 est θ, dC_1 est aussi égal, en vertu du lemme d'Itô, à :

$$dC_1 = \left[\frac{\partial C_1}{\partial \theta} m\theta + \frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{1}{2} s^2\theta^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial \theta^2}\right] dt + s\theta \frac{\partial C_1}{\partial \theta} dz \tag{13}$$

En égalant les coefficients de dt et de dz dans les équations (12) et (13), on obtient :

$$\mu_1 C_1 = \frac{\partial C_1}{\partial \theta} m\theta + \frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{1}{2} s^2\theta^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial \theta^2} \tag{14}$$

$$\sigma_1 C_1 = s\theta \frac{\partial C_1}{\partial \theta} \tag{15}$$

Or, selon l'équation (10) :

$$\mu_1 - r = \lambda\sigma_1 \tag{16}$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par C_1, on a :

$$\mu_1 C_1 - rC_1 = \lambda\sigma_1 C_1 \tag{17}$$

En substituant les équations (14) et (15) dans la relation (17), on obtient finalement l'équation différentielle de C_1 quand le portefeuille Π est à l'abri de tout risque :

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + \theta(m - \lambda s)\frac{\partial C_1}{\partial \theta} + \frac{1}{2} s^2\sigma_1^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial \theta^2} = rC_1 \tag{18}$$

Lorsque le sous-jacent θ n'est pas négocié, le prix du risque λ subsiste dans l'équation différentielle d'un produit dérivé écrit sur un tel sous-jacent. Black et Scholes ont pu se départir du prix du risque, car le sous-jacent de l'option d'achat européenne est une action négociée. On peut alors écrire :

$$m - \lambda s = r \tag{19}$$

On se ramène par conséquent dans un univers neutre au risque en dégonflant la dérive de θ du produit λs, vu comme prime de risque de θ. L'équation différentielle de C_1 devient dans ce cas :

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + \theta r \frac{\partial C_1}{\partial \theta} + \frac{1}{2} s^2 \sigma_1^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial \theta^2} = r C_1 \tag{20}$$

soit l'équation différentielle de Black et Scholes. Si l'action verse un dividende continu d, on aura alors :

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + \theta\left(r - d\right) \frac{\partial C_1}{\partial \theta} + \frac{1}{2} s^2 \sigma_1^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial \theta^2} = r C_1 \tag{21}$$

ANNEXE 1.3

Introduction à la programmation Visual Basic (Excel)

La programmation Visual Basic (Excel) comprend deux types de procédures : les sous-routines et les fonctions.

Comme l'indique Riva[71], les procédures de type Sub (sous-routine) accomplissent une tâche déterminée sans retourner nécessairement de résultat. La structure d'une telle procédure est la suivante :

Sub *nom de la procédure*[72]
Instructions
End Sub

Pour leur part, à l'instar de toute fonction d'Excel, les procédures de type Function (fonction) retournent un résultat (nombre, vecteur ou matrice). La structure d'une telle procédure est la suivante :

Function *nom de la fonction (input1, input2…)*
Instructions
End Function

Dans la section 1, nous montrons comment écrire une fonction en langage Visual Basic (Excel), soit la formule de Black et Scholes pour un call européen. Dans la section 2, nous précisons les principales commandes du langage Visual Basic.

---

71. Riva, F. (2002), *Applications financières sous Excel en Visual Basic*, Paris, Economica. S'agissant des applications financières en Visual Basic, on consultera également : Benninga, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge, The MIT Press ; Jackson, M. et M. Stauton (2001), *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*, Chichester, John Wiley and Sons ; Wilmott, P. (2000), *On Quantitative Finance*, volumes 1 et 2, New York, John Wiley & Sons ; Wilmott, P. (2001), *op. cit.* ; Rostan, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2002), *Le calcul numérique en finance empirique et quantitative : ingénierie financière et Visual Basic (Excel)*, 1re édition, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec. Par ailleurs, le manuel de Clewlow et Strickland fournit un pseudo-code qui peut être traduit en Visual Basic comme nous l'avons fait dans notre *Calcul numérique* (Clewlow, L. et C. Strickland, 1998, *op. cit.*).

72. L'italique indique des informations qui doivent être fournies par le programmeur.

1. Introduction aux fonctions Visual Basic

On veut traduire en langage Visual Basic l'équation de Black et Scholes pour un call européen c, soit :

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r_f \times T}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{X}\right) + (r_f \times T)}{\sigma\sqrt{T}} + 0,5\sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

avec :

S = prix actuel de l'action,
X = prix d'exercice du call,
r_f = taux sans risque (annuel),
T = échéance de l'option (en années),
σ = écart-type du rendement de l'action (annuel),
N(.) = probabilité cumulative sous la normale.

Une fois le programme Excel chargé, on accède au programme Visual Basic en enfonçant les touches :

ALT + F11

Puis on clique dans le menu principal de Visual Basic sur :

Insert puis New module

On est alors prêts à écrire la fonction sur la fenêtre qui y apparaît. On écrira deux fonctions pour mieux diviser le travail : une fonction pour d_1 ; une fonction pour c.

Fonction pour d_1

– On écrit :

```
Function dOne (S,X,T,rf,sigma)
```

– Apparaît aussitôt sur l'autre ligne

```
End Function
```

– Function et End Function font partie du langage Visual Basic.

  - dOne est le nom que l'on donne à la fonction.
  - entre (.) dans la déclaration de la fonction, on spécifie les arguments de la fonction auxquels on devra donner une valeur lors de l'exécution du programme : S, T, X, rf, sigma. Ce sont les inputs de la formule de Black et Scholes.

- Puis on écrit l'expression de dOne :

```
dOne = (log(S/X)+rf*T)/(sigma*Sqr(T))
          + 0,5*sigma*Sqr(T)
```

- On voit que l'écriture de la formule est directe. Il suffit simplement de savoir que le correspondant de logarithme dans le langage VBA est log, que celui de la racine carrée est Sqr et que * est le signe de la multiplication.

- Notre programme prend alors l'allure suivante :

```
Function dOne (S,X,T,rf,sigma)
dOne = (log(S/X)+rf*T)/(sigma*Sqr(T))
          + 0,5*sigma*Sqr(T)
End Function
```

- Le résultat de la fonction, en l'occurrence dOne, doit porter le même nom que la fonction.

- On peut maintenant se servir de cette fonction dans un chiffrier Excel comme de toute autre fonction en cliquant dans le menu principal d'Excel : Insert puis Function, etc.

- *Remarques*
  - On peut insérer des commentaires dans le programme en les faisant précéder de l'apostrophe (') . Ces commentaires ne sont alors pas lus par VBA.
  - Pour poursuivre une ligne s'il y a manque d'espace, on fait un espace au bout de la ligne, on fait suivre cet espace de _ et l'on continue sur la ligne qui suit.

Fonction pour c

- Il reste à écrire la fonction du call proprement dite

```
Function Call (S,X,T,rf,sigma)
Call = S*Application.NormSdist(dOne(arguments)) _
- X*exp(-T*rf).Application.NormSdist(dOne(arguments)-
sigma*Sqr(T))
```

- *Précisions*
  - On remarque d'abord que l'écriture de la fonction en VBA est très rapprochée de celle de la fonction originale.
  - On fait ici appel à une fonction Excel NormSdist qui calcule N(.), soit la probabilité cumulative sous la normale.
  - Quand on appelle une fonction Excel dans Visual Basic, on écrit : Application.*nom de la fonction*.
  - c'est-à-dire, dans notre cas : Application.NormSdist(dOne(arguments)) calcule N(d1), d_1 étant déjà programmé par la fonction dOne.

2. COMMANDES FRÉQUEMMENT UTILISÉES DANS VISUAL BASIC

La programmation VBA ressemble beaucoup à tout autre langage de programmation. La clé du succès d'un programme repose dans une conceptualisation claire et exacte de son algorithme.

La lecture des variables

Un programme Visual Basic fait appel à une série de variables qui sont soit des inputs au programme, soit créées dans le programme. On les déclare par la commande dim :

dim *variable1*, *variable2*

On peut donner la dimension de la variable lors de sa déclaration. Si variable1 est un entier, la commande est integer ; si par ailleurs variable2 est un nombre réel quelconque, la commande

est double. La commande variant peut accommoder tous les types de dimensions, mais elle consomme davantage de mémoire.

Dim *variable1* as Integer

Dim *variable2* as double

ou encore : Dim *variable1* as Integer, *variable2* as double

Pour déclarer un vecteur, par exemple pour stocker les flux monétaires d'une action à une période donnée selon les divers états de la nature, on utilise la commande Dim pour le déclarer et ReDim pour donner sa dimension. Supposons que l'on veuille déclarer le vecteur que nous nommons Smat et que ce vecteur soit de dimension N. Les commandes VBA seraient alors les suivantes :

```
Dim Smat() as Variant
ReDim Smat(N)
```

L'écriture des résultats dans le chiffrier

La structure de la procédure Sub est exactement la même que celle de la procédure Function. La première comporte cependant un avantage sur la seconde : elle permet d'écrire dans le chiffrier les résultats intermédiaires, alors que la seconde ne donne que le résultat final. Les résultats intermédiaires permettent entre autres de détecter les erreurs de programmation.

Supposons qu'on ait calculé le pas dt dans un arbre binomial :

```
dt = T/N
```

où T est l'échéance de l'option et N le nombre d'intervalles. On veut inscrire ce résultat dans le chiffrier. On choisit d'abord l'une des feuilles du chiffrier, disons la feuille 1 :

```
Sheet1.Activate
```

La commande Range nous permet d'écrire le résultat du calcul précédent dans la feuille 1. Si l'on veut que le résultat apparaisse à la cellule B21, on écrit alors dans le programme

```
Range("B21") = dt
```

Et le résultat du calcul apparaît dans la cellule B21 de la feuille 1. On peut aussi rapporter l'ensemble des résultats des itérations pour une variable donnée en se servant de la fonction Offset, combinée à la commande Range. On écrit alors :

```
Range("numéro de la cellule").Offset(i,j)
```

Offset(0,0) désigne la position de la cellule inscrite dans la commande Range. Elle sert donc de point de repère. Si i (indice associé aux lignes du chiffrier) augmente, on se déplace vers le bas (ligne) et si j (indice associé aux colonnes du chiffrier) augmente, on se déplace vers la droite (colonne). L'utilisation de la commande Offset demande cependant une certaine expertise.

Les opérations arithmétiques

Les opérations arithmétiques s'effectuent dans Visual Basic comme dans tout autre langage de programmation. Il faut simplement connaître les opérateurs de Visual basic.

`*` : multiplication

`/` : division

`^` : exposant

`Exp (x)` = e^x

`log (x)` = logarithme de x

`Sqr(x)` = racine carrée de x

Les boucles itératives

Le calcul numérique fait souvent appel à des boucles qui effectuent des itérations. Nous en décrivons deux.

a) La procédure :

For i = 1 to N
Instructions
Next i

Cette procédure va effectuer N fois la boucle débutant par For et se terminant par Next. Le compteur i va débuter à 1 et augmenter de 1 à chaque itération[73], cela jusqu'à N. Par exemple, supposons que l'on veuille calculer les flux monétaires d'un call à son échéance. Les états de la nature vont de 0 à N et les données correspondantes du prix de l'action sont stockées dans le vecteur Smat(). Pour calculer ces flux, on écrirait alors :

```
For j = 0 to N
Cash(j) = Application.MAX(0, Smat(j)-X)
Next j
```

On fait donc appel à la fonction MAX d'Excel pour calculer les flux monétaires du call (Cash) à son échéance, X étant le prix d'exercice du call.

b) La procédure :

Do
Intructions
Loop While *condition*

Cette procédure itérera tant que la condition est satisfaite. Par exemple, supposons que l'on veuille déterminer l'extremum de la fonction suivante à partir de la procédure Newton-Raphson.

$$f(x) = -\ln(x) + 0,1x^2$$

La procédure itérative de Newton-Raphson est la suivante :

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

Pour trouver l'extremum de la fonction, on itérera tant que f'(x) s'éloigne d'un nombre très rapproché de 0. Pour mettre en œuvre la procédure Newton-Raphson, on recourra à la boucle Do…Loop While avec comme condition que f'(x) doit être égal ou supérieur à un nombre très rapproché de 0 : le programme itérera tant que cette condition est satisfaite. Le programme pour calculer l'extremum de la fonction prendra alors la forme suivante :

73. La commande Step 1 est la commande par défaut. Si on veut faire reculer le compteur, on indiquerait, par exemple : For i = N to 0 step –1.

```
Sub NewtonRaphson()

' On déclare les variables

Dim x As Variant
Dim fx1, fprimex1, f2primex1

'On donne une valeur de départ à x
x=3

'On enclenche la procédure Do

Do


'On écrit la fonction dont on cherche l'extremum qui n'entre pas
directement dans le 'calcul

fx1 = -Log(x) + (0.1 * x ^ 2)

' On écrit la dérivée première de la fonction
fprimex1 = -1 / x + 0.2 * x

' On écrit la dérivée seconde de la fonction

f2primex1 = (1 / x ^ 2) + 0.2

' On écrit l'équation de Newton-Raphson
x = x - (fprimex1 / f2primex1)

'On itère jusqu'à ce que la dérivée première de x soit très
rapprochée de 0

Loop While fprimex1 >= 0.0001


Range("B1")=x
Range("B2")=fx1
End Sub
```

Les traitements conditionnels

Pour prendre une décision si une condition se réalise et une autre si cette condition n'est pas réalisée, on recourt à la procédure Visual Basic suivante :

IF *condition* Then
Instructions
Else
Instructions
End IF

La décision repose sur une condition que l'on spécifie (par exemple, une inégalité comme dans le cas de la boucle Do). Si cette condition est réalisée, le programme effectue les instructions qui suivent immédiatement la ligne IF. Sinon, le programme exécute les instructions sous Else.

Mais la règle de décision peut être plus complexe et comporter plusieurs étapes. On se sert alors de la structure Visual Basic suivante pour la mettre en place :

IF *condition* Then
Instructions
ElseIf *condition* Then
Instructions
ElseIf *condition* Then
Instructions
.
.
Else
Instructions
End IF

BIBLIOGRAPHIE

ALEXANDER, C. (2001), *Market Models : a Guide to Financial Data Analysis*, Chichester, Wiley.

ANDERSEN, L. et M. BROADIE (2001), « A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options », working paper, Columbia University.

BJÖRK, T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Finance*, Oxford, Oxford University Press.

BLACK, F. (1975), « Fact and Fantasy in the Use of Options », *Financial Analysts Journal*, p. 36-41 et p. 61-72.

BLACK, F., E. DERMAN et W. TOY (1990), « A One-Factor Model of Interest Rates and its Applications to Treasury Bond Options », *Financial Analysts Journal*, p. 33-39.

BOLLERSLEV, T. et J.H. WRIGHT (2001), « High Frequency Data, Frequency Domain and Volatility Forecasting », *The Review of Economics and Statistics*, p. 596-602.

BOYLE, P.P. (1977), « Options : A Monte Carlo Approach », *Journal of Financial Economics*, p. 323-338.

BOYLE, P., M. BROADIE et P. GLASSERMAN (1997), « Monte Carlo Methods for Security Pricing », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1267-1321.

BROADIE, M. et P. GLASSERMAN (1997), « Pricing American Style Securities Using Simulation », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1323-1352.

CLEWLOW, L. et A. CAVERHILL (1994), « On the Simulation of Contingent Claims », *Journal of Derivatives*, p. 66-74.

CLEWLOW, L. et C. STRICKLAND (1997), « Monte Carlo Valuation of Interest Rate Derivatives under Stochastic Volatility », *Journal of Fixed Income*, p. 35-45.

CLEWLOW, L. et C. STRICKLAND (1998), *Implementing Derivatives Models*, Chichester, John Wiley and Sons.

COX, J., S. ROSS et M. RUBINSTEIN (1979), « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, 229-264.

GEMMILL, G. (1993), *Options Pricing : An International Perspective*, New York, McGraw Hill.

HULL, J.C. (2003), *Options, Futures and Other Derivatives*, New Jersey, Prentice Hall.

JÄCKEL, P. (2002), *Monte Carlo Methods in Finance*, Chichester, Wiley.

JAMES, J. et N. WEBBER (2000), *Interest Rate Modelling*, New York, John Wiley & Sons.

JAMSHIDIAN, F. (1989), « An Exact Bond Pricing Formula », *Journal of Finance*, p. 205-209.

LONGSTAFF, F.A. et E.S. SCHWARTZ (2001), « Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach », *Review of Financial Studies*, p. 113-147.

MARTENS, M. (2002), « Measuring annd Forecasting S&P Index-Futures Volatility Using High-Frequency Data », *The Journal of Futures Markets*, p. 497-518.

MERTON, C. (1973), « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, p. 141-183.

MERTON, R.C. (1992), *Continuous-Time Finance*, Cambridge, Blackwell.

NEFTCI, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2e édition, San Diego, Academic Press.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, 3e édition, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

TAVELLA, D. (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*, New York, Wiley.

TRIGEORGIS, L. (1996), *Real Options*, Cambridge, The MIT Press.

TILLEY, J.A. (1993), « Valuing American Options in a Path Simulation Model », *Transactions of the Society of Actuaries*, p. 83-104.

TUCKMAN, B. (2002), *Fixed Income Securities*, New York, John Wiley & Sons.

WILMOTT, P. (2001), *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, Chichester, John Wiley and Sons.

CHAPITRE

2

UNE INTRODUCTION AUX MÉTHODES NUMÉRIQUES EN ÉCONOMÉTRIE FINANCIÈRE

ANALYSE DE QUELQUES CAS : LA SIMULATION MONTE CARLO, LE *BOOTSTRAP* ET LE KERNEL

Dans ce chapitre, nous envisageons certaines techniques de simulation qui sont utilisées en économétrie financière pour générer des distributions, telles la simulation Monte Carlo et la technique dite du *bootstrapping*, encore appelée de façon plus succincte : *bootstrap*. Ce chapitre s'attarde également sur une brève introduction au calcul stochastique dans ses rapports avec l'économétrie financière. Il présente finalement un cas de régression non paramétrique : le kernel.

1. SIMULATION MONTE CARLO : LE CAS D'UNE OPTION ASIATIQUE

Une simulation Monte Carlo vise habituellement à générer la distribution d'une variable économique ou financière, du moins dans ses rapports avec la science économique et la théorie financière. En économétrie, l'input d'une simulation Monte Carlo est généralement une distribution tandis qu'en finance, l'input est généralement une équation différentielle stochastique discrétisée. Le but est alors, à titre d'exemple, de calculer le prix théorique d'un instrument financier, telle une option, ou d'évaluer le risque théorique d'un portefeuille, par exemple lors d'une simulation Monte Carlo qui met en cause la VaR[1].

1. VaR est l'acronyme anglais de *Value at Risk*.

Pour mieux comprendre la technique de la simulation Monte Carlo, nous recourons à un cas, celui de la détermination du prix d'une option de vente (put) asiatique. Le prix d'exercice d'une telle option est la moyenne des prix de l'action sous-jacente du début de la durée de l'option jusqu'à son échéance. L'expression générale du prix d'une option en termes de ses cash-flows, comme d'ailleurs du prix de tout instrument financier, est la suivante :

$$\text{Prix} = e^{-r(T-t)}E^*\left[\text{cash-flows}(S)\right] \tag{1}$$

où r désigne le taux sans risque ; $(T - t)$, le temps qu'il reste jusqu'à l'échéance de l'option ; E*, l'espérance neutre au risque et « cash-flows », les cash-flows finaux de l'option selon les divers états de la nature donnés ici par les prix probables de l'action sous-jacente.

Avant de progresser davantage dans cette présentation de la simulation Monte Carlo appliquée au calcul du prix d'une option asiatique, effectuons une courte digression[2] sur l'équation différentielle stochastique du prix d'une action, dont nous nous servons ici pour construire notre simulation. Dans sa forme générale, cette équation, appelée *mouvement brownien géométrique*, est la suivante :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2}$$

où S désigne le prix de l'action et r, son rendement tendanciel ; dt désigne la période de temps ; σ est l'écart-type du rendement de l'action ; dW est un processus de Wiener d'espérance nulle et de variance dt. Pour en déduire l'équation du prix de l'action, soit S, divisons d'abord cette dernière équation par S et intégrons-la de 0 à t :

$$\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} = \int_0^t r du + \int_0^t \sigma dW_u \tag{3}$$

2. Pour plus de détails, voir : Neftci, S.N. (1996), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, New York, Academic Press ; Wilmott, P. (1998), *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*, New York, Wiley ; Briys, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives*, New York, Wiley ; Wilmott, P. (2000), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, vols. 1 et 2, New York, Wiley.

La première intégrale est une intégrale de Riemann standard égale à : rt et la seconde intégrale contient un terme aléatoire dW mais son coefficient est constant dans le temps. Cette intégrale peut donc se calculer de la façon habituelle : $\sigma(W_t - W_0) = \sigma W_t$ puisque $W_0 = 0$. Par conséquent,

$$\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} = rt + \sigma W_t \tag{4}$$

Toute solution de cette intégrale stochastique en termes de S_t doit évidemment satisfaire cette intégrale. En particulier, l'une des solutions est la suivante :

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)} \tag{5}$$

Cette solution est fonction des paramètres σ, r et W_t. On peut vérifier l'exactitude de cette solution en différenciant cette dernière équation par le biais du lemme d'Ito. Ouvrons ici une parenthèse pour introduire ce lemme très important en calcul stochastique. Supposons que la variable aléatoire x suive le processus d'Ito suivant :

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW \tag{6}$$

où W désigne un processus de Wiener et a et b sont des fonctions de x et de t. La tendance (*drift*) de x est de a et sa variance est de b^2. Soit une autre fonction de x et t désignée par G. En vertu du lemme d'Ito, la fonction G suit le processus suivant :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdW \tag{7}$$

où dW désigne le même processus de Wiener que celui auquel obéit x. G suit également un processus d'Ito. Son terme tendanciel est le contenu de la parenthèse de dt et sa variance est $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$. Par exemple, supposons que S suive le processus suivant : $dS = adt + bdW = uSdt$

$+ \sigma SdW$. Supposons également que $G = \ln S$. En appliquant le lemme d'Ito, on a :

$$dG = \left(u - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW \tag{8}$$

puisque $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ et $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$. On peut montrer que le lemme d'Ito est au calcul stochastique ce qu'est l'expansion de Taylor au calcul différentiel classique.

On obtient, en appliquant le lemme d'Ito à S qui, on le rappelle, est égal à : $S_t = S_0 e^{\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right)}$:

$$dS_t = \left[S_0 e^{\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right)}\right]\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 dt\right] \tag{9}$$

On retrouve alors l'équation différentielle initiale : $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$. Cette digression avait pour but de justifier la forme de l'équation du prix de l'action qui sert de base à la simulation Monte Carlo : $S_t = S_0 e^{\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right)}$. Comme S_t suit une loi lognormale, $\ln S_t$ suit une loi normale. Ce dernier est obtenu en prenant directement le logarithme de la dernière équation, écrite sous forme différentielle :

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t \tag{10}$$

Cette équation participe de la nature des mouvements browniens généralisés[3]. Cependant, avant d'enclencher la simulation Monte Carlo, nous devons discrétiser[4] cette équation. On peut, pour ce faire,

3. Un mouvement brownien généralisé a la forme : $dX = udt + \sigma dW$ alors qu'un mouvement brownien géométrique a la forme : $dX = uXdt + \sigma XdW$.
4. Discrétiser signifie convertir en temps discret une équation en temps continu.

utiliser la méthode d'Euler pour obtenir une discrétisation du premier degré[5]. Pour y parvenir, discrétisons dans un premier temps l'équation différentielle qui sert de base à l'équation du prix, soit :

$$\Delta S_t = rS_t\Delta t + \sigma S_t\sqrt{\Delta t}\phi \tag{11}$$

où Δ représente une variation finie et $\phi \sim N(0,1)$. On discrétise également sa solution, soit :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\phi\right)} \tag{12}$$

Les développements antérieurs avaient pour but de donner quelques fondements théoriques au cas de simulation Monte Carlo qui nous intéresse, soit la détermination du prix d'une option de vente asiatique. Nous effectuons cette simulation en recourant au logiciel Excel. La méthode de Monte Carlo consiste à générer des séries (ou scénarios) de prix d'actions en utilisant la formule du prix d'une action qui vient d'être dérivée. Pour déterminer la valeur du put asiatique, on calcule ensuite la moyenne des prix de l'action que l'on retranche au prix d'exercice. Une série est générée sur une période de durée 1 par tranche (ou pas) de 0,01 période (Δt). Chaque série ou scénario comporte donc 100 périodes. Au bout de chacune de celles-ci, on calcule la moyenne de ces prix, que l'on retranche au prix d'exercice. Pour les résultats, on consultera les colonnes moyenne et profit du chiffrier Excel qui apparaît au tableau 1.

Attardons-nous maintenant à la technique du calcul d'une série. Pour calculer le prix d'un put asiatique, nous avons besoin des données suivantes. Le prix de départ de l'action sous-jacente au put asiatique est ici fixé à 80 et le prix d'exercice du put est de 85. Le terme tendanciel[6], soit r ou taux sans risque, puisque l'on effectue une évaluation neutre au risque, est fixé à 5 %. La volatilité du rendement de l'action sous-jacente au put asiatique s'établit à 0,20 (20 %). Δt est

5. À remarquer qu'il existe des méthodes d'approximation plus exactes comme celle de Milstein, qui est du second degré. Pour des éclaircissements sur ce sujet, voir : Jegadeesh, N. et B. Tuckman (2000), *Advanced Fixed-Income Valuation Tools*, New York, Wiley.

6. *Drift*, en anglais.

TABLEAU 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	CZ	DA	DB	DC	DD	DE	DF	DG
4																	
5					temps	t=	t=	t=	t=	t=	t=						
6	P. l 'action	80		Simulation	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.99	1		Moyenne	Cash-flow		Espérance :	5.5161
7	Drift (u=r)	0.05		SIM													
8	Volatilité	0.2		1	80	79.77343005	81.45271383	81.26715703	81.49202926	93.05536858	92.47340801		86.71676084	0			
9	incrément	0.01	delta t	2	80	81.17869686	81.70840606	83.59791542	88.14758613	82.69619734	81.14561563		89.90250558	0			
10	Interet r	0.05		3	80	81.49462261	83.84700855	84.13617106	85.96348889	65.94616625	65.62854226		80.73096305	4.269036955			
11				4	80	76.93143659	77.73940552	77.96278173	78.60972063	85.6920714	88.0092024		82.53858304	2.46141696			
12	PV : PUT	5.25 $		5	80	78.71836381	78.28142989	79.70710977	79.71082901	68.19900984	67.65772316		70.65165892	14.34834108			
13				6	80	81.98828371	83.10362599	82.74504225	84.3593718	69.15758199	70.29248096		78.47971428	6.52028572			
14	P. exercice	85		7	80	79.31821083	78.79571095	79.40636966	79.96562405	67.43777292	66.56852692		73.98088899	11.01911101			
15				8	80	79.41998192	78.08397365	77.95483703	77.14979368	61.74378409	62.11015948		69.32222775	15.67777225			
16				9	80	80.63157409	82.47055547	82.50442063	81.96784984	88.49678649	86.33998266		90.11704112	0			
17				10	80	78.5664022	77.86370269	76.48639527	77.39922163	87.08059381	87.81316341		86.03302357	0			
18				11	80	77.85890476	76.57135196	78.09411578	78.8677616	59.30371366	58.19139964		76.8440543	8.155945702			
19				12	80	77.77113998	76.5811128	78.62934109	78.48018536	67.7921242	68.95633636		74.49839278	10.50160722			
20				13	80	80.22703518	81.51586997	81.93703482	80.80080906	75.62226221	77.49036425		81.99721807	3.002781926			
21				14	80	82.03349551	82.77253575	81.44135644	81.90513686	61.98592629	63.04109502		69.49187257	15.50812743			
22				15	80	77.39203574	76.32366001	77.86829553	77.77915689	78.65421079	77.56678497		77.85683571	7.143164292			
23				16	80	80.65262736	80.11113785	78.64675643	79.56410789	96.8869198	98.44001319		75.45644484	9.543555158			
24				17	80	80.57736551	80.39885907	81.64797847	82.92818136	54.92511525	52.94796186		70.72247419	14.27752581			
25				18	80	79.63134279	80.65163736	82.6716906	82.03432819	76.01098898	73.94795774		73.85665623	11.14334377			
26				19	80	82.24924962	80.70922474	79.05721177	79.69273592	77.44381379	75.99015754		75.21611891	9.783881095			
27				20	80	79.1467873	81.36566172	79.69362355	79.0183495	69.80233286	69.3352718		72.37975518	12.62024482			
28				21	80	79.53017245	77.88681358	77.14617114	77.25370423	76.23308697	75.04194534		74.13753398	10.86246602			
29				22	80	83.06555419	87.12493785	83.54166317	82.81390986	106.7439228	108.0592324		99.89525059	0			
30				23	80	77.59470737	76.88147789	76.30033311	76.91401708	67.64824271	68.49482212		67.54628713	17.45371287			
31				24	80	78.053939	77.699175	78.96473866	77.33340467	78.67398392	81.96444001		69.60651305	15.39348695			
32				25	80	77.15362769	75.1634853	77.82910254	77.21009975	102.5678215	101.3171384		87.11781712	0			
33				26	80	79.63239295	78.50979776	80.76297139	81.86153509	98.88278582	95.84498823		86.55484023	0			
34				27	80	76.21764505	71.7166234	70.16349546	72.01110203	48.53599333	48.45467151		62.95528082	22.04471918			
35				28	80	77.61891027	76.15004367	73.86499863	76.53324728	86.3504937	89.11734077		78.92955527	6.070444729			
36				29	80	79.29307059	78.34554013	77.40259158	76.00044843	102.049209	99.95381693		89.49128557	0			
37				30	80	78.8395223	81.11604198	80.10142455	79.94354678	110.5063275	113.2696336		87.01469475	0			

de 0,01. Établissons, pour la première simulation[7], qui apparaît au tableau 1 à la ligne SIM1 (t = 0,01), la formule qui nous sert à calculer l'évolution du prix de l'action par incrément d'une période à partir de son prix initial de 80. La formule mathématique utilisée a été donnée précédemment, soit : $S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\phi\right)}$. En langage d'Excel, elle s'écrit :

```
= E8*EXP(($B$10 - 0.5*($B$8^2))*$B$9
+$B$8*($B$9^(0.5))*(LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())))
```

où le contenu des cellules est le suivant : E8 est le prix initial de l'action, soit 80 ; B10, le taux d'intérêt sans risque (*drift*) ; B8, l'écart-type du rendement de l'action (σ) ; B9, l'incrément périodique (Δt) ; ALEA, le générateur de variables aléatoires d'Excel. La fonction LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE( ) transpose ALEA à une valeur obéissant à une loi normale N(0,1). Pour ce qui concerne la première simulation, on copie la cellule dans les colonnes de 0,01 jusqu'à 1. Rendu à 1, on ouvre une autre cellule (DC8 dans le cas de notre chiffrier) dans laquelle on calcule la moyenne des prix obtenus dans l'intervalle [0, 1]. La formule de DC8 est la suivante :

```
=MOYENNE(E8:DA8)
```

On peut alors calculer le cash-flow final du put associé à la première simulation dans la cellule DD8, toujours dans notre chiffrier Excel, dont la formule est la suivante :

```
=MAX($B$14-DC8,0)
```

où la cellule B14 contient le prix d'exercice. On reproduit cette simulation 5000 fois dans notre exemple.

Finalement, on calcule l'espérance risque-neutre (E*), qui, on le rappelle, est égale à : $E^*\left[\text{cash-flows}(S)\right]$. Elle s'exprime, dans le langage d'Excel :

```
=SOMME(DD8:DD5007)/NB(DD8:DD5007)
```

7. 5 000 simulations similaires seront effectuées. Nous donnons ici un cas type de simulation.

où la colonne s'étirant de DD8 jusqu'à DD5007 renferme les cash-flows du put. Le résultat de cette opération apparaît dans la cellule DG6 en ce qui concerne notre chiffrier. Pour obtenir le prix du put asiatique, il reste à actualiser l'espérance E*, c'est-à-dire :

```
=$DG$6*EXP(-$B$10*$DA$6)
```

où DA6 est la cellule qui renferme la période 1, soit le temps terminal de chaque simulation. Ce résultat est reporté dans la cellule B12 qui nous fournit le prix du put asiatique, soit 5,24 $.

Dans l'exemple précédent, nous avons effectué 5000 simulations. Dans certains cas, ce nombre peut s'avérer insuffisant. Par exemple, dans le cas de la discrétisation d'Euler du modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985)[8] servant à la modélisation de la structure à terme des taux d'intérêt, il peut être requis d'effectuer jusqu'à 10 millions de simulations. En effet, l'approximation cause deux types d'erreurs : l'erreur systématique et l'erreur statistique. Plus précisément : $\hat{e} = e_{SYS} + \hat{e}_{STAT}$, où $\hat{e}$ désigne l'erreur totale, e_{SYS}, l'erreur systématique et $\hat{e}_{STAT}$, l'erreur statistique. Dans le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, l'erreur statistique ne se résorbe qu'au bout de 10 millions de simulations. Cela donne à penser que l'approximation d'Euler fait problème et qu'il faudrait peut-être recourir à des approximations de degrés plus élevés que 1, telle l'approximation de Milstein qui est une discrétisation du second degré[9].

Mentionnons finalement que certains générateurs de variables aléatoires, telle la fonction ALEA d'Excel, finissent par reproduire les mêmes variables à partir d'un certain nombre de simulations. À titre d'exemple, si l'on veut générer 1 million de variables aléatoires à partir de la version d'Excel 1995, il pourrait y avoir jusqu'à 30 copies du même ensemble de nombres aléatoires. Si l'on veut générer jusqu'à 10 millions de nombres aléatoires, le logiciel Mathematica serait requis dans ce cas. Il peut en effet générer 10^{445} nombres aléatoires avant de se répéter[10]. Incidemment, pour le cas de l'évaluation

8. Cox, J.C, J.E. Ingersoll et S.A. Ross (1985), « A Theory of Term Structure of Interest Rates », *Econometrica*, vol. 53.

9. Pour plus de détails, voir : Jegadeesh, N. et B. Tuckman (2000), *Advanced Fixed-Income Valuation Tools*, New York, Wiley, chap. 13.

10. Voir à cet effet : Bhansali, V. (1998), *Pricing and Managing Exotic and Hybrid Options*, New York, McGraw-Hill, chap. 5.

du prix d'un titre, l'erreur de mesure décroît en proportion inverse de la racine carrée du nombre (N) de simulations. Prenons par exemple le cas de la simulation du prix d'un produit dérivé désigné par f par la méthode de Monte Carlo. On peut alors construire l'intervalle de confiance de f qui nous donnera le nombre de simulations requises pour en arriver à une précision suffisamment élevée. Cet intervalle, au seuil de 95 %, est le suivant :

$$\mu - \frac{1,96\sigma}{\sqrt{N}} < f < \mu + \frac{1,96\sigma}{\sqrt{N}} \tag{13}$$

où μ est la valeur estimée de f lors de la simulation et σ, l'écart-type[11].

2. LA MÉTHODE DU *BOOTSTRAP*

La méthode du *bootstrap* est due à Efron (1979)[12]. Cette méthode est très apparentée à la simulation Monte Carlo, mais elle présente l'avantage de ne pas requérir de distribution a priori dans le mécanisme de génération des variables aléatoires. Nous savons incidemment que la médiane est un estimateur robuste de la tendance centrale alors que la moyenne ne l'est pas dans le cas d'une distribution non normale. Supposons que l'on ait un échantillon de départ X et que l'on ne connaisse pas la distribution théorique. La méthode du *bootstrap* peut être utilisée pour générer certaines informations reliées à cette distribution. Par exemple[13], la méthode du *bootstrap* peut servir à calculer l'écart-type de la médiane de cet échantillon. Pour ce faire, on recourt à la formule suivante :

$$\sigma_{BOOT} = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left[\hat{M}_i - \hat{M}_{(.)}\right]^2} \tag{14}$$

11. Pour des informations additionnelles, voir : Hull, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, 4e édition, Upper Saddle River (N.J.), Prentice Hall, chap. 16.

12. Efron, B. (1979), « Bootstrap Methods : Another Look at the Jacknife », *Annals of Statistics*, no 7, p. 1-26.

13. Nous nous inspirons ici de : Johnston, J. et J. Dinardo (1997), *Econometric Methods*, 4e édition, New York, McGraw-Hill, chap. 11.

où σ_{BOOT} désigne l'écart-type de la médiane ; B est le nombre de simulations ; $\hat{M}_i$, la médiane du nouvel échantillon ; $\hat{M}_{(.)} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} \hat{M}_i$, soit la moyenne des $\hat{M}_i$ découlant des simulations. Attardons-nous à expliquer la procédure du bootsrap pour le calcul de l'écart-type de la médiane.

i) La première étape consiste à générer un échantillon aléatoire X_i de taille n avec remise à partir de l'échantillon initial, également de taille n. Toute observation de cet échantillon de nombres aléatoires comporte la même probabilité d'occurrence, soit 1/n.

ii) La seconde étape revient à calculer la médiane pour l'échantillon qui vient d'être généré.

iii) Et l'on répète ces deux étapes B fois. On peut alors calculer l'écart-type de la médiane à partir de la formule pertinente.

On peut généraliser cette procédure à toute statistique $\theta(\mathbf{y})$ calculée à partir d'un échantillon y_t (t = 1,…n) dont on ne connaît pas la distribution dans un petit échantillon[14]. L'opération *bootstrap* vise ici à approximer la distribution de cette statistique à partir de l'échantillon des y observés. Pour ce faire, on doit tirer un nombre B d'échantillons de taille n. Cet échantillonnage est effectué avec remise. Certains de ces échantillons pourront contenir les mêmes observations plus d'une fois et les observations qui y apparaîtront seront dans un ordre complètement différent de l'échantillon initial. On calcule $\theta(\mathbf{y}^*(i))$ pour chacun de ces échantillons, où i = 1, …, B. En bout de piste, on obtient ainsi B statistiques $\theta(\mathbf{y}^*(i))$. On peut alors calculer toute statistique reliée à la distribution de $\theta(\mathbf{y})$, comme l'écart-type ou autres moments.

14. Nous nous inspirons ici de : Davidson, R. et J.G. McKinnon (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, New York, Oxford University Press, chap. 21.

On peut également illustrer la méthode du *bootstrap* dans le cas d'un modèle de régression linéaire[15]. Le but est ici de calculer l'espérance de $\hat{\beta}$. Soit le modèle de régression linéaire suivant :

$$y_t = \mathbf{x}_t\beta + e_t \qquad t = 1, ..., n \tag{15}$$

Nous disposons d'un échantillon de départ pour les y et les x. On peut calculer le premier $\hat{\beta}$, désigné par $\hat{\beta}$ (1) à partir de ces observations. On effectue des *bootstraps* sur les y et x et à chaque fois on recalcule $\hat{\beta}(i)$, i = 1, …, B. On peut alors calculer à partir de ces derniers

l'espérance de $\hat{\beta}$, c'est-à-dire : $E(\hat{\beta}) \cong \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\beta}(i)$.

Wilmott (1998)[16] donne un exemple de *bootstrap* appliqué à une série de rendements d'actions. Il dispose de 1000 rendements journaliers sur chaque action. Il reporte ces rendements dans un chiffrier. Les cellules sont numérotées de 1 à 1000, une pour chaque journée de l'échantillon, et à chacune de ces journées sont associés les rendements des actions retenues pour cette journée. Il effectue des tirages avec remise 1000 fois en utilisant une distribution uniforme. Cela constitue un premier scénario pour les rendements de son échantillon d'actions sur l'horizon d'investissement envisagé. Et il refait ce processus autant de fois qu'il le faut pour générer une distribution précise des rendements futurs de son portefeuille d'actions. Il peut alors calculer par exemple la VaR de son portefeuille, qui correspond à la perte maximale que peut subir celui-ci à un seuil de confiance généralement fixé à 95 % ou à 99 %.

3. Régression non paramétrique : une simulation Monte Carlo

Dans cette section, nous voulons montrer comment les méthodes non paramétriques peuvent s'appliquer au domaine de la régression. À cette fin, nous allons envisager un cas basé sur des observations générées par la simulation Monte Carlo et mettant en cause la régression recourant aux kernels.

---

15. On peut également utiliser la méthode du *bootstrap* dans le cadre du modèle de régression non linéaire, mais celle-ci est alors très intensive en calculs.

16. Wilmott, P. (1998), *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*, New York, Wiley, chap. 42.

Soit le modèle de régression suivant :

$$y_t = m(\mathbf{x_t}) + e_t \tag{16}$$

où m(.) est une fonction arbitraire non linéaire et e_t un terme d'erreur. Il s'agit ici d'estimer m par la méthode de régression non paramétrique, le kernel. Dans les régressions du type kernel, la fonction de poids $w_{t,T}(x)$ construite à partir de fonctions de densité de probabilité (pdf) $k(x)$, justement appelée kernel, possède les propriétés suivantes :

i) $k(x) \geq 0$;

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} k(u)du = 1.$

Et même si le kernel ne joue aucun rôle sur le plan probabiliste dans l'analyse qui suit, on recourt à une fonction de densité connue pour déterminer les pondérations, comme le kernel gaussien qui est retenu dans le cas de notre exemple. Ce dernier a la forme suivante :

$$k_h(x) = \frac{1}{h} k\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \tag{17}$$

Il est à remarquer que nous avons ici effectué un changement d'échelle de la variable x en la reportant dans un intervalle h compris entre $0,1 \times \hat{\sigma}_x$ et $0,5 \times \hat{\sigma}_x$ où $\hat{\sigma}_x$ est l'écart-type de $\{\mathbf{x_t}\}$. Notons que h est choisi de façon à minimiser un critère : $\hat{h} = \arg\min_h Q(h)$. Ce critère nous incite à choisir la valeur $0,1 \times \hat{\sigma}_x$. La propriété ii) du kernel s'exprime, dans le cas de la transmutation d'échelle : $\int k_h(u)du = 1$, où $k_h(u) = \frac{1}{h} k\left(\frac{u}{h}\right)$. Définissons la fonction de poids $w_{t,T}(x)$ qui entre dans notre moyenne pondérée comme suit :

$$w_{t,T}(x) = \frac{k_h(x - \mathbf{x_t})}{g_h(x)} \tag{18}$$

où $g_h(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} k_h(x - \mathbf{x_t})$.

La technique de lissage des données de Nadaraya-Watson : l'estimateur kernel de m, se définit comme suit :

$$\hat{m}_h(x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} w_{t,T}(x)y_t = \frac{\sum_{t=1}^{T} k_h(x - \mathbf{x_t})y_t}{\sum_{t=1}^{T} k_h(x - \mathbf{x_t})} \qquad (19)$$

On remarquera dans cette formule que l'on effectue une moyenne pondérée des y_t. Si h est très petit, la moyenne sera calculée dans un voisinage très concentré autour de x. Par ailleurs, quand l'intervalle est important, la moyenne sera calculée dans un voisinage plus étendu autour de x. h est donc le paramètre de lissage.

Passons maintenant à un exemple programmé dans le logiciel Excel. Dans un premier temps, nous générons les variables y à partir d'une simulation Monte Carlo. Nous générons à cette fin 200 variables y à partir de la relation suivante :

$$y_t = \sin(\mathbf{x_t}) + e_t \qquad (20)$$

où $e_t \sim N(0,1)$. Dans Excel, en faisant varier x_t de 0 à 2π, on écrit :

```
=SIN(B4)+LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())
```

et on copie cette cellule autant de fois qu'on le désire, 200 dans notre cas. Ce faisant, on obtient la variable y de notre simulation Monte Carlo. La figure 1 reproduit les y obtenus par cette simulation.

On se sert ensuite de ces données pour calculer l'estimateur kernel, obtenu, rappelons-le, à partir de la formule suivante :

$$\hat{m}_h(x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} w_{t,T}(x)y_t = \frac{\sum_{t=1}^{T} k_h(x - \mathbf{x_t})y_t}{\sum_{t=1}^{T} k_h(x - \mathbf{x_t})}$$

Incidemment, $\hat{m}_h(x)$ est l'estimateur de : $E(y_t|x_t) = \sin(x_t)$. Le résultat apparaît à la figure 2.

FIGURE 1 **Simulation Monte Carlo**

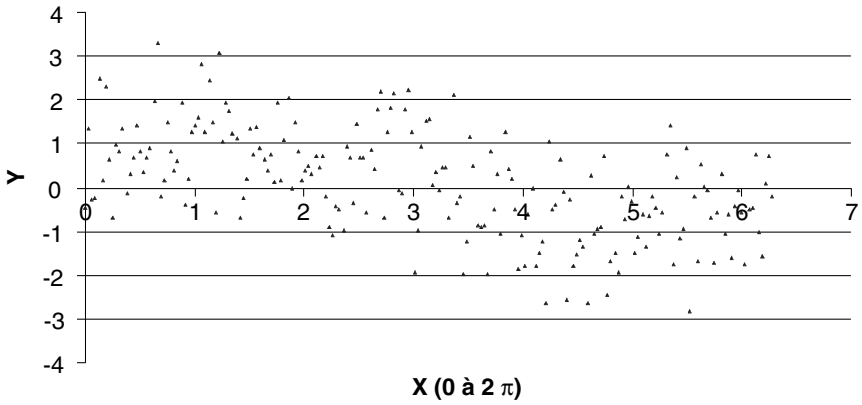
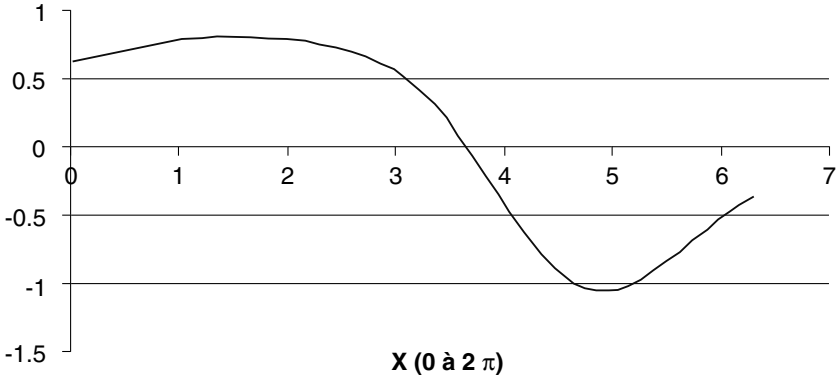


FIGURE 2 **Lissage par kernel**



Pour générer $k_h(x - \mathbf{x}_t)$ dans le logiciel Excel, on recourt à la formule suivante :

```
=(1/$E$4*RACINE(2*PI()))/(EXP((($F$2-B4)^2)/(2*$E$4^2)))
```

La cellule E4 renferme la valeur de h. Elle se calcule comme suit :

```
=ECARTYPE(B4:B204)*0.1
```

Les valeurs de x sont situées dans les cellules B4 à B204. Pour calculer $\hat{m}_h(x)$, on recourt à la formule suivante :

```
=SOMMEPROD(K4:K204;$C$4:$C$204)/NB(B4:B204)
```

où les cellules K4 à K204 renferment les valeurs de $k_h(.)$, et les cellules C4 à C204, les valeurs générées de y.

Finalement, il faut donner des valeurs à x pour le calcul de $\hat{m}_h(x)$. Nous avons choisi les cinq valeurs suivantes programmées dans Excel : 0, =PI( )/2, =PI( ), =3PI( )/2, =2PI( ).

En finance, la régression kernel peut servir à estimer les bêtas des titres. Par exemple, si nous disposons des rendements mensuels, disons de IBM et du TSE300, on peut générer l'estimateur kernel du bêta d'IBM. Les méthodes non paramétriques peuvent servir aussi à estimer des distributions empiriques et effectuer des prévisions[17]. À cet effet, Diebold et Nason appliquent les méthodes non paramétriques pour prévoir le taux de change[18].

BIBLIOGRAPHIE

BHANSALI, V. (1998), *Pricing and Managing Exotic and Hybrid Options*, New York, McGraw-Hill.

BRIYS, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives*, New York, Wiley.

CAMPBELL, J.Y. *et al.* (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton (N.J.), Princeton University Press.

COX, J.C, J.E. INGERSOLL et S.A. ROSS (1985), « A Theory of Term Structure of Interest Rates », *Econometrica*, vol. 53.

CUTHBERTSON, K. (1996), *Quantitative Financial Economics Stocks, Bonds and Foreign Exchange*, New York, Wiley.

17. Pour cette section, nous nous sommes référés aux documents suivants : Campbell, J.Y. *et al.*, (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton (N.J.), Princeton University Press ; Oxley, L. *et al.* (1995), *Surveys in Econometrics*, Oxford, Blackwell ; Johnston, J. et J. Dinardo (1997), *op. cit.*, chap. 11.

18. Diebold, F.X. et J.A. Nason (1990), « Nonparametric Exchange Rate Prediction ? », *Journal of International Economics*, vol. 28, p. 315-332.

DAVIDSON, R. et J.G. MCKINNON (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, New York, Oxford University Press.

DIEBOLD, F.X. et J.A. NASON (1990), « Nonparametric Exchange Rate Prediction ? », *Journal of International Economics*, vol. 28, p. 315-332.

EFRON, B. (1979), « Bootstrap Methods : Another Look at the Jacknife », *Annals of Statistics*, n° 7, p. 1-26.

HULL, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, 4e édition, Upper Saddle River (N.J.), Prentice Hall.

JEGADEESH, N. et B. TUCKMAN (2000), *Advanced Fixed-income Valuation Tools*, New York, Wiley.

JOHNSTON, J. et J. DINARDO (1997), *Econometric Methods*, 4e édition, New York, McGraw-Hill.

NEFTCI, S.N. (1996), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, New York, Academic Press.

OXLEY, L. *et al.* (1995), *Surveys in Econometrics*, Oxford, Blackwell.

ROSS, S.M. (1999), *An Introduction to Mathematical Finance : Options and Other Topics*, Cambridge, Cambridge University Press.

WILMOTT, P. (1998), *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*, New York, Wiley.

WILMOTT, P. (2000), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, vols. 1 et 2, New York, Wiley.

PARTIE

2

« BOOTSTRAPPING » ET ALGORITHMES D'OPTIMISATION

CHAPITRE

3

LES ASPECTS THÉORIQUES DE L'ÉVALUATION D'ACTIFS CONTINGENTS AVEC APPLICATIONS VISUAL BASIC

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'évaluation des actifs contingents (produits dérivés) par une méthode numérique : l'arbre binomial. Cette procédure fut introduite par Cox, Ross et Rubinstein en 1979[1]. Elle a l'avantage d'être plus versatile que le modèle de Black et Scholes (1973), c'est-à-dire qu'elle offre des solutions non seulement pour des options européennes, avec ou sans dividendes, mais également pour des options américaines. S'agissant de ces dernières, on recourt généralement à des solutions numériques pour les évaluer. Après avoir rappelé certains éléments-clefs de la méthode dite de l'arbre binomial, nous nous penchons sur le modèle de Cox, Ross et Rubinstein. Nous présentons ses éléments théoriques puis nous envisageons sa solution à l'aide d'un programme établi sur l'application Excel de Visual Basic.

1. LE MODÈLE DE BLACK ET SCHOLES

En 1973, Fisher Black et Myron Scholes ont présenté une solution analytique[2] à la détermination du prix d'une option d'achat européenne écrite sur une action qui ne verse aucun dividende. Sans doute

1. Cox, J.C., S.A. Ross et M. Rubinstein (1979), « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, p. 229-263.
2. Par opposition à une solution numérique.

l'une des formules les plus connues en finance moderne, elle s'écrit comme suit :

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r_f T}N(d_2) \qquad (1)$$

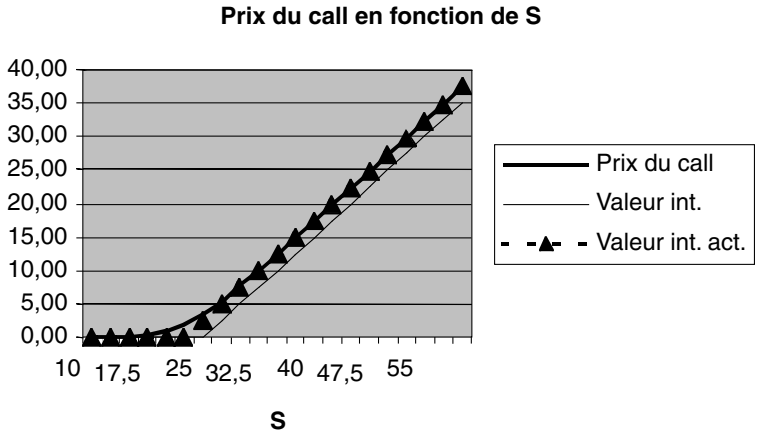
où C désigne le prix du call ; S, le prix de l'action ; N(.), la probabilité cumulative sous la normale (c.d.f.)[3] ; X, le prix d'exercice ; r_f, le taux sans risque et finalement T, la durée restante de l'option. d_1 et d_2 se définissent comme suit :

$$d_1 = \frac{\ln(S / X) + (r_f + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

L'évolution du prix du call en fonction de celui de l'action sous-jacente est présentée à la figure 1.

Sur la figure 1 apparaissent également la valeur intrinsèque et la valeur intrinsèque actualisée de l'option d'achat. Comme on peut le constater, la valeur intrinsèque actualisée de l'option d'achat constitue sa borne inférieure. Elle est égale à : $S - Xe^{-r_f T}$. Notons que ce

FIGURE 1



3. c.d.f. est l'abréviation de *cumulative distribution function*.

TABLEAU 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	S	25								
4	X	25		Prix action	delta		Prix action	Prix call	Valeur intr.	Val. intrin. act
5	rf	0.2			0.72			3.42		
6	T	0.5		10	0.00		10	0.00	0	0.00
7	Sigma	0.3		12.5	0.00		12.5	0.00	0	0.00
8				15	0.03		15	0.04	0	0.00
9	d1	0.57747054		17.5	0.13		17.5	0.23	0	0.00
10	d2	0.3653385		20	0.32		20	0.78	0	0.00
11				22.5	0.53		22.5	1.85	0	0.00
12	N(d_1)	0.71818923		25	0.72		25	3.42	0	2.38
13	N(d_2)	0.64257057		27.5	0.85		27.5	5.39	2.5	4.88
14				30	0.92		30	7.61	5	7.38
15	Call	3.41918321		32.5	0.97		32.5	9.98	7.5	9.88
16	Put	1.04011866		35	0.98		35	12.42	10	12.38
17				37.5	0.99		37.5	14.90	12.5	14.88
18				40	1.00		40	17.39	15	17.38
19				42.5	1.00		42.5	19.88	17.5	19.88
20				45	1.00		45	22.38	20	22.38
21				47.5	1.00		47.5	24.88	22.5	24.88
22				50	1.00		50	27.38	25	27.38
23				52.5	1.00		52.5	29.88	27.5	29.88
24				55	1.00		55	32.38	30	32.38
25				57.5	1.00		57.5	34.88	32.5	34.88
26				60	1.00		60	37.38	35	37.38

graphique a été établi à partir du logiciel Excel. Dans le menu principal, il suffit de cliquer sur *Données* puis sur *Table*. Le chiffrier ayant servi à construire ce graphique apparaît au tableau 1.

Sur le tableau 1, on retrouve également l'évolution du delta du call, dont la formule est dérivée dans l'appendice, en fonction du prix de l'action. On peut visualiser cette relation à la figure 2.

Il est d'usage courant d'insinuer que le delta d'un call est de 0,5 lorsque le prix de l'action est égal au prix d'exercice, ici 25 $. Comme on peut en juger au tableau 1, une telle affirmation est erronée puisque dans le cas présent, le delta est égal à 0,72 lorsque le prix de l'action est égal au prix d'exercice. Pour obtenir un delta de 0,5, il faudrait que le taux sans risque soit plus faible, que l'échéance de l'option soit plus courte, et/ou que la volatilité de l'action sous-jacente soit plus élevée. Les résultats de nos simulations du delta sur Excel en fonction de ces trois paramètres pour l'exemple qui apparaît au tableau 1 sont répertoriés aux figures 3, 4 et 5.

FIGURE 2

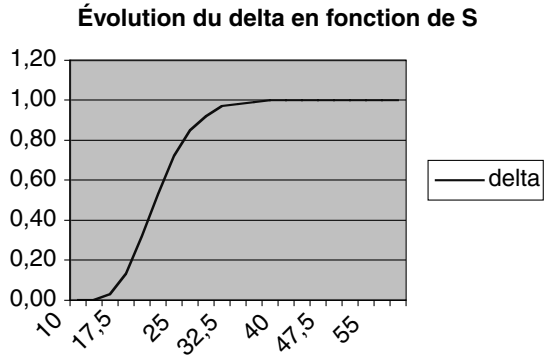


FIGURE 3

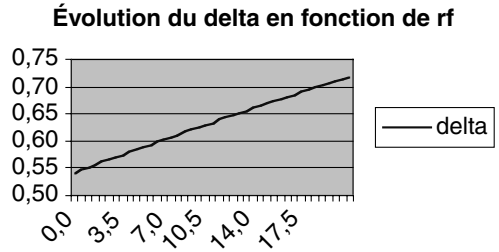


FIGURE 4

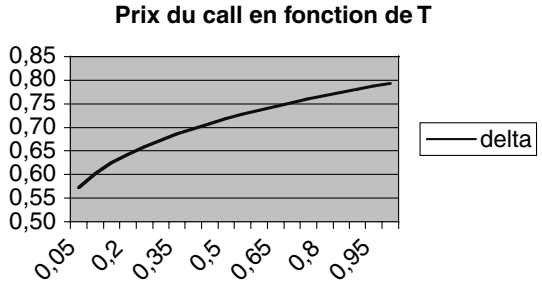
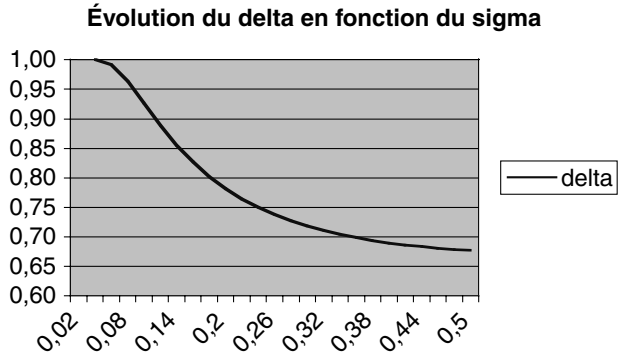


FIGURE 5

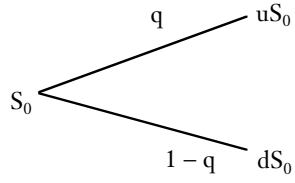


2. ARBRE BINOMIAL À UNE PÉRIODE

Nous envisageons maintenant une méthode numérique qui permet de déterminer les prix d'un plus grand nombre de catégories d'options que le modèle de Black et Scholes : l'arbre binomial. Comme nous le montrerons plus loin, la distribution binomiale converge vers la distribution normale si, quand t s'approche de 0, les changements de prix deviennent de plus en plus petits. Comme le modèle de Black et Scholes suppose que la distribution des prix des actions est lognormale, le modèle binomial converge vers le modèle de Black et Scholes dans le cas d'une option d'achat européenne. Par ailleurs, si les changements de prix demeurent importants quand t tend vers 0, la distribution binomiale converge vers la distribution de Poisson, une distribution qui admet des changements brusques de prix.

L'arbre binomial à une période prend la forme suivante :

FIGURE 6



Sur la figure 6, S_0 est le prix de l'actif financier au temps 0. Le prix de cet actif a une probabilité q d'augmenter et de (1 – q) de diminuer. Si la valeur de l'actif augmente, le prix est alors de uS_0, où u est le facteur multiplicatif associé aux mouvements de hausse de prix. Par contre, si le prix de cet actif diminue, il est alors de dS_0, où d est le facteur multiplicatif associé aux mouvements de baisse de prix. Il reste à déterminer la valeur de q.

Pour y arriver, calculons la valeur espérée du prix de l'actif financier après une période :

$$E(S_t) = (1 + r_f)S_0 \tag{2}$$

Pour passer du temps discret au temps continu, on utilise des fractions d'années très petites, ce qui nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{j}{n / T}\right)^{n/T} = e^j = 1 + r_f \tag{3}$$

où j est le taux qui est composé n fois dans l'intervalle de temps T. T est une fraction d'année et r_f, le taux de rendement pour une année. En posant que $j = \mu\Delta t$, où μ est le rendement espéré de l'actif financier[4] Δt et le pas de longueur $h = t / n$, on a alors :

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu\Delta t} \tag{4}$$

Pour faire concorder la valeur espérée du prix de l'actif avec celle de l'arbre, on doit avoir :

$$S_0 e^{\mu\Delta t} = qS_0u + (1 - q)S_0d \tag{5}$$

De cette équation, il résulte que :

$$\begin{aligned} e^{\mu\Delta t} &= qu + d - qd \\ &= q(u - d) + d \\ \Rightarrow q &= \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} \end{aligned} \tag{6}$$

4. Dans un univers réel par opposition à un univers neutre au risque.

Pour trouver les valeurs de u et de d, on les fixe à des niveaux qui font en sorte qu'elles respectent les équations de volatilité et d'espérance. La procédure est la suivante. Considérons une séquence typique de cinq mouvements, soit : u, d, u, u, d. Le prix final de l'actif est de : $S^* = S_0uduud = u^3d^2S_0$. En termes de rendement, on obtient : $\ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right) = \ln(u^3d^2) = 3\ln u + 2\ln d$. En généralisant pour n périodes, on a :

$$\ln\left(S^* / S_0\right) = j\ln u + (n - j)\ln d = j\ln(u / d) + n\ln d \qquad (7)$$

où j est un nombre aléatoire qui représente le nombre de mouvements de hausse se produisant durant les n périodes jusqu'à l'échéance. Calculons maintenant l'espérance dont nous avons fait mention. Cette valeur espérée du rendement est de : $E\left[\ln\left(S^* / S_0\right)\right] = \ln(u / d)E(j) + n\ln d$ puisque j est un nombre aléatoire. Sachant que E(j) = nq et parce qu'il y a n mouvements possibles avec une probabilité de q, on obtient l'équation de la valeur espérée du rendement de l'actif :

$$E\left[\ln\left(S^* / S_0\right)\right] = \left(q\ln(u / d) + \ln d\right)n \qquad (8)$$

Il nous reste à calculer l'équation de la volatilité. Elle est donnée par : $V\left[\ln\left(S^* / S_0\right)\right] = \left(\ln(u / d)^2\right)V(j)$. La volatilité pour une période se calcule comme suit :

$$V_1\left[\ln\left(S^* / S_0\right)\right] = E\left(\ln(S^* / S_0)^2\right) - \left(E(\ln(S^* / S_0))\right)^2 \qquad (9)$$

où $E\left((\ln(S^* / S_0))^2\right) = q(\ln u)^2 + (1 - q)(\ln d)^2$

et $\left(E\left(\ln(S^* / S_0)\right)\right)^2 = \left(q\ln u + (1 - q)\ln d\right)^2$. En substituant ces deux équations dans (9), on obtient :

$$V_1\left[\ln\left(S^* / S_0\right)\right] = q(\ln u)^2 + (1 - q)(\ln d)^2 - \left[q\ln u + (1 - q)\ln d\right]^2 \qquad (10)$$

Et en développant le dernier membre de (10) :

$$\begin{aligned} V_1\left[\ln\left(S^*/S_0\right)\right] &= q(\ln u)^2 + (1-q)(\ln d)^2 - \\ &\quad \left[q^2\left(\ln u\right)^2 + 2q \ln u(1-q)\ln d + (1-q)^2\left(\ln d\right)^2\right] \\ &= q \ln u(\ln u - q \ln u) + (1-q)(\ln d)\left(\ln d - (1-q)\ln d\right) \\ &\quad - 2q \ln u(1-q)\ln d \\ &= q\left(\ln u\right)^2(1-q) + (\ln d)^2\left(q(1-q)\right) - 2q \ln u(1-q)\ln d \\ &= (1-q)q\left[\left(\ln u\right)^2 + (\ln d)^2 - 2\ln u \ln d\right] \\ &= \left(\ln u - \ln d\right)^2(1-q)q = \left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2(1-q)q \end{aligned}$$

La variance pour n périodes est de n fois la variance d'une période et se formule comme suit :

$$V\left[\ln(S^*/S_0)\right] = \left(\ln(S^*/S_0)\right)^2 V(j) = \left(\ln(S^*/S_0)\right)^2 n(1-q)q \quad (11)$$

L'équation (11) représente l'équation de la volatilité que les mouvements de hausse et de baisse doivent respecter en plus de l'équation d'espérance dont nous avons parlé précédemment.

Il nous reste maintenant à faire une conjecture quant aux solutions possibles de u et d respectant les équations d'espérance et de volatilité. Supposons la solution suivante pour u et d :

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$$

et posons $q = 1/2 + 1/2 + (\mu/\sigma)\sqrt{t/n}$. Il faut montrer qu'asymptotiquement, ces solutions fassent en sorte que :

$$\left[q \ln(u/d) + \ln d\right]n \to \mu t \quad (12)$$

$$\left[\ln(u/d)\right]^2 q(1-q)n \to \sigma^2 t \quad (13)$$

quand $n \to \infty$. En substituant u, d et q dans (12), on obtient :

$$\left[(1/2 + 1/2(\mu/\sigma)\sqrt{t/n})\ln\left(e^{\sigma\sqrt{t/n}} / e^{-\sigma\sqrt{t/n}}\right) + \ln\left(e^{-\sigma\sqrt{t/n}}\right)\right] n$$
$$= \left[(1/2 + 1/2(\mu/\sigma)\sqrt{t/n})2\sigma\sqrt{t/n} - \sigma\sqrt{t/n}\right] n$$
$$= \left(\sigma\sqrt{t/n} - \sigma\sqrt{t/n} + \mu(\sigma/\sigma)\sqrt{t/n}\sqrt{t/n}\right) n$$
$$= \mu t$$

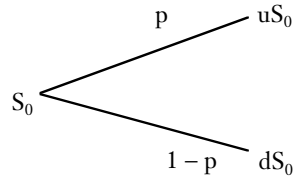
On a donc démontré que notre conjecture était vraie et que les valeurs postulées pour u, d et q font en sorte que l'équation d'espérance soit respectée asymptotiquement. On doit aussi vérifier que ces solutions respectent l'équation de variance. En substituant u, d et q dans (13), on constatera que ces solutions respectent effectivement la relation (13).

L'évaluation dans un univers neutre au risque

L'analyse précédente suppose que l'on se situe dans un univers réel. Pour déterminer les prix d'actifs contingents, il nous faut transiter de cet univers à un autre dans lequel les investisseurs sont neutres au risque.

Dans un univers neutre au risque, les investisseurs ne requièrent aucune compensation pour le risque et l'espérance de rendement pour tous les actifs financiers est le taux sans risque : r_f. L'arbre binomial à une période qui apparaît à la figure 7 illustre l'évolution possible d'un actif ayant comme prix S_0 dans un univers neutre au risque.

FIGURE 7



L'espérance du prix de l'actif financier au temps T est donnée par :

$$E(S_T) = pS_0u + (1 - p)S_0d = pS_0(u - d) + S_0d \tag{14}$$

La valeur de l'actif après une période est de :

$$E(S_T) = (1 + r_f)S_0 = S_0e^{r_f\Delta t} \tag{15}$$

Par conséquent, pour faire concorder les paramètres de l'arbre avec l'espérance de rendement, on doit avoir :

$$E(S_T) = S_0e^{\Delta tr_f} = pS_0(u - d) + S_0d$$
$$\Rightarrow p = \frac{e^{r_f\Delta t} - d}{u - d} \tag{16}$$

L'équation (16) nous révèle que l'on se situe bien dans un univers neutre au risque, la probabilité d'un mouvement de hausse étant égale à p et r_f étant le taux sans risque prévalant dans cet univers. Lorsqu'il s'agit d'évaluer des actifs contingents, on peut d'emblée se situer dans un univers neutre au risque. Les prix que l'on obtient sont exacts non seulement dans un tel univers mais aussi dans d'autres[5].

La variance du prix d'un actif financier dans un univers neutre au risque se calcule de façon similaire à celle du monde réel et est donnée par :

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - \left(pu - (1 - p)d\right)^2$$
$$= e^{r_f\Delta t}(u + d) - ud - e^{2r_f\Delta t}$$
$$= \sigma^2 t \tag{17}$$

En prenant le logarithme dans cette équation et en faisant de la sorte pour l'équation d'espérance, on trouve qu'asymptotiquement, les équations précédemment dérivées pour u et d sont toujours valables :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{\sigma\sqrt{t/n}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$$

5. Pour plus de détails à ce sujet voir : Hull, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall, chap. 9 et 19 ; Neftci, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, New York, Academic Press, chap. 14.

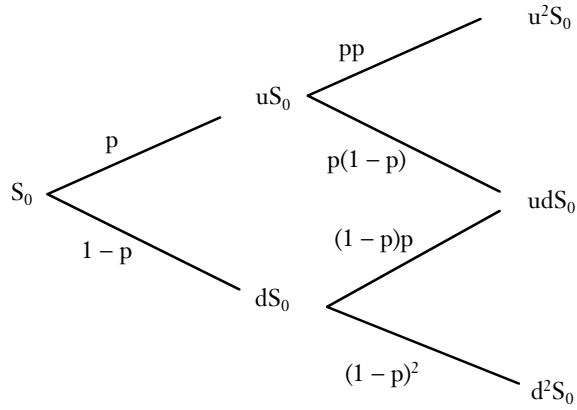
On conclut de cette analyse que lorsque l'on passe du monde réel à un univers neutre au risque, l'espérance du rendement se modifie[6] mais la volatilité demeure la même, c'est-à-dire : $\sigma^2 t$.

Ces développements sont associés au théorème de Girsanov. Lorsque l'on passe d'un univers avec un ensemble donné de préférences à l'égard du risque à un autre doté d'un ensemble différent, l'espérance du *drift* se modifie mais les volatilités demeurent les mêmes. Incidemment, le passage d'un ensemble de préférences à un autre est appelé : changement de mesure.

3. ARBRE BINOMIAL À DEUX PÉRIODES ET GÉNÉRALISATION[7]

Considérons maintenant l'arbre binomial à deux périodes. Un tel arbre est représenté à la figure 8.

FIGURE 8



6. Puisque dans un monde réel, elle est donnée par : $S_0 e^{\Delta t \mu}$ et dans un univers neutre au risque par : $S_0 e^{\Delta t r_f}$.

7. À ce sujet, on consultera : Khoury, N. et P. Laroche (1995), *Options et contrats à terme*, Sainte-Foy, Presses de l'Université Laval, chap. 4 ; Racicot, F.É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, chap. 6.

En vertu des développements de la section 2, l'espérance du prix de l'actif financier est donnée par :

$$E(S_T) = p^2u^2S_0 + 2p(1-p)S_0 + (1-p^2)S_0 \qquad (18)$$

et cela par simple addition du prix initial pondéré par ses probabilités.

À partir de ce cas, calculons la valeur d'un call européen :

$$C_T = p^2 \text{Max}\left[S_0u^2 - X, 0\right] + 2p(1-p)\text{Max}\left[S_0du - X, 0\right] + (1-p^2)\text{Max}\left[S_0 - X, 0\right]$$

Au temps 0, on obtient :

$$C = e^{-r_f T}\begin{pmatrix} p^2\text{Max}\left[S_0u^2 - X, 0\right] + 2p(1-p)\text{Max}\left[S_0du - X, 0\right] \\ +(1-p^2)\text{Max}\left[S_0 - X, 0\right] \end{pmatrix} \qquad (19)$$

En généralisant (19) à n périodes, on a finalement :

$$C = e^{-r_f n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\text{Max}\left[u^j d^{n-j}S_0 - X, 0\right] \qquad (20)$$

où $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$. Cette formule n'est en fait qu'une généralisation d'un résultat connu sous le nom de *distribution de Pascal*. CRR (1979) ont appliqué le résultat de Pascal – servant au calcul des probabilités dans un jeu où le nombre d'essais est aléatoire – au cas du calcul du prix d'un call européen simplement en ajoutant à ce résultat la fonction Max(.) et en actualisant le tout[8].

4. Convergence de la formule de CRR vers la solution de Black-Scholes

À la limite, l'équation (20) est identique à la formule de Black et Scholes. Montrons-le. Sachant que plusieurs des cash-flows finaux d'un call seront nuls parce que l'option se termine hors-jeu et en

8. À ce sujet, on consultera : Jensen, A. (1954), *A Distribution Model Applicable to Economics*, Copenhague, Munksgaard.

désignant la borne positive par alpha, qui indique les états de la nature pour lesquels l'option a une valeur non négative, on obtient :

$$C = e^{-r_f n} \sum_{j=\alpha}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left[S_0 u^j d^{n-j} - X, 0 \right] \qquad (21)$$

La fonction Max(.) est disparue dans l'équation (21), car l'on ne considère que les cash-flows positifs. En distribuant l'opérateur sommation à l'intérieur du crochet de (21), on a :

$$C = e^{-r_f n} S_0 \left[\sum_{j=\alpha}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j} \right] - X e^{-r_f n} \left[\sum_{j=\alpha}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \right] \qquad (22)$$

Le deuxième crochet de (22) est la distribution de Pascal. Elle se définit comme la probabilité cumulative, dans une distribution binomiale, d'avoir des options en jeu ($j \geq \alpha$), étant donné une probabilité p et un nombre de périodes n. De façon plus compacte, cette probabilité s'écrit : $b(j \geq \alpha | n, p)$. Le premier crochet de (22) peut se simplifier en posant : $p' = \left(ue^{-r_f}\right)p$ et $1 - p' = \left(de^{-r_f}\right)(1-p)$.

Cela implique : $e^{-r_f n} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j} = \left(ue^{-r_f} p\right)^j \left(de^{-r_f}(1-p)\right)^{n-j} = (p')^j (1-p')^{n-j}$. Le modèle binomial peut donc s'écrire comme suit :

$$C = S_0 b\left(j \geq \alpha | n, p\right) - X e^{-r_f n} b\left(j \geq \alpha | n, p'\right) \qquad (23)$$

Pour montrer la convergence de la formule de CRR vers celle de Black-Scholes, il nous faut établir que : $b\left(j \geq \alpha | n, p\right) \xrightarrow{d} N(d_1)$ et $b\left(j \geq \alpha | n, p'\right) \xrightarrow{d} N(d_2)$. Dans ce qui suit, nous donnons un aperçu de cette preuve en utilisant le théorème central limite (TCL)[9]. Le TCL stipule que :

$$\Pr\left[\frac{\ln(S^* / S_0) - wn}{\Delta\sqrt{n}} \leq z \right] \rightarrow \Pr\left[\frac{\ln(S_T / S_0) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right] = N(z) \qquad (24)$$

9. À ce sujet on consultera : Gibson, R. (1990), *Option Valuation : Analyzing and Pricing Standardized Option Contracts*, New York, McGraw-Hill, chap. 4.

quand $n \to \infty$. Dans (22), N(z) est la c.d.f. normale et $wn = E(\ln(S^*/S_0))$, $\lim_{n\to\infty} wn = \mu\tau$, $V(\ln(S^*/S_0)) = \Delta^2 n$, $\lim_{n\to\infty} \Delta\sqrt{n} = \sigma\sqrt{\tau}$. Fort de ces résultats, on peut écrire que :

$$b\left[j \geq \alpha \middle| n, p'\right] \equiv N\left[\frac{\ln(S / Xe^{-r_f\tau})}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}\right] \equiv N(d_2) \qquad (25)$$

et que :

$$b\left[j \geq \alpha \middle| n, p\right] \equiv N\left[\frac{\ln(S / Xe^{-r_f\tau})}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}\right] \equiv N(d_1) \qquad (26)$$

quand n tend vers l'infini.

Finalement, en substituant (25) et (26) dans (23), on obtient le résultat recherché :

$$C = S_0N(d_1) - Xe^{-r_fn}N(d_2) \ \text{QED} \qquad (27)$$

Une digression sur l'application de l'équation de Black et Scholes en finance corporative[10]

Il est possible de relier le modèle du CAPM à celui de Black-Scholes en utilisant le lemme d'Ito[11]. Soit p la valeur marchande de l'encours d'un actif financier émis par une entreprise[12] et V, la valeur de ses actifs. En vertu du lemme d'Ito, on a :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial V}dV + \frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{(\partial V)^2}\sigma^2V^2dt \qquad (28)$$

10. Pour cette section, nous nous inspirons des ouvrages suivants : Copeland, T.E. et J.F. Weston (1988), *Financial Theory and Coporate Policy*, 3e édition, New York, Addison-Wesley, chap. 13 ; Damodaran, A. (1996), *Investment Valuation : Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*, New York, Wiley, chap. 12 ; Megginson, W. (1997), *Corporate Finance Theory*, New York, Addison-Wesley, chap. 7 ; Mercier, G. et R. Théoret (1997), *Traité de gestion financière : une perspective québécoise et canadienne*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, chap. 16.

11. Pour une introduction au lemme d'Ito, on consultera : Racicot, F.É. et R. Théoret (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, chap. 6.

12. Soit un instrument de financement, p. ex. la dette ou l'équité (produit du nombre d'actions et de leur prix).

L'équation (28) montre que le changement dans p est relié à celui de la valeur de l'entreprise (dV), au mouvement dans le temps du prix de l'action (dt) et à la variance instantanée de la valeur de l'entreprise (σ^2). En divisant (28) par p, on a à limite :

$$\lim_{dt \to 0} \frac{dp}{p} = \frac{\partial p}{\partial V} \frac{dV}{p} = \frac{\partial p}{\partial V} \frac{dV}{V} \frac{V}{p} \tag{29}$$

Sachant que $\frac{dp}{p} = r_p$ est le rendement de l'actif financier et que $\frac{dV}{V} = r_V$, celui des actifs de l'entreprise, on a :

$$r_p = \frac{\partial p}{\partial V} \frac{V}{p} r_V \tag{30}$$

En définissant $\beta_p = \frac{Cov(r_p, r_m)}{Var(r_m)}$ et $\beta_V = \frac{Cov(r_V, r_m)}{Var(r_m)}$ comme étant, respectivement, le risque systématique de l'actif financier et le risque des actifs de l'entreprise, on obtient, en substituant ces relations dans (30) :

$$\beta_p = \frac{\partial p}{\partial V} \frac{V}{p} \beta_V \tag{31}$$

Cette relation a été obtenue en observant que $\beta_p / \beta_V = \frac{\partial p}{\partial V} \frac{V}{p}$ est l'élasticité de p par rapport à V, qui est mesurée par la variation (la covariation) procentuelle de p sur V.

En utilisant le modèle de Black et Scholes, on peut calculer la valeur d'une option d'achat comme étant l'équité de l'entreprise. Cette valeur prend la forme suivante :

$$p = VN(d_1) - e^{-r_f T} DN(d_2) \tag{32}$$

où p est la valeur marchande de l'équité ; V, la valeur marchande des actifs de la firme ; r_f, le taux sans risque ; T, le temps restant jusqu'à

l'échéance ; D, la dette (valeur aux livres) de l'entreprise ; N(.), la c.d.f. normale et finalement :

$$d_1 = \frac{\ln(V / D) + r_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Enfin, la dérivée partielle de l'équité (p) par rapport à l'actif sous-jacent est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial V} = N(d_1) \tag{33}$$

L'équation (33) est aussi appelée le delta[13]. En utilisant la relation (31), on trouve que :

$$\beta_p = N(d_1)\frac{V}{p}\beta_V = \text{delta}\,\frac{V}{p}\beta_V \tag{34}$$

Cette équation établit la relation entre le risque systématique de l'équité, β_p, et celui de l'entreprise, β_V, et montre également l'importance relative du delta en finance.

Rappelons la version théorique de l'équation du CAPM pour un actif i avec un actif sans risque dont le taux est de r_f :

$$E(r_i) = r_f + \left[E(r_m) - r_f\right]\beta_i \tag{35}$$

En substituant (34) dans (35), on peut réécrire l'équation du CAPM en termes du delta pour ainsi obtenir le rendement de l'équité :

$$\begin{aligned} k_p &= r_f + \left(E(r_m) - r_f\right)N(d_1)\frac{V}{p}\beta_V \\ &= r_f + \left(E(r_m) - r_f\right)\beta_p \end{aligned} \tag{36}$$

13. La démonstration du delta est présentée en appendice. Nous présentons également d'autres mesures de la sensibilité.

Application

Le risque systématique d'une dette risquée (dans un univers sans impôts) peut être écrit, en invoquant un argument similaire à l'équation (31), comme suit :

$$\beta_B = \beta_V \frac{\partial B}{\partial V} \frac{V}{B} \tag{37}$$

En utilisant l'équation du CAPM, on obtient que le rendement requis pour la détention d'une dette risquée peut s'écrire :

$$k_B = r_f + \left(E(r_m) - r_f\right)\beta_B \tag{38}$$

Cette dernière relation peut être récrite en tenant compte de (37) et du fait que $\partial B / \partial V = 1 - N(d_1) = N(-d_1)$[14] :

$$k_B = r_f + \left(E(r_m) - r_f\right)\beta_V N(-d_1) \frac{V}{B} \tag{39}$$

Mais sachant que $E(r_V) = r_f + \left(E(r_m) - r_f\right)\beta_V \Rightarrow E(r_V) - r_f = \left(E(r_m) - r_f\right)\beta_V$, il s'ensuit que : $k_B = r_f + \left(E(r_V) - r_f\right)N(-d_1)\frac{V}{B}$. Finalement, en définissant $\rho = E\left(r_v\right)$, il résulte que :

$$k_B = r_f + \left(\rho - r_f\right)N(-d_1)\frac{V}{B} \tag{40}$$

Cette équation exprime le rendement d'une dette risquée en termes de : 1 – delta.

Prenons un exemple pour illustrer l'équation (40)[15]. Supposons que la valeur courante de l'entreprise est de V = 3 millions de dollars et la valeur (*nominale*) de sa dette, de 1,5 million de dollars. La dette échoit dans 8 ans ; la variance des rendements de l'entreprise

---

14. Puisque $B = V - p$ et que $\frac{\partial B}{\partial V} = 1 - \frac{\partial p}{\partial V} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial V} = 1 - N(d_1)$.

15. Tiré de Copeland et Weston (1988).

est : $\sigma^2 = 0{,}09$; le rendement requis pour cette entreprise s'établit à : $E(r_v) = \rho = 0{,}12$ et le taux sans risque est de $r_f = 0{,}05$. On a alors que le coût de la dette est de :

$$k_B = 0{,}05 + (0{,}12 - 0{,}05)(0{,}0434)\ 3 / 1{,}5 = 0{,}0561$$

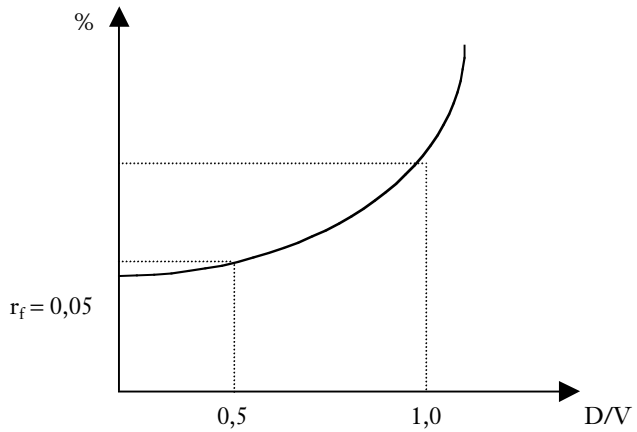
où

$$d_1 = \frac{\ln(3 / 1{,}5) + 0{,}05(8)}{0{,}3\sqrt{8}} + 0{,}5(0{,}3\sqrt{8}) = 1{,}7125$$

$$\Rightarrow N(-1{,}7125) = 0{,}0434$$

La figure 9 illustre que si la dette est faible, le risque de faillite l'est également et à mesure que D/V (proportion de la dette par rapport à la valeur de l'entreprise) augmente, le risque de faillite adopte la même pente.

FIGURE 9



Pour obtenir le coût moyen du capital (WACC)[16], on calcule la moyenne pondérée de (40) par B/V et de (36) par p/V :

$$\begin{aligned} k_B B / V + k_p p / V &= \left[r_f + (\rho - r_f)N(-d_1)V / B\right]B / V \\ &\quad + \left[r_f + N(d_1)(\rho - r_f)V / p\right]p / V \\ &= r_f\left(\frac{B + p}{V}\right) + (\rho - r_f)\left(N(-d_1) + N(d_1)\right) \\ &= r_f + (\rho - r_f)\left(1 - N(d_1) + N(d_1)\right) = \rho^{17} \end{aligned} \quad (41)$$

L'équation (41) reflète exactement la proposition de Modigliani-Miller selon laquelle, dans un univers sans impôts, le coût moyen du capital est indépendant de la structure du capital d'une entreprise. En réarrangeant (41), on a :

$$k_p = \rho + (\rho - k_B)\frac{B}{p}\ ^{18} \quad (42)$$

Cette équation est la définition de Modigliani-Miller du coût du capital dans un univers sans impôts. Si on suppose qu'une dette est risquée, le modèle d'évaluation d'options, le CAPM et la définition de Modigliani-Miller sont cohérents entre eux. Cet exercice a donc établi un lien entre ces trois théories.

5. Les modèles de CRR et de Black et Scholes avec application Excel Visual Basic[19]

Dans cette section est présentée la transposition du modèle de Cox, Ross et Rubinstein (CRR) dans le langage Visual Basic (V.B.) pour

16. Weighted Average Cost of Capital.

17. Puisque $B + p = V \Rightarrow V / V = 1$.

18. Puisque $V = B + p$ alors on a : $k_p = \rho V / p - k_B B / p = (\rho(B + p) / p) - (k_B B / p) = \rho B / p + \rho - k_B B / p = \rho + (\rho - k_B)B / p$ QED.

19. Pour cette section on consultera : Benninga, S. et Z. Weiner (1997), « Binomial Option Pricing : The Black-Scholes Option Pricing Formula, and Exotic Options », *Mathematica in Research and Education*, vol. 6, n° 4 ; Benninga, S. et Z. Weiner (1997), « The Binomial Option Pricing Model », *Mathematica in Research and Education*, vol. 6, n° 3 ; Benninga, S. (2000), *Financial Modeling*, Cambridge (Mass.), MIT Press, chap. 14 ; Dordain, J.N. et N. Singh (1999), *Finance Quantitative*, Paris, Economica, chap. 12.

Excel. Ce modèle est également comparé à celui de Black et Scholes. Nous expliquons d'abord le programme V.B. puis vient ensuite la comparaison avec la méthode de Black et Scholes pour le cas d'une option d'achat (call) européenne. Finalement, l'on termine avec la présentation du programme V.B. pour le cas d'une option de vente (put) américaine.

5.1. Programme Visual Basic pour le call européen

Voici l'allure du programme V.B. pour le call dans le cadre du modèle CRR. Ce programme est présenté au tableau 2.

TABLEAU 2

```
Function optionachat(S, x, rf, sigma, T, n)

' (Programmé par : F.E. Racicot & R. Théoret (2001/03/21)

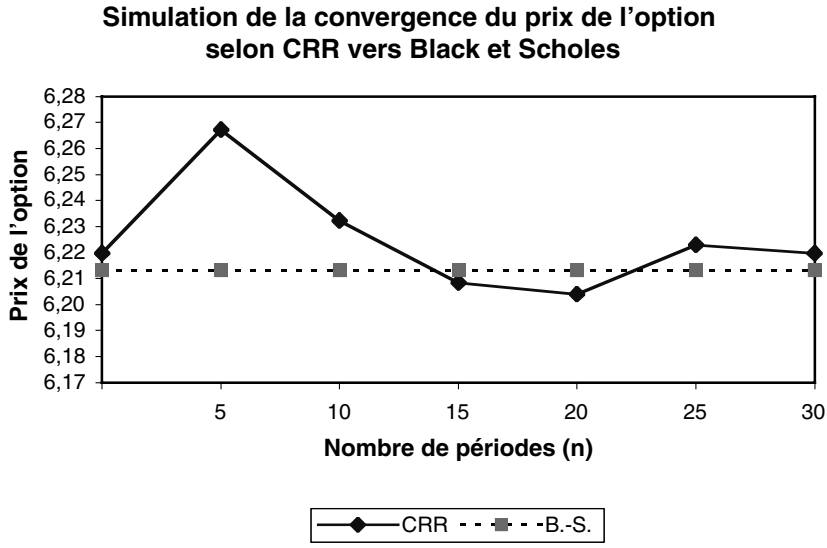
deltat = T / n
u = Exp(sigma * Sqr(deltat))
d = Exp(-sigma * Sqr(deltat))
r = Exp(rf * deltat)
pu = (r - d) / (u - d)
pd = 1 - pu
optionachat = 0
For i = 0 To n
optionachat = optionachat + Application.Combin(n, i) * pu ^ i * pd
^ (n - i) * Application.Max(S * u ^ i * d ^ (n - i) - x, 0)
Next i

End Function
```

On remarque rapidement que les calculs présentés dans les sections précédentes se traduisent quasi littéralement dans le langage V.B. Par exemple, le calcul de p est obtenu ici par pu, la probabilité de hausse. Le calcul des combinaisons de la formule de CRR est obtenu par l'application Excel : Application.Combin(n,i). La sommation de la formule de CRR est obtenue par la boucle *For i = 0 to n*. Ainsi, la somme est effectuée par les itérations additives suivantes : *optionachat(i + 1) = optionachat(i) + valeur(i) pour i = 0 à n* et où le terme valeur représente le membre de droite de l'équation du programme.

Passons à la comparaison du modèle de CRR avec celui de Black et Scholes. La figure 10 présente la convergence du modèle de CRR vers celui de Black et Scholes pour un nombre de périodes allant jusqu'à 30.

FIGURE 10



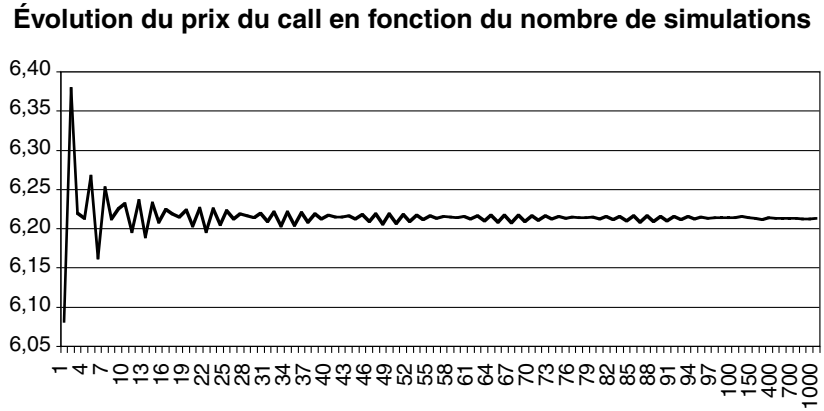
On observe que la convergence s'effectue à partir de 30 périodes vers la valeur de 6,21 $ qui est, nous le verrons, celle qui correspond à l'équation du modèle de Black et Scholes. Pour mieux nous convaincre de la vitesse de convergence, la figure 11 étire le nombre de simulations jusqu'à 1000.

La figure 11 nous conforte dans nos attentes quant à la rapidité de la vitesse de convergence du modèle binomial.

Expliquons comment procéder pour mener à bien cette simulation de même que le calcul de la formule de Black et Scholes dans Excel. Il est très simple d'effectuer une telle simulation puisque l'on a qu'à utiliser la commande *Table* située dans le menu : *Données* d'Excel 97. Il ne faut pas oublier d'appeler la fonction *optionachat* dans Excel en entrant dans une cellule la commande suivante :

```
=EXP(-B5*B7)*optionachat(B3;B4;B5;B6;B7;B10)
```

FIGURE 11



où B3, B4, B5, B6, B7, B10 contiennent respectivement : S, le prix de l'action ; X, le prix d'exercice ; rf, le taux sans risque ; sigma, la volatilité ; T, l'échéance et n, le nombre de périodes.

Les calculs que l'on doit effectuer afin d'obtenir le prix du call européen à partir de la formule de Black et Scholes dans Excel sont les suivants :

d1 : `=(LN(F3/F4)+(F5+*F6))/(F7*RACINE(F6)) + 0,5*F7*RACINE(F6)`
d2 : `=F9-RACINE(F6)*F7`

où F3, F4, F5, F6, F7 et F9 sont les cellules qui contiennent respectivement : S, X, rf, T, sigma et F9 est la cellule qui contient d1. Les valeurs de N(d1) et N(d2) sont obtenues comme suit :

N(d1) : `=LOI.NORMALE.STANDARD(F9)`
N(d2) : `=LOI.NORMALE.STANDARD(F10)`

où LOI.NORMALE.STANDARD(.) est la commande Excel qui calcule la c.d.f. normale. Finalement, la formule du call européen s'obtient :

Call : `=F3*F12-F4*EXP(-F5*F6)*F13`

où F12 est le résultat de N(d1) et F13, celui de N(d2). Les données utilisées pour effectuer la simulation présentée a la figure 10 se retrouvent au tableau 3.

TABLEAU 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Prog. Par : F.E. Racicot & R. Théoret (2001/03/21)									
2	Option d'achat européenne					Formule de Black et Scholes				
3	S	30			S	30	prix de l'actif			
4	X	25			X	25	prix d'exercice			
5	rf	0.06			rf	0.06	taux sans risque			
6	sigma	0.3			T	0.5	temps restant jusqu'à l'échéance (en années)			
7	T	0.5			Sigma	30%	volatilité			
8	deltat=T/n	0.016666667								
9	r=exp(rf*del.)	1.0010005			d1	1.1070	(LN(S/X)+(rf*T))/(sigma*racine(T))+,5*sigma*racine(T)			
10	n	30			d2	0.8948	d1 - sigma*racine(T)			
11										
12	résultat =	6.219808207			N(d1)	0.8658				
13					N(d2)	0.8146				
14										
15	Définition :				Call =	6.21	S*N(d1)-X*exp(-rf*T)*N(d2)			
16										
17	delta t= 1/n									
18	u=exp(sigma*racine(deltat))									
19	d=exp(-sigma*racine(deltat))					Simulation de la convergence de CRR vers Black et Scholes				
20	r=exp(rf*deltat)						prix CRR	B.-S.		
21	pu=(r-d)/(u-d)						6.219808207	6.21		
22	pd=1-pu					5	6.267168154	6.21		
23	combin(n,i)=n!/i!(n-i)!					10	6.232334954	6.21		
24					n	15	6.208336126	6.21		
25						20	6.203891451	6.21		
26						25	6.222950485	6.21		
27						30	6.219808207	6.21		
28										

5.2. Application V.B. du modèle CRR pour le cas d'un put américain

Dans cette section, nous présentons le calcul du prix d'une option de vente (put) sur actions sans dividendes. Le programme V.B. Excel est présenté au tableau 4.

On se rend compte rapidement que le niveau de complexité est largement supérieur pour ce cas. Cela est dû au fait que l'on doit vérifier à chaque état de la nature si l'option est en jeu ou non.

Examinons de plus près ce programme. Il comprend deux parties : *rendementoptionmilieu(état)* et *rendementoptionfin(état)*. On calcule dans un premier temps les *rendementoptionfin(état)* du début jusqu'à la fin (c'est-à-dire les *payoffs*). Par la suite, l'on part de la fin

TABLEAU 4

```
Function optionvente(S, X, rf, sig, T, n)
' Programmé par: F.E. Racicot & R. Théoret (2001/04/06)
' Calcul du prix d'une option de vente (PUT) américaine à l'aide de
l'arbre binomial CRR

delt = T / n
u = Exp(sig * Sqr(delt))
d = Exp(-sig * Sqr(delt))
r = Exp(rf * delt)

pu = (r - d) / (u - d)
pd = 1 - pu
Dim rendementoptionfin() As Double
Dim rendementoptionmilieu() As Double
ReDim rendementoptionfin(n + 1)

For état = 0 To n
rendementoptionfin(état) = Application.Max(X - S * u ^ état * d ^
(n - état), 0)
Next état

For i = n - 1 To 0 Step -1
ReDim rendementoptionmilieu(i)

For état = 0 To i
rendementoptionmilieu(état) = Application.Max(X - S * u ^ état * d
^ (i - état), pd * rendementoptionfin(état) + pu *
rendementoptionfin(état + 1))
Next état

ReDim rendementoptionfin(i)

For état = 0 To i
rendementoptionfin(état) = rendementoptionmilieu(état)
Next état
Next i
optionvente = rendementoptionmilieu(0)


End Function
```

– 1 (n – 1) jusqu'à 0 pour vérifier si l'option est en jeu et cela pour chaque état de la nature en utilisant la boucle reliée à *rendement-optionmilieu(état)*. Le résultat est *optionvente=rendementoptionmilieu(0)*.

Une application de ce programme est présentée au tableau 5.

TABLEAU 5

	A	B	C	D	E	F
1	Prog. Par : Francois-E. Racicot et R. Théoret (2001/04/06)					
2	Calcul du prix d'une option de vente américaine par l'arbre binomial CRR					
3						
4	S	30				
5	X	25				
6	rf	0.08				
7	sig	0.3				
8	T (éché. ann.)	0.5				
9	n	20		Simulation de la convergence		
10	delt=T/n	0.025		de la formule CRR pour l'option		
11	r=exp(delt*rf)	1.002002		américaine		
12					0.44027587	
13	put=	0.44027587		5	0.4911106	
14				10	0.45932855	
15				15	0.43830716	
16				25	0.45471391	
17				30	0.45013149	
18						

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons analysé plusieurs thèmes essentiels que l'on retrouve dans la littérature des produits dérivés telle l'utilisation de la loi binomiale pour déterminer les prix d'un grand nombre de catégories d'options, qui emprunte en partie aux travaux originaux de Pascal en matière de probabilité. Incidemment, cet emprunt est très peu admis dans les articles de base se rapportant aux treillis binomiaux. Notre discussion a été émaillée de nombreuses preuves des diverses formules utilisées, dont la formule du delta qui, paradoxalement, brille par son absence dans la littérature sur les produits dérivés. Un programme formulé dans le langage Visual Basic a été présenté pour déterminer les prix de calls et de puts européens et américains. Finalement, d'autres mesures de sensibilité ont été abordées, comme certaines mesures exotiques dénommées *charm*, *speed* et *color*.

Les recherches dans ce domaine semblent s'orienter vers la modélisation des prix de produits dérivés écrits sur plusieurs actifs sous-jacents. Celles-ci mettent fortement à contribution les méthodes

numériques, les solutions analytiques étant plutôt rares dans le cas des options américaines. L'intégration de la méthode des arbres binomiaux dans le calcul des prix d'actifs contingents qui comportent deux actifs sous-jacents est incidemment appelée « pyramide carrée binomiale ». À cet effet, on lira avec intérêt un article de Rubinstein (1994) paru dans le *Journal of Finance* et intitulé : « Implied Binomial Trees ». On recourt, entre autres, à une telle méthode pour évaluer une option américaine écrite sur un écart (spread), couramment appelée *rainbow option*.

ANNEXE 3.1

Rappels mathématiques : calcul différentiel

1. RAPPEL SUR LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION À UNE SEULE VARIABLE ET À PLUSIEURS VARIABLES

A. Dérivées d'une fonction à une seule variable

Dérivée d'une constante

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

Exemple :

Si c = 1, alors $\frac{dl}{dx} = 0$

Dérivée d'une puissance de x

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Exemple :

Pour n = 2 $\Rightarrow \frac{d}{dx} x^2 = 2x$

Dérivée d'une fonction de x

De façon générale, la dérivée d'une fonction de x multipliée par une constante c est égale à :

$$\frac{d}{dx} cf(x) = c \frac{d}{dx} f(x) = cf'(x)$$

Exemple :

Suppsons que $f(x) = x^2$ et que $c = 2$, alors :

$$\frac{d}{dx} 2x^2 = 2\frac{d}{dx} x^2 = 2 \times 2x = 4x$$

Dérivée d'une somme ou d'une différence de fonctions de x

Soit deux fonctions f(x) et g(x), alors :

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right) = f'(x) \pm g'(x)$$

Exemple :

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2 + x\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x\right) = 4x + 1$$

Dérivée d'un produit de fonctions de x

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \times g(x)\right) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Exemple :

Posons $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 3x^2 + 2$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left((2x+1) \times (3x^2+2)\right) &= \frac{d}{dx}(2x+1) \times (3x^2+2) + \frac{d}{dx}(3x^2+2) \times (2x+1) \\ &= 2(3x^2+2) + 6x(2x+1) \\ &= 6x^2 + 4 + 12x^2 + 6x \\ &= 18x^2 + 6x + 4\end{aligned}$$

Dérivée d'un rapport de fonctions de x

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Exemple :

Posons que $f(x) = 3x^2 + 2$ et $g(x) = 2x + 1$, alors :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+2}{2x+1}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left(3x^2+2\right)\times\left(2x+1\right) - \frac{d}{dx}\left(2x+1\right)\times\left(3x^2+2\right)}{\left(2x+1\right)^2}$$

$$= \frac{6x\left(2x+1\right) - 2\left(3x^2+2\right)}{\left(2x+1\right)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 6x - 6x^2 - 4}{\left(2x+1\right)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 6x - 4}{4x^2 + 4x + 1}$$

Dérivation en chaîne

Soit $z = f(y)$ et $y = g(x)$, $z = f(g(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = f'_y \times g'_x$$

Exemple :

Supposons $y = 2x^2 + 1$ et $z = y^2$, alors :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dy}y^2 \times \frac{d}{dx}\left(2x^2+1\right) = 2y\left(4x\right) = 2\left(2x^2+1\right)4x = 16x^3 + 8x$$

Dérivée de la fonction exponentielle

Soit la fonction exponentielle : $y = e^{f(x)}$. La dérivée de cette fonction par rapport à x est :

$$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \times f'(x)$$

Exemples :

1) Soit $y = e^{x^2}$. La dérivée de y par rapport à x est de :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} 2x \text{ où } f(x) = x^2.$$

2) Soit $y = e^x$. La dérivée de y par rapport à x est de :

$$\frac{dy}{dx} = e^x \text{ où } f(x) = x \text{ et } f'(x) = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Dérivée de la fonction logarithmique (base e)

Soit y = ln(f(x)), alors la dérivée de y par rapport à x est de :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Exemple :

Soit y = ln(x). La dérivée est de : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ où $f(x) = x$ et $f'(x) = \frac{dx}{dx} = 1$.

Dérivée d'une fonction dont l'exposant est une fonction

Soit $y = f(x)^{g(x)}$. La dérivée de y par rapport à x est de :

$$\frac{dy}{dx} = \left(f(x)\right)^{g(x)} \left(g'(x)\right) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Exemple :

Soit $y = a^x$. La dérivée de y par rapport à x est de : $\frac{dy}{dx} = a^x \ln(a)$ où f(x) est une constante égale à a et g(x) = x.

B. Dérivées partielles : fonctions à plusieurs variables

Soit $z = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, alors les dérivées partielles par rapport aux x_i s'écrivent :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

Pour simplifier, supposons que $z = f(x,y)$, alors la dérivée partielle de z par rapport à x est de :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y)$$

et la dérivée partielle de z par rapport à y est de :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$$

Exemple :

Posons $z = f(x,y) = 3x^2y + x$, alors la dérivée de f(x,y) par rapport à x est :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6xy + 1$$

et la dérivée de f(x,y) par rapport à y est de :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2$$

À remarquer que l'on dérive par rapport aux variables d'intérêt[20] et que l'on considère les autres variables comme des constantes.

20. C'est-à-dire les variables par rapport auxquelles on dérive les fonctions.

2. DÉRIVATION DE L'ÉQUATION DE FISHER AVEC TAXATION

Soit,

$$i = \frac{(1+r)(1+p^*)-1}{1-t} = \frac{(1+r)(1+p^*)}{1-t} - \frac{1}{1-t}$$

Notons que i est une fonction de r, de p* et de t : i = f(r,p*,t).

Dérivons cette expression par rapport à p* :

$$\frac{\partial i}{\partial p^*} = \frac{\partial i}{\partial (1+p^*)} \times \frac{\partial (1+p^*)}{\partial p^*}$$

Divisons le calcul en deux parties.

a) $\dfrac{\partial i}{\partial (1+p^*)}$ (on applique les règles i), v) et vi))

$$= \left(\frac{\dfrac{\partial \left[(1+r)(1+p^*) \right] (1-t)}{\partial (1+p^*)} - \dfrac{\partial (1-t)}{\partial (1+p^*)} \times (1+r)(1+p^*)}{(1-t)^2} \right) - \frac{\partial \left(\dfrac{1}{1-t} \right)}{\partial (1+p^*)}$$

(règle vi)

$$= \frac{(1+r)(1-t)-0}{(1-t)^2} - 0 = \frac{1+r}{1-t} \text{ (règles i) et v))}$$

b) $\dfrac{\partial (1+p^*)}{\partial p^*} = \dfrac{d(1+p^*)}{dp^*} = 0 + 1 = 1$ (règles i) et ii))

De a) et b), il résulte que :

$$\frac{\partial i}{\partial p^*} = \left(\frac{1+r}{1-t} \right) \times 1 = \frac{1+r}{1-t}$$

Une façon plus rapide d'effectuer le calcul de la dérivée $\frac{\partial i}{\partial p^*}$ est de considérer $\frac{1+r}{1-t}$ comme une constante désignée par c_1 et $\frac{1}{1-t}$ comme une autre constante appelée c_2.

L'expression de i s'écrit alors :

$$i = \frac{(1+r)(1+p^*)-1}{1-t} = \frac{(1+r)(1+p^*)}{1-t} - \frac{1}{1-t}$$

$$= c_1(1+p^*) - c_2 = c_1 + c_1 p^* - c_2$$

La dérivée de i par rapport à p^* est donc :

$$\frac{di}{dp^*} = c_1 = \frac{1+r}{1-t}$$

Sur ces sujets, on consultera :

Chiang, A.C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3e édition, New York, McGraw-Hill, 1984.

Sydsaeter, K. *et al.*, *Economists' Mathematical Manual*, New York, Springer, 1999.

ANNEXE 3.2

Rappels mathématiques : calcul intégral

Notes de lecture sur le manuel de : Piskounov, N. (1976), *Calcul différentiel et intégral*, *tome 1*, 7e édition, Moscou, Éditions MIR[21].

Chapitre 10
Intégrale indéfinie

Soit une fonction : F(x) et sa dérivée : f(x) = F′(x)

On peut envisager le problème inverse. Étant donné une fonction f(x), on veut trouver une fonction F(x) telle que sa dérivée soit égale à f(x) :

$$F'(x) = f(x)$$

Définition de la primitive : F(x) est une primitive de la fonction f(x) sur le segment (a,b) si en tout point de ce segment : F′(x) = f(x).

- Si la fonction f(x) admet une primitive, celle-ci n'est pas unique. D'où le théorème suivant :

Théorème : Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de la fonction f(x) sur le segment (a,b), leur différence est une constante.

Si nous connaissons une primitive quelconque F(x) de f(x), toute autre primitive de cette fonction sera de la forme : F(x) + C, où C est une constante.

Définition de l'intégrale indéfinie. On appelle intégrale indéfinie de la fonction f(x), que l'on note $\int f(x)dx$, toute expression de la forme : F(x) + C, où F(x) est la primitive de f(x). Par définition :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
$$F'(x) = f(x)$$

21. Dans cette annexe, nous fournissons en effet nos notes de lecture sur les chapitres 10 et 11 du tome 1 du *Traité de Piskounov*. Notre sélection est adaptée à la finance.

f(x) est appelée *fonction sous le signe somme* ou f*onction à intégrer* ; f(x)dx est l'expression sous le signe somme et le signe $\int$ est le *signe d'intégration* ou le *signe somme*.

Toute fonction f(x) ne possède pas une primitive, donc une intégrale indéfinie. Mais toute fonction f(x) continue sur le segment (a,b) possède une primitive.

La ***dérivée d'une intégrale indéfinie*** est égale à la fonction à intégrer, i.e. si $F'(x) = f(x)$, alors :

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$$

La ***différentielle d'une intégrale indéfinie*** est égale à l'expression sous le signe somme :

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une certaine fonction est égale à la somme de cette fonction et d'une constante arbitraire :

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Théorème. L'intégrale indéfinie de la somme algébrique de deux ou plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique de leurs intégrales :

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Théorème. On peut extraire un facteur constant de l'expression sous le signe somme :

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

Quelques règles :

* Si : $\int f(x)dx = F(x) + C$, alors : $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$

* Si : $\int f(x)dx = F(x) + C$, alors : $\int f(x + b)dx = F(x + b) + C$

* Si : $\int f(x)dx = F(x) + C$, alors : $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

Intégration par changement de variable

On veut calculer : $\int f(x)dx$

On effectue dans cette intégrale le changement suivant de variable :

$$x = \varphi(t)$$

Alors :

$$dx = \varphi'(t)dt$$

L'égalité suivante est alors satisfaite :

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right] \varphi'(t)\, dt$$

La fonction $x = \varphi(t)$ doit être choisie de manière que l'on puisse calculer l'intégrale indéfinie figurant à droite de cette équation.

Il est parfois préférable de choisir le changement de variable sous la forme $t = \psi(x)$.

Exemple :

On veut calculer : $\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$

On effectue le changement de variable suivant : $\psi(x) = t$

Alors : $\psi'(x)dx = dt$

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\psi(x)| + C$$

Autre exemple :

On veut calculer : $\int \frac{xdx}{1+x^2}$

Changement de variable : $t = 1+x^2$

$dt = 2xdx$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log t + C = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C$$

La méthode d'intégration par changement de variable est l'une des plus importantes du calcul des intégrales indéfinies.

Le succès de l'intégration dépend fréquemment de notre habileté à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.

L'étude des méthodes d'intégration se ramène à la détermination du changement de variable à effectuer pour intégrer une fonction donnée.

Intégration par parties

Soit u et v, deux fonctions dérivables de x.

La différentielle du produit uv est de :

$$d(uv) = udv + vdu$$

En intégrant cette expression :

$$uv = \int udv + \int vdu$$

ou encore :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

C'est la formule de l'intégration par parties.

On utilise cette formule pour intégrer des expressions pouvant être mises sous la forme d'un produit de deux facteurs, u et dv, quand le calcul de $\int vdu$ est plus facile que $\int udv$.

L'habileté requise pour effectuer un choix judicieux de u et dv nécessite une certaine expérience que l'on acquiert par la résolution d'exercices.

Exemple :

On veut calculer : $\int x^2 e^x dx$.

Soit $u = x^2$ et $dv = e^x dx$. Alors $du = 2xdx$ et $v = e^x$. On a :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

On applique de nouveau à cette dernière intégrale la méthode d'intégration par parties :

$u_1 = x$; $du_1 = dx$; $dv_1 = e^x dx$, $v_1 = e^x$

On a :

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

On a en définitive :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C$$

Chapitre 11
L'intégrale définie

L'intégrale définie sur le segment (a,b) est notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$

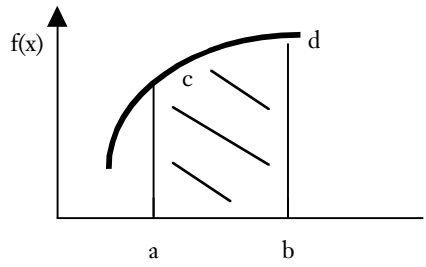
Par définition :

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i = \int_a^b f\left(x\right) dx$$

Le nombre a est la borne (limite) inférieure de l'intégrale et b, la borne supérieure. Le segment (a,b) est le segment d'intégration et x est la variable d'intégration.

L'intégrale définie est l'aire sous la fonction dans l'intervalle (a,b).

Représentation graphique de $\int_a^b f(x)\,dx$ = surface abcd



Théorème. Si la fonction f(x) est continue sur le segment (a,b), elle est intégrable sur ce segment.

L'intégrale définie dépend seulement de la fonction y = f(x) et des bornes d'intégration, et non de la variable d'intégration qu'on peut désigner par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz$$

On a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Si a = b, on pose par définition pour toute fonction f(x) :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Le calcul des intégrales définies en tant que limites de sommes intégrales fait l'objet de difficultés considérables. Il est donc naturel de chercher une méthode pratique du calcul des intégrales définies. Cette méthode, due à Newton et à Leibniz, utilise le lien entre l'intégration et la dérivation.

Propriété. On peut sortir un facteur constant de l'expression sous le signe somme :

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

L'intégrale définie de la somme algébrique de plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales des fonctions.

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Théorème de la moyenne. La fonction f(x) étant continue sur le segment (a,b), il existe sur ce segment un point ξ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

Propriété. Soit a, b et c, trois nombres arbitraires. On a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

pourvu que ces trois intégrales existent.

Formule de Newton-Leibniz

Soit x la borne supérieure et t, la variable d'intégration. On a :

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

a étant une constante, cette intégrale est fonction de sa borne supérieure x. Soit $\Phi(x)$ cette fonction :

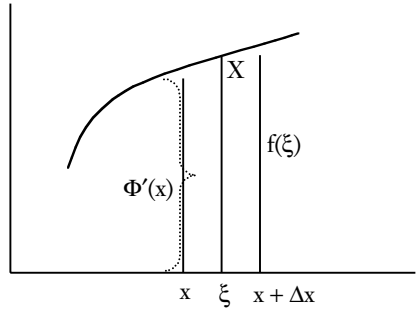
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

La **dérivée de Φ(x)** par rapport à x, *i.e.* la dérivée de l'intégrale par rapport à sa borne supérieure, est la suivante :

$$\Phi'(x) = f(x)$$

La dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure est égale à la fonction sous le signe somme dans laquelle la variable d'intégration a été remplacée par la valeur de la borne supérieure.

Interprétation géométrique de la dérivée d'une intégrale



* L'accroissement $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ est égal à l'aire (intégrale) du trapèze curviligne de base Δx et la dérivée $\Phi'(x) = f(x)$ est égale à la longueur du segment xX.

Toute fonction continue admet une primitive.

Théorème. F(x) étant une primitive de la fonction continue f(x), on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cette formule est appelée la formule de Newton-Leibniz[22].

22. Selon Piskounov, cette appellation est conventionnelle, car ni Newton ni Leibniz n'ont donné explicitement cette formule. Mais il est important de souligner que ce sont précisément Leibniz et Newton qui, les premiers, ont établi le lien entre l'intégration et la dérivation ayant permis d'énoncer une règle de calcul des intégrales définies.

On peut introduire la notation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

La formule de Newton-Leibniz fournit un moyen de calcul pratique quand on connaît une primitive de la fonction à intégrer.

Changement de variable dans une intégrale définie.

Soit :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Introduisons la nouvelle variable t par la formule :

$$x = \varphi(t)$$

Si :

1) $\varphi(\alpha) = \alpha$; $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ sont continues sur le segment (α,β)

3) $f(\varphi(t))$ est continue sur le segment (α,β)

alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

Par exemple, si on veut calculer l'intégrale :

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

par le changement de variable : $x = r\sin(t)$; $dx = r\cos(t)dt$

On détermine les nouvelles bornes :

$x = 0$ pour $t = 0$ et $x = r$ pour $t = \pi/2$

On a à la suite du changement de variable :

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\, r \cos t \; dt$$

que l'on peut dès lors solutionner plus facilement.

Intégrale impropre.

Lorsque la limite suivante :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

existe, cette limite étant appelée intégrale impropre de la fonction f(x) sur l'intervalle (a, + ∞), on la représente par :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge. Sinon, elle diverge.

Intégrales dépendant d'un paramètre. Formule de Leibniz.

Soit l'intégrale d'une f(x) dépendant du paramètre α :

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

Si le paramètre varie, la valeur de l'intégrale variera aussi. La dérivée de cette intégrale par rapport à α est la suivante :

$$I'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

C'est la formule de Leibniz.

On suppose maintenant que les bornes d'intégration a et b sont également fonction du paramètre α.

$$I(\alpha) = \Phi\left[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)\right] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

On obtient la dérivée suivante :

$$I'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_{\alpha}(x, \alpha)\, dx + f\left[b(\alpha), \alpha\right]\frac{db}{d\alpha} - f\left[a(\alpha), \alpha\right]\frac{da}{d\alpha}$$

ANNEXE 3.3

Preuve de l'équation de Black et Scholes

Supposons qu'un investisseur vende un contrat à terme de gré à gré[23] (*forward contract*) écrit sur une action dont le flux monétaire final est de S_T, une variable aléatoire. S désigne le prix de l'action et T, l'échéance du contrat. À l'échéance, le prix de ce contrat est de $E(S_T)$, où E(.) est l'opérateur d'espérance. Le vendeur du contrat s'engage à vendre l'action au prix prédéterminé X. La valeur non actualisée (V) de ce contrat est de :

$$V = E(S_T) - X \qquad (1)$$

La valeur V de ce contrat est nulle au départ. En effet, ce contrat constitue une obligation pour le vendeur de livrer l'action et pour l'acheteur de prendre livraison de l'action. Il n'y a aucune autre alternative pour les deux parties. L'acheteur n'a pas l'option d'exercer ou non le contrat. Il doit obligatoirement l'exercer à l'échéance au prix X. Il en paie donc le juste prix sans l'additionner d'une prime.

Comment se détermine $E(S_T)$, le prix du contrat à terme ? Puisque S_T est une variable aléatoire, on pourrait penser que l'on doit recourir au calcul probabiliste pour déterminer cette espérance, en l'occurrence au théorème central limite. Il n'en est rien. En fait, nous pouvons nous camper dans un univers déterministe pour calculer cette espérance, soit l'univers neutre au risque dont il fut question au chapitre 1 (section 1). En effet, le vendeur du contrat à terme a le loisir d'acheter le sous-jacent dudit contrat, soit l'action, au prix S_0 aujourd'hui. Pour financer cet achat, il emprunte au taux sans risque r_f, taux composé de façon continue. À l'échéance du contrat, il pourra livrer l'action qu'il détient et rembourser le montant de son emprunt, soit $S_0e^{r_fT}$. Le prix à terme du contrat est donc de $S_0e^{r_fT}$. C'est ce que devra payer l'acheteur du contrat à terme à son échéance. C'est le prix qu'impose l'arbitrage sur les marchés financiers. Tout autre prix donne lieu à une situation d'arbitrage.

23. Qui doit être distingué du contrat à terme boursier (*futures contract*).

Le prix que nous venons de déterminer est obtenu en recourant à la mesure de probabilité de risque neutre, c'est-à-dire :

$$E^{Q}\left(S_T\right) = e^{r_f T} S_0 \tag{2}$$

où $E^{Q}(.)$ est l'opérateur d'espérance dans un univers neutre au risque. Dans cet univers, la valeur présente de S_T est une martingale. En conformité avec les enseignements du chapitre 1, choisissons un bon comme numéraire. Nous avons :

$$E^{Q}\left(e^{-r_f T} S_T\right) = S_0 \tag{3}$$

La valeur présente de S_T est donc bien une martingale[24]. À remarquer que $E^{Q}(.)$ est une espérance conditionnelle, même si nous avons simplifié la notation. Cette espérance est conditionnelle à l'information disponible au temps 0, ici S_0.

En substituant l'équation (2) dans l'équation (1), cette dernière étant actualisée au taux r_f, on a :

$$e^{-r_f T} V = e^{-r_f T}\left(e^{r_f T} S_0\right) - e^{-r_f T} X = S_0 - e^{-r_f T} X \tag{4}$$

Comparons cette équation à celle du call européen dérivée par Black et Scholes :

$$c = S_0 N\left(d_1\right) - e^{-r_f T} X N\left(d_2\right) \tag{5}$$

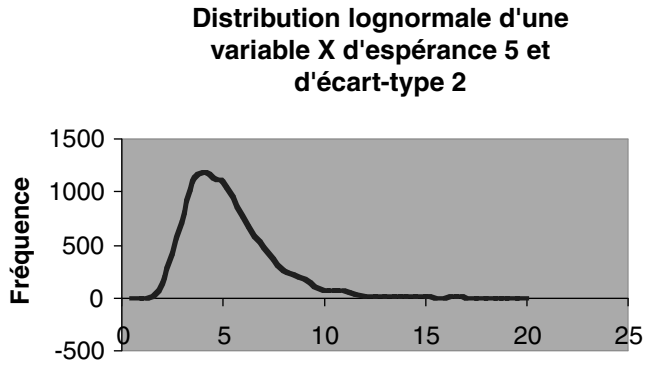
En comparant les équations (4) et (5), on voit qu'elles sont identiques si : $N(d_1) = N(d_2) = 1$. Par conséquent, un contrat à terme est une forme particulière de call. Pour un tel call, la probabilité d'exercice est en effet de 1 en ce sens que l'acheteur a l'obligation, et non l'option, d'acheter le sous-jacent du contrat. Il ne peut donc spéculer sur sa valeur qui est établie à l'avance.

---

24. Dans l'univers des probabilités réelles (P), une martingale se définit comme ceci : $E\left(S_T \middle| S_0\right) = S_0$. C'est-à-dire que la meilleure prévision de S_T, conditionnellement à l'information disponible au temps 0, est S_0, soit l'observation actuelle sur le prix de l'action.

Pour établir la preuve de l'équation de Black et Scholes, nous devons nous familiariser avec la distribution lognormale puisque l'on suppose que le prix de l'action désigné par S obéit à une telle distribution dans le modèle de Black et Scholes. Pour approcher cette distribution, nous avons, dans un premier temps, tiré 10 000 nombres aléatoires de moyenne 5 et d'écart-type 2 dont la distribution est lognormale en utilisant l'interface PopTools d'Excel. Nous avons ensuite construit le graphique de la fonction de densité de cette distribution à l'aide de la fonction *Frequency* d'Excel, graphique qui apparaît à la figure 1.

FIGURE 1

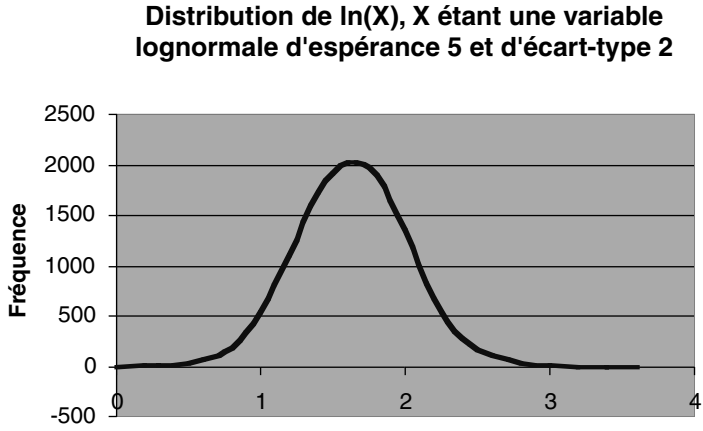


On voit que la distribution lognormale se situe exclusivement dans l'intervalle des réels positifs. Elle présente également une forte asymétrie positive.

Dans un second temps, nous avons calculé le logarithme des nombres aléatoires générés à la première passe et nous avons une fois de plus tracé la distribution correspondante, qui apparaît à la figure 2.

On se rend compte que la distribution de ln(X) est normale. D'où un premier résultat : si la distribution de la variable aléatoire X est lognormale, la distribution du logarithme de X est normale. La relation mathématique entre les distributions lognormale et normale

FIGURE 2



s'établit comme suit. La distribution D_z de la variable lognormale z s'écrit : $D_z = \frac{1}{zs\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln z-\mu)^2}{s^2}\right)}$, où lnz désigne le logarithme népérien de z et où μ et s sont les deux premiers moments de la distribution normale de lnz. Pour passer à cette dernière distribution, il suffit d'effectuer la transformation jacobienne[25] suivante :

$$D_{\ln z} = D_z \frac{dz}{d\ln z} = D_z \frac{1}{\frac{d\log z}{dz}} = D_z \frac{1}{\frac{1}{z}} = zD_z$$

ce qui implique : $D_{\ln z} = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln z-\mu)^2}{s^2}\right)}$ de telle sorte que : $\ln z \sim N(\mu, s^2)$. La différence entre les distributions normale et lognormale en est tout simplement une d'échelle, mais il faut remarquer que

25. Pour la transformation jacobienne, voir : Racicot, F.-É. et R. Théoret, *Traité d'économétrie financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, chapitre 1.

le passage de la distribution normale à la distribution lognormale se traduit par l'apparition d'une asymétrie positive[26].

Si nous calculons les deux premiers moments de la distribution de ln(X) à partir de l'échantillon des 10 000 variables aléatoires, nous trouvons que la moyenne, désignée par μ, est égale à 1,5348 et que l'écart-type, désigné par s, est de 0,3808. On rappelle que les deux premiers moments de la distribution de la variable lognormale X étaient respectivement de 5 et de 2.

On peut établir le lien entre les moments de la distribution lognormale de la variable X et ceux de la distribution normale de la variable ln(X) en recourant à la fonction génératrice des moments de la distribution lognormale. Cette fonction s'écrit comme suit : $\varphi(\lambda) = e^{\lambda\mu + \frac{\lambda^2 s^2}{2}}$, où μ et s sont les deux premiers moments de la distribution normale correspondante. Cette fonction régurgite les moments non centrés de la distribution lognormale à partir de ceux de la distribution normale. Si $\lambda = 1$, on obtient l'espérance de la variable X qui suit une distribution lognormale. Elle est donc égale à : $E(X) = e^{\mu + \frac{s^2}{2}}$. Dans l'exemple précédent, $\mu = 1{,}5348$ et $s = 0{,}3808$.

---

26. Notons que si $z \sim N(\mu, s^2)$, alors : $f_z(z) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(z-\mu)^2}{s^2}\right)}$, où $f_z(z)$ est la fonction de densité marginale de z. Sa fonction de probabilité cumulative est de : $\int_{-\infty}^{z} f_z(u)du = F_z(z)$. Transformons la fonction de densité de z de telle sorte qu'elle suive une loi normale d'espérance 0 et de variance unitaire. Soit y cette nouvelle variable. La transformation requise est la suivante : $y = \frac{z - \mu}{s}$. La transformation jacobienne des deux fonctions de densité est la suivante : $f_y(y) = f_z(z)\frac{dz}{dy}$. Comme $z = sy + \mu \Rightarrow \frac{dz}{dy} = s$. On a donc : $f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$, ce qui est la fonction de densité d'une normale d'espérance 0 et de variance 1. La probabilité cumulative de y, désignée par N(y), est de : $\int_{-\infty}^{y} f_y(u)du$.

On a donc : $E(X) = e^{1,5348+\frac{(0,3808)^2}{2}} = 4,99 \cong 5$. On rappelle que l'espérance qui nous a servi à générer la figure 1 est de 5. L'erreur minime que nous faisons en utilisant la fonction génératrice de moments en est strictement une d'échantillonnage.

Pour établir la variance non centrée de la distribution lognormale à partir des moments de la distribution normale, nous fixons λ à 2 dans la fonction génératrice des moments de la lognormale. Nous obtenons : $E(X)^2 = e^{2\mu+2s^2}$. Pour calculer la variance de X, nous nous servons du résultat : $VAR(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$, E(X) ayant déjà été calculé. Nous obtenons : $VAR(X) = e^{2\mu+2s^2} - e^{2\mu+s^2} = e^{2\mu+s^2}\left[e^{s^2} - 1\right]$. L'écart-type de X est donc de : $s = e^{\mu+\frac{s^2}{2}}\left[e^{s^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} = E(X)\left[e^{s^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$. En utilisant la moyenne et l'écart-type calculés à partir de la distribution de ln(X), on obtient : $s = 4,99\left[e^{(0,3808)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} = 1,97 \cong 2$. On rappelle que l'écart-type qui nous a servi à établir la distribution de X (figure 1) est de 2. L'erreur que nous commettons ici en est, encore une fois, strictement une d'échantillonnage.

Notons que si la densité lognormale de la variable X est la fonction f(x), alors l'espérance E(X) de cette distribution se calcule mathématiquement comme suit : $E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx$, les bornes de l'intégrale correspondant à l'intervalle de fluctuation de la lognormale. En représentant par u le logarithme de x, on peut aussi calculer cette espérance de la façon suivante : $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^u g(u)du$, où g(u) est la densité normale et où les bornes de l'intégrale correspondent à l'intervalle de fluctuation de la normale. C'est en recourant à cette transformation que nous calculerons les intégrales contenant des variables lognormales dans la preuve qui suit, la distribution normale étant plus malléable que la lognormale. Notons également que si X suit une distribution lognormale et que les deux premiers moments

de la distribution de ln(X) sont de μ et s, alors la variable centrée réduite $\frac{\ln(X) - \mu}{s} \sim N(0,1)$. Nous ferons également appel à ce résultat dans la preuve qui suit[27].

Nous supposons donc que S obéit à une distribution lognormale et que l'espérance et l'écart-type de ln(S) sont représentés respectivement par μ et s comme dans le cas précédent. Nous avons alors pour un call européen[28] :

$$E(S - X)^+ = E(S)N(d_1) - XN(d_2) \qquad (6)$$

où $(S - X)^+$ est le flux monétaire final (*payoff*) du call, avec $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) + \frac{s^2}{2}}{s}$, $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) - \frac{s^2}{2}}{s} = d_1 - s$ et où E(.) est l'opérateur d'espérance. Nous voulons prouver cette formule.

Définissons f(S) comme étant la fonction de densité de S. Par définition, l'espérance de $(S - X)^+$ est donnée par :

$$E(S - X)^+ = \int_X^{\infty} (S - X)\, f(S)dS \qquad (7)$$

où X est la borne inférieure de l'intégrale puisque l'option européenne sera exercée à l'échéance si et seulement si (S > X), c'est-à-dire que $\int_0^X (S - X)\, f(S)dS < 0$. C'est là le risque asymétrique que comporte un call. Son détenteur n'est pas forcé d'exercer comme c'est le cas dans le contrat à terme antérieur. Il exercera son option à l'échéance si et seulement si (S > X). L'option ne saurait donc rapporter des flux monétaires négatifs comme dans le cas d'un contrat à

27. Le manuel de De la Granville renferme deux excellents chapitres sur les propriétés de la loi lognormale et sur ses rapports avec le mouvement brownien géométrique, soit les chapitres 13 et 16. Voir : De la Granville, Olivier (2001), *Bond Pricing and Portfolio Analysis*, The MIT Press.

28. Notre approche s'inspire de Hull. Mais nous y avons apporté plusieurs nuances. Voir Hull, J.C. (2003), *Options, Futures and Other Derivatives*, 5e édition, Prentice Hall.

terme. C'est pourquoi la distribution de $(S - X)^+$ est tronquée et comporte X comme borne inférieure. Avant cette borne, $(S < X)$ et le détenteur de l'option n'exerce pas.

Du fait des propriétés de la loi lognormale examinées antérieurement, nous savons que :

$$E(S) = e^{\mu + \frac{s^2}{2}} \tag{8}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\ln[E(S)] = \mu + \frac{s^2}{2} \tag{9}$$

ce qui implique que :

$$\mu = \ln[E(S)] - \frac{s^2}{2} \tag{10}$$

De façon à obtenir une variable centrée réduite, nous pouvons appliquer la transformation suivante à ln(S) : $z = \frac{\ln(S) - \mu}{s}$. Cette transformation implique que $zs + \mu = \ln(s)$, c'est-à-dire $S = e^{zs+\mu}$. La variable z est normalement distribuée, d'espérance nulle et d'écart-type unitaire. Sa fonction de densité, *i.e.* la distribution normale standard, est donnée par : $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$. En recourant à cette transformation, nous pouvons réécrire l'espérance ci-dessus comme suit :

$$E(S - X)^+ = \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} (e^{zs+\mu} - X) f(z) dz \tag{11}$$

où la borne inférieure provient de la transformation de S en variable centrée réduite. Par symétrie, nous devons en effet appliquer la même transformation à X. On peut réécrire cette intégrale comme suit :

$$E(S - X)^+ = \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} e^{zs+\mu} f(z) dz - X \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} f(z) dz \tag{12}$$

Développons l'intégrand de la première intégrale de l'équation (12) :

$$\begin{aligned} e^{zs+\mu} f(z) &= e^{zs+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(zs+\mu-\frac{z^2}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu+\frac{s^2}{2}} e^{\frac{-(z-s)^2}{2}} \\ &= e^{\mu+\frac{s^2}{2}} f(z-s) \end{aligned} \qquad (13)^{29}$$

Par conséquent :

$$E(S-X)^+ = e^{\mu+\frac{s^2}{2}} \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} f(z-s)dz - X\int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} f(z)dz \qquad (14)$$

En définissant N(x) comme étant la probabilité qu'une variable normale standard soit plus petite que x, alors la première intégrale peut être représentée par $1 - N(f(z - s)) = 1 - N\left(\frac{\ln(X) - \mu}{s} - s\right)$.

Ouvrons ici une parenthèse. Nous savons que la loi normale est symétrique. Par définition : $N(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$. Par symétrie, nous avons alors que : $1 - N(x) = \int_{x}^{\infty} f(z)dz$. Ce qui justifie la transformation de la première intégrale impropre.

---

29. Puisque $\mu + \frac{s^2}{2} - \frac{(z-s)^2}{2} = \mu + \frac{s^2}{2} - \left[\frac{z^2 - 2zs + s^2}{2}\right] = \mu + \frac{s^2}{2} - \frac{z^2}{2} + zs - \frac{s^2}{2}$

$= \mu + zs - \frac{z^2}{2}$. On s'est aussi servi du résultat : $f(z-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-s)^2}{2}}$.

Nous savons également que $N(-x) = 1 - N(x)$.

D'où, $1 - N\left(\frac{\ln(X) - \mu}{s} - s\right) = N\left(\frac{-\ln(X) + \mu}{s} + s\right)$.

Puisque $\mu = \ln\left[E(S)\right] - \frac{s^2}{2}$, on trouve que :

$$N\left(\frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) + \frac{s^2}{2}}{s}\right) = N(d_1) \tag{15}$$

La deuxième intégrale s'élabore de la même manière et l'on obtient $N(d_2)$.

On trouve donc que :

$$E(S - X)^+ = e^{\mu + \frac{s^2}{2}} N(d_1) - XN(d_2) \tag{16}$$

où $e^{\mu + \frac{s^2}{2}} = E(S)$. Il est à remarquer que μ, soit l'espérance de $\ln(S)$, est toujours présent dans l'équation (16). On sait qu'une variable très rapprochée de cette espérance, soit $E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right]$, est le rendement espéré du prix de l'action, une variable difficile à estimer puisqu'elle incorpore une prime de risque, et par conséquent le prix du risque. Un déplacement dans l'univers neutre au risque nous permettra d'effacer ces variables gênantes.

Pour compléter la preuve, situons-nous donc dans un univers neutre au risque et supposons un call (c) écrit sur une action S_T qui ne paie pas de dividende et qui échoit à T. Le taux sans risque est désigné par r_f et la volatilité du rendement de l'action, par σ.

On a vu au chapitre 1 que dans un tel univers :

$$c = e^{-r_f T} E^Q(S_T - X)^+ = e^{-r_f T}\left[E^Q(S_T)N(d_1) - XN(d_2)\right] \tag{17}$$

Comme S_T est une martingale dans un univers neutre au risque, on peut écrire en vertu de l'équation (3)[30] :

$$E^Q(S_T) = e^{r_f T} S_0 \tag{18}$$

On a finalement :

$$c = e^{-r_f T}\left[S_0 e^{r_f T} N(d_1) - X N(d_2)\right] = S_0 N(d_1) - X e^{-r_f T} N(d_2) \tag{19}$$

soit l'équation de Black et Scholes.

---

30. Dubois et Girerd-Potin (2001) fournissent une preuve de cette équation. Nous en présentons ici une version détaillée. Comme le prix de l'action obéit à un processus brownien géométrique, il admet, comme nous le savons, la solution exacte suivante : $S = S_t e^{\left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t}$ où $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. On veut évaluer l'intégrale suivante : $E^Q\left(S_{t+\Delta t}\right) = \int_0^\infty S f(S)\, dS$. Pour évaluer cette intégrale, il suffit d'effectuer le changement de variable qui suit. Comme l'indique la formule de S, le logarithme de S suit une loi normale : $N\left(\left(r - 1/2\sigma^2\right) t; \sigma^2 t\right)$. Définissons la variable centrée réduite suivante : $y = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{S_t}\right) - \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$. En fait, cette variable, qui nous sert ici à transformer l'intégrale, est la variable aléatoire ε de la fonction S. Puisque $\varepsilon \sim N(0,1)$, sa fonction de densité est donc de : $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Pour exprimer la distribution de S en fonction de cette variable, il suffit d'exprimer la transformation jacobienne suivante : $f(S) = \dfrac{dy}{dS} f(y) = \dfrac{1}{\sigma S\sqrt{\Delta t}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Nous rappelons que nous voulons calculer l'espérance neutre au risque de S en changeant la variable S par la variable y. Nous venons d'exprimer f(S) en fonction de y. L'expression de S en fonction de y est immédiate puisque c'est le terme ε de cette fonction. Pour exprimer dS en termes de dy, on isole y dans l'équation de S. On obtient : $y = \varepsilon = \dfrac{\ln(S / S_0) - \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$; $dy = \dfrac{1}{\sigma S\sqrt{\Delta t}} dS \rightarrow dS = \sigma S\sqrt{\Delta t} dy$. On a donc toutes les données requises pour résoudre l'intégrale en cause en changeant la variable S par la variable y.

$$E^Q\left(S_{t+\Delta t}\right) = \int_0^\infty S \times f(S) \times dS = \int_{-\infty}^{\infty} S_t e^{\sigma\sqrt{\Delta t} y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} \times \frac{1}{\sigma S\sqrt{\Delta t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \times \sigma\sqrt{\Delta t} S dy$$

Selon l'équation (15), d_1 est égal à, sachant que $s = \sigma\sqrt{T}$:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) + \frac{s^2}{2}}{s} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{e^{r_f T} S_0}{X}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\left(e^{r_f T} S_0\right) - \ln(X) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{r_f T + \ln(S_0) - \ln(X) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned} \qquad (20)$$

À remarquer que la variable y, égale à ε, fluctue dans l'intervalle : $[-\infty, +\infty]$. Ce qui se ramène à : $E^Q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} S_t e^{\sigma\sqrt{\Delta t}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} dy$.

On a : $E^Q = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \sigma\sqrt{\Delta t}y} dy$.

En complétant le carré dans l'exposant de l'intégrale, on trouve :

$E^Q = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{\Delta t}y)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} dy$.

$E^Q = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{\Delta t}y)^2} dy$.

$E^Q = S_t e^{r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)y\right)^2} dy$.

La transformation linéaire de l'exposant n'affectant pas la probabilité cumulative, on a, puisque la probabilité cumulative sous la normale standard est de 1 : $E^Q\left(S_{t+\Delta t}\right) = S_t e^{r\Delta t}$, ce qui est le résultat recherché. La valeur présente du prix de l'action est bien une martingale dans l'univers neutre au risque quand ce prix suit un processus lognormal. On trouvera une version abrégée de cette preuve dans : Dubois, M. et I. Girerd-Potin (2001), *Exercices de théorie financière et de gestion de portefeuille*, Bruxelles, De Boeck Université. Pour la transformation jacobienne d'une distribution, on consultera : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001), *Traité d'économétrie financière*, *op. cit.*, chap. 1. Pour une autre preuve de ce résultat, voir : De la Granville, O. (2001), *Bond Pricing and Portfolio Analysis*, MIT Press, chap. 16.

On a finalement :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + r_f T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{21}$$

qui peut être aussi réécrit comme :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + r_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \tag{22}$$

Comme on vient de le constater, la preuve de l'équation de Black et Scholes exige certaines connaissances en statistique. Elle requiert une bonne compréhension des distributions normale et lognormale et des opérations qui leur sont associées. Elle requiert également une maîtrise de l'univers neutre au risque et de la notion de martingale. Nous avons eu à cœur, dans la preuve qui précède, de n'escamoter aucune de ces notions de base en ingénierie financière.

Il existe d'autres façons de prouver la formule de Black et Scholes. L'une d'elles solutionne directement l'équation différentielle de Black et Scholes, examinée au chapitre 1, plutôt que de recourir à la notion d'espérance neutre au risque comme pour la preuve que nous venons de fournir. À l'aide de changements de variables, on en arrive à transformer l'équation différentielle de Black et Scholes en équation de la chaleur, dont la solution est connue depuis bien longtemps.

ANNEXE 3.4

Démonstration mathématique du delta

Dans cet appendice, nous fournissons la dérivation de la formule du delta d'un call européen[31]. En vertu de la formule de B-S, la valeur d'un call européen est égale à :

$$C(S,t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

où $$d_1 = \left(\ln(S / X) + (r + 1 / 2\sigma^2)(T - t)\right) / \sigma\sqrt{(T - t)}$$

$$d_2 = \left(\ln(S / X) + (r - 1 / 2\sigma^2)(T - t)\right) / \sigma\sqrt{(T - t)}\,.$$

Le delta d'un call, qui est la dérivée partielle du call par rapport au prix de l'action p, est donné par :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S\frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - Xe^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}N(d_2)$$

$$= N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Xe^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

où $\dfrac{\partial d_1}{\partial S} = \dfrac{1 / S}{\sigma\sqrt{(T - t)}}$, $\dfrac{\partial d_2}{\partial S} = \dfrac{1 / S}{\sigma\sqrt{(T - t)}}$. Cela implique

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + \left[SN'(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N'(d_2)\right]\frac{1}{S\sigma\sqrt{(T - t)}}$$

Pour compléter la preuve, il nous reste à démontrer que : $SN'(d_1) = Xe^{-r(T-t)}N'(d_2)$. Il nous faut donc calculer la dérivée partielle de $N(d_1)$ et de $N(d_2)$. Calculons ces dérivées.

---

31. Nous nous inspirons des documents suivants : Black, F. et M. Scholes (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, mai-juin, p. 637-659 ; Galai, D. et R. Masulis (1976), « The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock », *Journal of Financial Economics*, January-March, p. 53-82 ; Wilmott *et al.* (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge, Cambridge University Press, chap. 5.

Nous savons que : $N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$, $N(-\infty) = 0$, $N(+\infty) = 1$

et que la dérivée d'une intégrale bornée est la primitive évaluée à ses bornes[32]. Alors :

$$N'(d_1) = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_1)^2/2}$$

$$N'(d_2) = \frac{\partial N(d_2)}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_2)^2/2}$$

Pour faciliter les calculs, considérons la représentation suivante :

$$S \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = Xe^{-r(T-t)}$$

de l'équation dont on doit prouver l'égalité. En remplaçant les N(.) par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$Se^{1/2(d_2^2 - d_1^2)} = Xe^{-r(T-t)}$$

$$\Rightarrow Se^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[\begin{matrix}(\ln(S/X)^2 + (r - 1/2\sigma^2)^2 (T-t)^2 + 2(r - 1/2\sigma^2)(T-t)\ln(S/X)) - (\ln(S/x)^2 \\ + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)^2 + 2(r + 1/2\sigma^2)(T-t)\ln(S/X)\end{matrix}\right]}$$

$$= Se^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[\begin{matrix}r^2(T-t)^2 - r\sigma^2(T-t)^2 + 1/4\sigma^4(T-t)^2 + 2r\ln(S/X)(T-t) - \sigma^2)(T-t)\ln(S/X) \\ -r^2(T-t)^2 - 1/4\sigma^4)(T-t)^2 - r\sigma^2(T-t)^2 - 2r\ln(S/X)(T-t)\end{matrix}\right]}$$

$$\times e^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[-\sigma^2(T-t)\ln(S/X)\right]}$$

$$= Se^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[-2\sigma^2(T-t)\ln(S/X) - 2r\sigma^2(T-t)^2\right]}$$

$$\Rightarrow Se^{-\left[\ln(S/X) + r(T-t)\right]} \stackrel{?}{=} Xe^{-r(T-t)}$$

---

32. Exemple : $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x ydy\right) = x$ parce que $\int_0^x ydy = y^2/2 + c\Big|_0^x = x^2/2$ et donc $\frac{d}{dx} x^2/2 = x$.

Finalement, en prenant le logarithme de chaque membre de cette dernière relation, on a :

$$\ln S - \ln(S / x) - r(T - t) = \ln X - r(T - t)$$
$$\Rightarrow \ln S - \ln X = \ln(S / X)$$

Il résulte que :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \text{ QED.}$$

Les autres mesures de sensibilité que nous présentons ci-après sont également associées au modèle de Black-Scholes (1973)[33].

Dans le modèle de B.-S., le delta du put se définit comme suit :

$$\Delta_p = \Delta_c - 1$$

où $\Delta_c = N(d_1)$.

Le gamma du call est la dérivée seconde partielle par rapport au prix de l'actif financier sous-jacent :

$$\Gamma_c = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{(\partial S)^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} n(d_1)$$

où $n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}d_1\right)}$. Le gamma du put est le même que celui du call et est donné par :

$$\Gamma_p = \frac{\partial \Delta_p}{\partial S} = \frac{\partial^2 put}{(\partial S)^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} n(d_1)$$

Le theta du call est la dérivée partielle de l'option par rapport au temps restant jusqu'à l'échéance :

$$\Theta_c = \frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{S\sigma n(d_1)}{2\sqrt{T}} + r_f X e^{-r_f T} N(d_2)$$

33. Pour les mesures des autres modèles fréquemment rencontrées dans la littérature, on consultera : Bryis, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives : Theory, Application and Practice*, New York, Wiley, Frontiers in Finance, chap. 6.

S'agissant du put, le theta est évalué par :

$$\Theta_c = \frac{\partial put}{\partial T} = -\frac{S\sigma n(d_1)}{2\sqrt{T}} + r_f X e^{-r_f T} N(-d_2)$$

Le vega du call est défini par :

$$v_c = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\, n(d_1)$$

Cette mesure sert à évaluer la sensibilité du call en regard de la volatilité. Quant au vega du put, il est donné par :

$$v_p = \frac{\partial put}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\, n(d_1)$$

résultat identique au vega du call.

La dérivée partielle du call par rapport au taux d'intérêt, soit Rho, est donnée par :

$$Rho_c = \frac{\partial C}{\partial r_f} = X(t^* - t)e^{r_f t^*} n(d_2)$$

où t est le temps présent (courant) et t*, l'échéance. La valeur du Rho, pour le cas du put, est donnée par :

$$Rho_p = \frac{\partial put}{\partial r_f} = -X(t^* - t)e^{r_f t^*} n(d_2)$$

L'élasticité du call nous donne une mesure du changement en pourcentage du prix de l'option d'achat par rapport à une augmentation de 1 % du prix du sous-jacent. Cette valeur s'exprime :

$$Elas_c = \frac{\partial C / C}{\partial S / S} = S\frac{\Delta_c}{C} = \frac{S}{C} N(d_1)$$

L'élasticité du put est donnée par :

$$Elas_p = \frac{\partial put / put}{\partial S / S} = S\frac{\Delta_p}{put} = \frac{S}{put}\left(N(d_1) - 1\right)$$

Finalement, les mesures exotiques appelées *charm*, *speed* et *color* sont données par :

$$\text{Charm} = \frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

$$\text{Speed} = \frac{\partial \Gamma}{\partial S}$$

$$\text{Color} = \frac{\partial \Gamma}{\partial (T - t)}$$

La mesure *charm* est généralement utilisée pour mesurer la vitesse de changement du delta d'une journée à l'autre. La mesure *speed* sert à évaluer l'impact sur gamma d'un changement dans le prix de l'actif sous-jacent et enfin, *color* sert à quantifier l'impact sur gamma du temps restant jusqu'à l'échéance.

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. et Z. WEINER (1997), « Binomial Option Pricing : The Black-Scholes Option Pricing Formula, and Exotic Options », *Mathematica in Research and Education*, vol. 6, n° 4.

BENNINGA, S. et Z. WEINER (1997), « The Binomial Option Pricing Model », *Mathematica in Research and Education*, vol. 6, n° 3.

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

BLACK, F. et M. SCHOLES (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, mai-juin, p. 637-659.

BRYIS, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives : Theory, Application and Practice*, New York, Wiley Frontiers in Finance.

COPELAND, T.E. et J.F. WESTON (1988), *Financial Theory and Coporate Policy*, 3e édition, New York, Addison-Wesley.

COX, J.C., S.A. ROSS et M. RUBINSTEIN (1979), « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, p. 229-263.

DAMODARAN, A. (1996), *Investment Valuation : Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*, New York, Wiley.

DORDAIN, J.N. et S. SINGH (1999), *Finance Quantitative*, Paris, Economica.

GALAI, D. et R. MASULIS (1976), « The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock », *Journal of Financial Economics*, janvier-mars, p. 53-82.

GIBSON, R. (1990), *Option Valuation : Analyzing and Pricing Standardized Option Contracts*, New York, McGraw-Hill.

HULL, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle River (N.J.), Prentice Hall.

JENSEN, A. (1954), *A Distribution Model Applicable to Economics*, Copenhague, Munksgaard.

KHOURY, N. et P. LAROCHE (1995), *Options et contrats à terme*, Sainte-Foy, Presses de l'Université Laval.

MEGGINSON, W. (1997), *Corporate Finance Theory*, New York, Addison-Wesley.

MERCIER, G. et R. THÉORET (1997), *Traité de gestion financière : une perspective québécoise et canadienne*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

NEFTCI, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, New York, Academic Press.

RACICOT, F.É. et R. THÉORET (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

RACICOT, F.É. et R. THÉORET (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

RUBINSTEIN, M. (1994), « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, p. 771-818.

WILMOTT *et al.* (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge (R.-U.), Cambridge University Press.

CHAPITRE

4

LES ASPECTS THÉORIQUES DE LA CONSTRUCTION DE L'ARBRE BINOMIAL DE TAUX D'INTÉRÊT DU MODÈLE DE BLACK, DERMAN ET TOY

SOLUTION À L'AIDE DU SOLVEUR D'EXCEL

Les théories traditionnelles de la structure à terme des taux d'intérêt sont fort connues. C'est Irving Fisher qui, en 1896, proposa la première théorie de la structure à terme des taux d'intérêt : la théorie des anticipations. Selon cette théorie, les taux à terme (*forward rates*) sont des estimateurs non biaisés des taux prévus auxquels ils sont associés. John Hicks, en 1946, a contesté cette théorie. Pour lui, les taux à terme sont des estimateurs biaisés des taux à venir. Selon Hicks, les taux à terme sont égaux à l'expression suivante :

$$\text{taux à terme} = \text{taux prévu} + \text{prime de risque}^{1}$$

c'est-à-dire :

$$f_{t+1} = E\left(r_{t+1}\right) + \text{prime de risque}$$

où f_{t+1} désigne le taux à terme d'un an qui est défini pour la période $t + 1$; r_{t+1}, le taux au comptant qui lui est associé à la période $t + 1$ et $E(r_{t+1})$, l'espérance mathématique de ce taux. Le taux à terme comporte donc un biais mesuré par la prime de risque du taux.

Les taux à terme sont donc plus importants que les taux prévus. Des primes de risque s'ajoutent aux taux prévus dans le calcul des taux à terme. Pour Hicks, cette prime de risque est une prime de liquidité.

1. Cette prime de risque peut être estimée par un modèle GARCH-M.

Ce biais que comportent les taux à terme est-il gênant pour déterminer les prix des produits dérivés dont les cash-flows sont fortement conditionnés par les fluctuations des taux d'intérêt ? Pour répondre à cette question, il faut se rappeler que les produits dérivés sont évalués dans un univers neutre au risque. Les prix de ces produits sont donc calculés en actualisant l'espérance mathématique de leurs cash-flows au taux sans risque. Dans un tel univers, on peut démontrer que les taux à terme sur les contrats boursiers sont des estimateurs non biaisés des taux au comptant (spot) futurs correspondants, c'est-à-dire[2] :

$$f_{t+1} = E\left(r_{t+1}\right)$$

On peut donc dans cet univers se servir des taux à terme pour actualiser les cash-flows des produits dérivés sur taux d'intérêt qui ne sont pas conditionnés par la dynamique des taux d'intérêt[3]. Par exemple, Black[4] a ajusté le modèle de Black et Scholes pour qu'il puisse servir à déterminer les prix d'un grand nombre d'options européennes sur taux d'intérêt, dont les options d'achat et de vente sur obligations, des caps et des floors, par exemple.

Mais parce qu'elles peuvent être exercées en tout temps jusqu'à leur échéance, les options américaines sur taux d'intérêt sont fortement conditionnées par l'évolution des taux d'intérêt : le modèle de Black ne convient plus pour les évaluer. Force était de développer des modèles de structure à terme de taux d'intérêt qui décrivent l'évolution future des taux d'intérêt.

Cette nouvelle vague de modèles de la structure à terme des taux d'intérêt est apparue dans un article de Merton, qui, en 1974, a proposé un modèle d'équilibre de la structure à terme des taux d'intérêt[5].

---

2. La théorie des anticipations de la structure à terme des taux d'intérêt est donc alors valide.
3. En anglais, les produits dérivés qui sont conditionnés par la dynamique des taux d'intérêt sont dits *path-dependent*.
4. Black, F. (1976), « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, mars, p. 157-179.
5. Merton, R.C. (1974), « On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, vol. 29, n° 2, mai, p. 449-470.

À la suite de cette percée, les modèles de la structure à terme des taux d'intérêt ont pris deux tangentes : les modèles d'équilibre[6] et les modèles basés sur l'absence d'arbitrage.

Le modèle le plus connu dégageant une structure à terme d'équilibre sur les marchés financiers est celui de Cox, Ingersoll et Ross, publié en 1985[7]. Les modèles d'équilibre de la structure à terme des taux d'intérêt sont toutefois difficiles à estimer. Il est en effet difficile d'évaluer les paramètres entrant dans la détermination des taux d'intérêt d'équilibre.

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle basé sur l'absence d'arbitrage[8], soit celui de Black, Derman et Toy. Dans un premier temps, nous présentons de façon détaillée ce modèle, pour ensuite considérer la mise en forme de l'arbre de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy à l'aide du solveur d'Excel.

1. Le modèle de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy[9]

Les modèles de la structure à terme des taux d'intérêt basés sur l'absence d'arbitrage prennent comme point de départ la structure à terme des taux d'intérêt qui est observée au moment de la prévision des taux, alors que ce n'est pas le cas pour les modèles d'équilibre. Les modèles d'arbitrage doivent pouvoir reproduire les prix actuels des obligations qui prévalent sur les marchés financiers. Pour introduire ces modèles d'arbitrage, nous recourons au modèle de Black, Derman et Toy, publié en 1990[10].

---

6. Pour un bon exposé des modèles d'équilibre de la structure à terme des taux d'intérêt, voir : Bisière, C. (1997), *La structure par terme des taux d'intérêt*, Paris, Presses universitaires de France, troisième partie.

7. Cox, J., J. Ingersoll et A. Ross (1985), « An Intertemporal General Equilibrium of Asset Prices », *Econometrica*, vol. 53, n° 2, mars, p. 363-384.

8. Rappelons ici les conditions de l'absence d'arbitrage. On dira qu'il y a absence d'arbitrage si tout réaménagement sans risque d'un portefeuille et sans nouvel apport de fonds se traduit par un taux de rendement nul.

9. Cette section s'inspire de : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

10. Black, F., E. Derman et W. Toy (1990), « A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options », *Financial Analysts Journal*, janvier-février, p. 33-39.

Le modèle de Black, Derman et Toy (BDT) est un modèle monofactoriel. Il ne vise à expliquer qu'une variable : le taux d'intérêt à court terme. Ce taux détermine par la suite toute la structure à terme des taux d'intérêt. Les modèles bifactoriels comportent également une équation différentielle stochastique pour « le » taux à long terme[11].

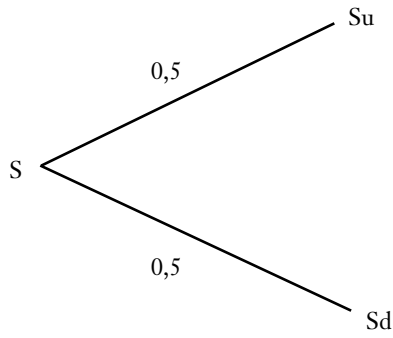
La structure actuelle des taux d'intérêt sur les obligations à coupon zéro (taux *spot*) de même que la volatilité observée[12] des taux d'intérêt de diverses échéances constituent les inputs du modèle de la structure à terme des taux d'intérêt. Le modèle vise à déterminer les taux d'intérêt prévus au cours des périodes subséquentes. Ces taux devront, entre autres, permettre de reproduire les prix actuels des obligations. C'est-à-dire que l'actualisation des cash-flows des obligations à ces taux sera égale aux prix actuels des obligations, soit ceux qui sont observés sur les marchés financiers. Les taux prévus serviront également à calculer les prix d'options sur obligations, options d'achat (call) ou options de vente (put). C'est là l'essence des modèles basés sur l'absence d'arbitrage, phénomène que nous préciserons ultérieurement.

1.1. Calcul du prix d'une obligation à coupon zéro

Le modèle de BDT se situe dans le cadre d'un arbre binomial (*binomial tree*), dit encore treillis binomial (*binomial lattice*)[13]. Cet arbre se construit comme suit. Soit S le prix actuel d'une obligation. D'ici un an, le prix de cette obligation peut soit augmenter à S_u (u pour ***u**p*), soit diminuer à S_d (d pour ***d**own*). La probabilité d'un mouvement

11. Voir Bisière, *op. cit.*, deuxième partie.
12. Mesurée par l'écart-type des taux d'intérêt.
13. Notons ici que les équations différentielles décrivant les prix des options autres que celle du modèle de Black et Scholes n'admettent habituellement pas de solution analytique. Il faut donc les résoudre à partir de méthodes numériques ou en recourant à des simulations Monte Carlo ou au *bootstrapping*. Le treillis binomial est la plus simple des méthodes numériques.

FIGURE 1



haussier est égale, par hypothèse, à la probabilité d'un mouvement baissier, soit 0,5[14]. La figure 1 décrit les mouvements attendus du prix de l'obligation d'ici un an.

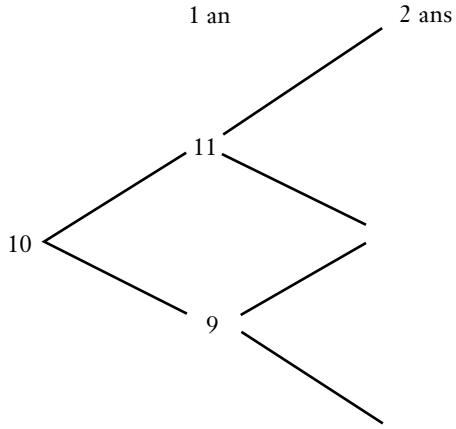
Le taux d'intérêt spot d'un an est égal à r. Le prix actuel de l'obligation, soit S, est donc égal à :

$$S = \frac{0,5S_u + 0,5S_d}{1 + r}$$

Nous avons pu relier le prix actuel d'une obligation aux prix qui prévaudront dans un an. De même pouvons-nous relier les prix d'une obligation dans un an aux prix qui prévaudront dans deux ans. De cette façon, on peut relier le prix actuel d'une obligation aux prix qui prévaudront dans deux ans.

14. On fixe la probabilité à 0,5 par souci de simplification. Notons ici que nous nous situons ici dans un univers neutre au risque. Les probabilités ne sont pas des probabilités au sens classique du terme mais des probabilités « ajustées pour le risque ». On passe donc d'un univers où il existe de l'aversion pour le risque à un univers neutre au risque pour calculer les prix des options. Le théorème de Girsanov permet d'effectuer un tel passage. Pour un exposé plus élaboré de cette procédure, voir : Neftci, S. (2000), *An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2e édition, San Diego, Academic Press.

FIGURE 2 **Évolution des taux d'intérêt à court terme**



La figure 2 représente un arbre de taux d'intérêt pour 2 ans. Le taux d'intérêt à court terme (1 an) est présentement de 10 %. Il peut soit augmenter à 11 % d'ici à un an, soit diminuer à 9 %[15]. Ces mouvements sont équiprobables.

On peut maintenant construire l'arbre de l'évolution des prix d'une obligation à 2 ans. Cette obligation à coupon zéro vaudra 100 $ dans deux ans, quel que soit l'état de la nature[16]. Cette obligation ne présente donc aucun risque. Dans un an, le prix de cette obligation sera de :

$$\frac{100}{1{,}11} = 90{,}09\,\$$$

si les taux d'intérêt montent à 11 %. Si les taux d'intérêt diminuent à 9 %, il sera de :

$$\frac{100}{1{,}09} = 91{,}74\,\$$$

15. Nous spécifierons ultérieurement comment déterminer ces taux d'intérêt.

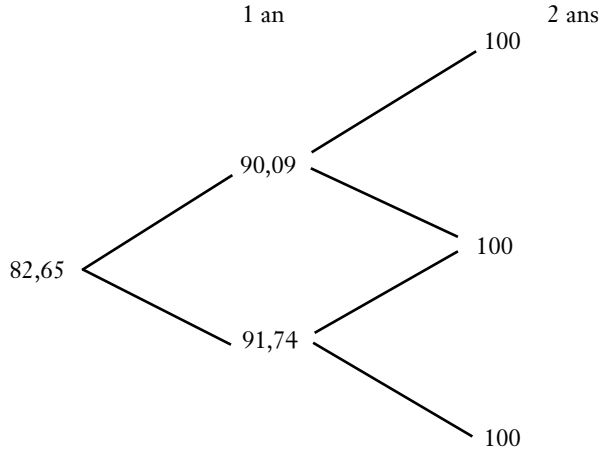
16. Comme elle arrivera alors à échéance, elle vaudra sa valeur nominale, ici établie à 100 $. C'est le montant que l'obligation à coupon zéro promet de livrer à son échéance.

Le prix actuel de l'obligation à 2 ans, soit, S, est la valeur espérée de ces deux prix, actualisée au taux actuel de 10 % :

$$\frac{(0,5 \times 90,09) + (0,5 \times 91,74)}{1,10} = 82,65\,\$$$

L'arbre de l'évolution du prix de l'obligation à 2 ans est le suivant :

FIGURE 3 **Évolution temporelle du prix de l'obligation à 2 ans**



On peut de la sorte déterminer le prix de toute obligation à coupon zéro de n'importe laquelle échéance en autant que l'arbre de taux d'intérêt aille assez loin dans l'avenir.

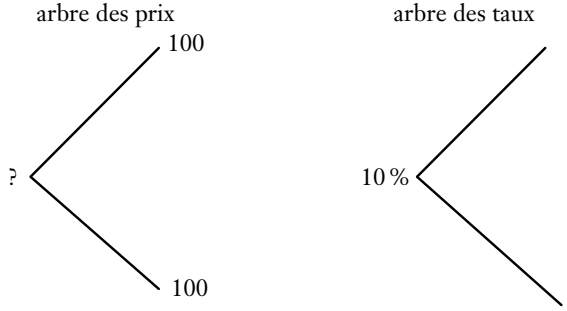
1.2. Détermination de la structure à terme des taux d'intérêt

La structure à terme des taux d'intérêt est habituellement exprimée en termes de rendements à l'échéance, plutôt qu'en termes de prix. Le rendement à l'échéance y d'une obligation à coupon zéro qui

promet de payer 100 $ à son échéance dans N années est le taux qui satisfait à l'équation suivante[17] :

$$S = \frac{100}{(1+y)^N}$$

Dans un an, les taux de rendement de cette obligation pourront prendre deux valeurs : y_u (si les taux d'intérêt augmentent) et y_d (si les taux d'intérêt baissent). L'échéance de l'obligation sera alors de (N – 1) années. Le taux de rendement à l'échéance y_u découlera donc de l'équation suivante :



17. Soulignons que le taux de rendement à l'échéance d'une obligation à coupon zéro d'échéance N (y_N) est égal au taux au comptant de même échéance (R_N). Ainsi, le prix d'une telle obligation est égal à : $P = \frac{100}{(1+y_N)^N} = \frac{100}{(1+R_N)^N}$. Mais la situation est tout autre pour des obligations qui comportent des coupons. Exprimé en termes des taux au comptant, le prix de l'obligation est égal à : $P = \frac{C}{1+R_1} + \frac{C}{(1+R_2)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+R_N)^N}$. Chaque coupon C qui sera versé à la période j doit être actualisé par le taux au comptant de cette période. Ainsi, le coupon qui sera versé dans deux ans doit être actualisé par le taux au comptant de deux ans, et ainsi de suite. Le taux de rendement à l'échéance de cette obligation n'est alors qu'une statistique qui indique le rendement annuel que versera celle-ci si elle est détenue jusqu'à son échéance et si les coupons sont réinvestis à ce même taux de rendement. Ce taux de rendement n'a rien à voir avec la détermination du prix de ladite obligation. Ce sont en effet les taux au comptant qui servent à déterminer le prix d'une obligation, cela en vertu de la formule qui vient d'être écrite. C'est le prix de l'obligation qui permet de déterminer son taux de rendement à l'échéance, ce taux étant le taux de rendement interne de l'obligation. Par ailleurs, ce sont les taux au comptant qui permettent de déterminer le prix d'une obligation. D'où l'importance de ces taux.

$$S_u = \frac{100}{(1 + y_u)^{N-1}}$$

Supposons que la structure à terme des taux d'intérêt qui prévaut actuellement soit celle qui apparaît au tableau 1. Le tableau donne également la volatilité annuelle des taux *spot*.

TABLEAU 1 **Structure à terme actuelle des taux de rendement (taux *spot*)**

Échéance (années)	Rendement (%)	Volatilité (%)
1	10	20
2	11	19
3	12	18
4	12,5	17
5	13	16

Nous voulons construire l'arbre des taux à court terme qui obéisse à la structure actuelle des taux de rendement représentée au tableau 1. Ces taux prévus doivent de même satisfaire à la volatilité estimée de ces taux qui apparaît également au tableau 1.

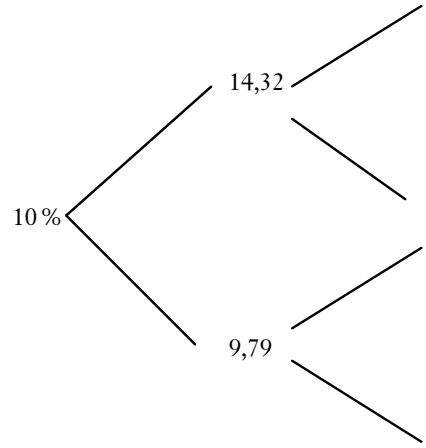
Considérons d'abord une obligation à un an. L'arbre des prix et celui des taux de cette obligation sont les suivants :

Pour déterminer le prix de l'obligation à un an, on n'a besoin que du taux spot actuel car le prix de l'obligation d'un an sera de 100 $ dans un an, que les taux d'intérêt augmentent ou diminuent. Le prix de l'obligation d'un an est donc de :

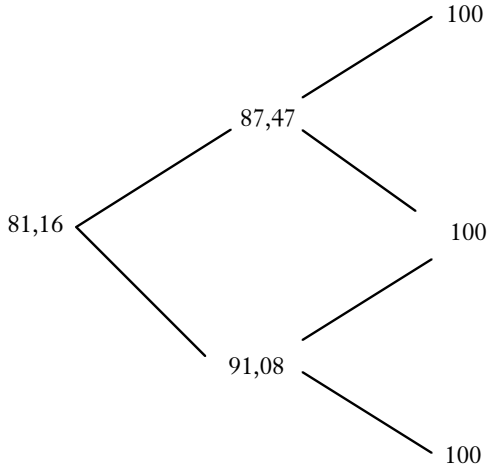
$$S = \frac{(0,5 \times 100) + (0,5 \times 100)}{1,10} = 90,91$$

Nous pouvons maintenant déterminer les taux prévus pour les obligations d'un an dans un an en observant le taux de rendement actuel et la volatilité des taux des obligations à 2 ans qui apparaît au tableau 1. Nous voulons que les résultats trouvés satisfassent à ces deux valeurs.

Nous savons que le taux de rendement actuel des obligations à un an est de 10 %. Nous devons déterminer les deux taux de l'an prochain, r_u et r_d. Supposons que ces taux soient respectivement de 14,32 % et 9,79 % (par pur pari). Nous voulons avec ces taux déterminer le prix actuel de l'obligation de deux ans (à coupon zéro).



L'arbre de l'évolution du prix de l'obligation à 2 ans qui correspond à l'arbre de taux d'intérêt que nous venons de construire est le suivant :



Par exemple, 87,47 est l'actualisation sur un an de 100 au taux de 14,32 %. Le prix actuel de l'obligation à 2 ans (coupon zéro) s'obtient comme suit :

$$\frac{(0,5 \times 87,47) + (0,5 \times 91,08)}{1,1} = 81,16$$

Le rendement de cette obligation est de 11 %. C'est en effet le y qui satisfait à l'équation suivante :

$$81,16 = \frac{100}{(1 + y)^2}$$

Par conséquent, les deux taux prévus sont compatibles avec la courbe actuelle des rendements à l'échéance. En effet, pour l'obligation à coupon zéro de deux ans, le taux de rendement est présentement de 11 %.

Les deux taux de rendements prévus doivent satisfaire à une autre condition : en effet leur volatilité doit correspondre à celle qui apparaît au tableau 10-1 pour les obligations de deux ans. On suppose que la distribution du taux spot est lognormale. Leur volatilité est alors donnée par l'équation suivante :

$$\sigma = \frac{\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right)}{2}$$

La volatilité des deux taux prévus pour l'année 1 est donc égale à :

$$\sigma = \frac{\ln\left(\frac{14,32}{9,79}\right)}{2} = 19\%$$

C'est bien là la volatilité des taux de rendement à 2 ans tel qu'elle apparaît au tableau 1.

Notre prévision des taux pour l'année prochaine était donc juste. Elle satisfait aux deux conditions recherchées :

- le taux de rendement à l'échéance de l'obligation à coupon zéro de deux ans doit être égal à 11 % ;
- la volatilité des taux prévus doit être de 19 %.

Ces deux conditions constituent deux équations pour déterminer les deux taux recherchés : r_u et r_d. Ils sont donc uniques. Ils sont respectivement de 14,32 % et de 9,79 %.

Les deux inconnues r_u et r_d peuvent être calculées par simulation. Nous envisageons ici le cas le plus simple pour ne pas surcharger la présentation, les équations des prix des obligations devenant très complexes et fortement non linéaires à mesure que l'arbre des taux se développe, des obligations de deux ans aux obligations de n années. Mais la procédure pour déterminer les taux des obligations de plus de deux ans est la même que celle utilisée pour les obligations de deux ans, cas qui retient notre attention ici.

Nous voulons donc déterminer les taux r_u et r_d, soit les taux d'intérêt prévus de la deuxième période dans l'arbre des taux d'intérêt de Black, Derman et Toy. Pour ce faire, nous disposons de deux équations :

i) Une équation qui correspond à la volatilité des taux d'intérêt de deux ans, volatilité connue que nous désignons par $\sigma_0(2)$. Les taux d'intérêt suivent un processus lognormal :

$$\frac{\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right)}{2} = \sigma_0(2)$$

Le calcul de la volatilité se justifie comme suit :

$$\sigma = \frac{\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right)}{2} \Rightarrow 2\sigma = \ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right) \Rightarrow \left(\frac{r_u}{r_d}\right) = e^{2\sigma} \Rightarrow r_u = r_d e^{2\sigma}$$

C'est là le processus d'évolution des taux dans un modèle lognormal. En effet, comme nous le verrons plus loin, dans un tel modèle : $r_u = re^{\mu_t + \sigma}$ et $r_d = re^{u_t - \sigma}$. Selon cette dernière équation : $r = r_d e^{-u_t + \sigma}$. En substituant cette valeur dans l'équation de r_u, on obtient : $r_u = r_d e^{-u_t + \sigma} e^{u_t + \sigma} = re^{2\sigma}$. QED.

ii) Une équation qui exprime le prix de l'obligation de deux ans, qui est connu et que nous désignons par $P_0(2)$, en fonction de r_u et r_d :

$$P_0(2) = \frac{0,5\left(\frac{100}{1+r_u}\right) + 0,5\left(\frac{100}{1+r_d}\right)}{1+r_0}$$

où r_0 désigne le taux au comptant de la première période, un taux connu, cela va sans dire.

À partir de l'équation de la volatilité, on peut exprimer r_u en termes de r_d :

$$\frac{\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right)}{2} = 0,19$$

$$\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right) = 0,38$$

$$\frac{r_u}{r_d} = e^{0,38}$$

On obtient finalement r_u en termes de r_d :

$$r_u = r_d e^{0,38}$$

En remplaçant r_u par sa valeur en termes de r_d dans l'équation du prix de l'obligation de deux ans, on a :

$$P_0(2) = \frac{\left[0,5\left(\frac{100}{1+r_d e^{0,38}}\right) + 0,5\left(\frac{100}{1+r_d}\right)\right]}{1+r_0}$$

Cette dernière équation constitue la base de la simulation. Supposons que l'on enclenche la simulation au temps t. On fixe d'abord une valeur de départ à r_d, désignée par $r_d^{(t)}$, et on la substitue dans la dernière équation. Si au temps t :

$$P(2)^{(t)} > P_0(2)$$

Alors il faut rehausser r_d à la prochaine simulation d'un certain montant, disons ε, augmentation qui doit prendre une valeur plutôt faible. On a alors, à la simulation t + 1 :

$$r_d^{(t+1)} = r_d^{(t)} + \varepsilon$$

Si par ailleurs la simulation au temps indique que :

$$P(2)^{(t)} < P_0(2)$$

Le taux d'intérêt de la prochaine simulation sera de :

$$r_d^{(t+1)} = r_d^{(t)} - \varepsilon$$

Ces divers ajustements rapprochent le prix simulé de l'obligation de son prix observé. La simulation se poursuit tant que le prix de l'obligation calculé par celle-ci n'est pas égal au prix observé. Disons que cela se produise à l'étape n. On a alors à cette étape :

$$P(2)^{(t+n)} = P_0(2)$$

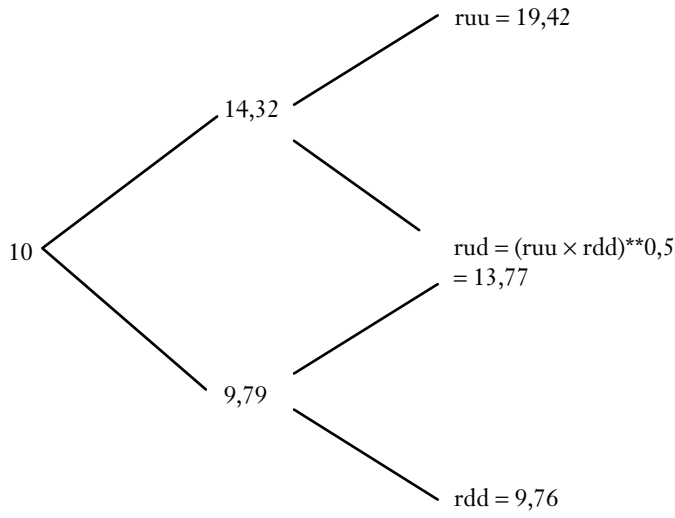
et le taux d'intérêt correspondant $r_d^{(t+n)}$ est le taux d'intérêt recherché. On substitue cette valeur de r_d dans l'équation de r_u et on détermine cette deuxième inconnue.

Nous voulons maintenant déterminer les taux prévus dans deux ans à partir de la structure à terme actuelle qui apparaît au tableau 1. Il y a alors 3 taux à prévoir, tel que l'illustre la figure 4, soit r_{uu}, r_{ud} et r_{dd}. r_{uu} correspond à un mouvement de hausse de taux d'intérêt suivi par un mouvement également à la hausse (« **u**p » et « **u**p »), r_{ud}, d'un mouvement de hausse suivi d'un mouvement de baisse (« **u**p » and « **d**own ») et ainsi de suite.

Les trois taux que nous recherchons doivent être compatibles avec le taux de rendement à trois ans et avec la volatilité des taux de trois ans qui apparaît au tableau 1. Nous devons donc trouver trois taux avec deux équations. Il manque donc une équation pour avoir un triplet unique de taux.

L'hypothèse ayant trait au comportement lognormal des taux permet de supprimer une inconnue. En effet, la volatilité des taux ne dépend pas ici des états de la nature (hausse de taux, baisse de taux,

FIGURE 4



etc.) mais seulement du temps. La volatilité des taux pour la troisième période est la même quel que soit l'état de la nature, soit 18 %. On peut donc écrire :

$$\frac{\ln\left(\frac{r_{uu}}{r_{ud}}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{r_{ud}}{r_{dd}}\right)}{2}$$

De là, on déduit que :

$$r_{ud}^2 = r_{uu} \times r_{dd}$$

Par conséquent, nous n'avons que deux inconnues puisque la troisième, r_{ud}, est déterminée par les deux autres. Nos deux équations suffisent donc pour calculer les taux prévus dans trois ans.

Tel que cela apparaît à la figure 4, les taux prévus recherchés sont de 19,42 % (hausse de taux suivie d'une hausse), 13,77 % (hausse de taux suivie d'une baisse ou baisse de taux suivie d'une hausse) et 9,76 % (baisse de taux suivie d'une baisse)[18].

À remarquer que sous l'hypothèse d'une volatilité lognormale des taux qui ne dépend que du temps, l'arbre se recombine la deuxième année, c'est-à-dire que les deux branches du milieu de l'arbre se rejoignent. Cela est une propriété désirable de l'arbre binomial.

1.3. Détermination du prix d'une obligation avec coupons

Nous avons jusqu'à présent évalué des obligations à coupon zéro. Nous pouvons maintenant envisager l'évaluation d'obligations avec coupons en les considérant comme des portefeuilles d'obligations à coupon zéro. En effet, chaque coupon peut être considéré comme une obligation à coupon zéro.

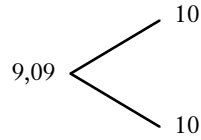
Pour l'illustrer, considérons l'évaluation d'une obligation à 3 ans avec une valeur nominale de 100 $ et dont le coupon est de 10 %. Nous nous servons de l'arbre des taux que nous venons de déterminer pour évaluer cette obligation.

---

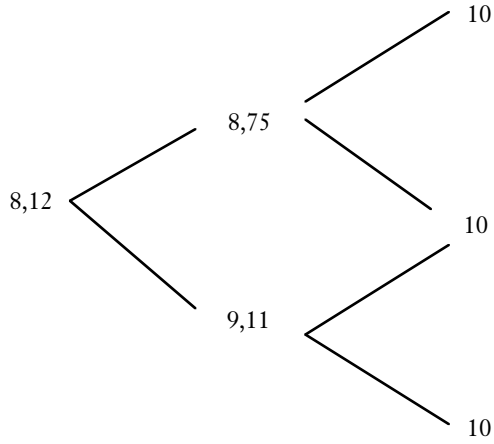
18. À noter que nous avons retenu les taux originaux de l'article de Black, Derman et Toy (BDT) pour la deuxième année, soit 19,42 % (r_{uu}), 13,77 % (r_{ud}) et 9,76 %(r_{dd}), taux qui apparaissent dans l'arbre de la figure 4. Mais une erreur s'est glissée dans les calculs de BDT, laquelle n'a pas été notée dans la littérature qui rapportait intégralement ces taux lorsqu'il était question du modèle de BDT. En effet, la volatilité des taux pour la troisième année est de 18 % selon le tableau 1. Or, les taux calculés par BDT ne font pas montre d'une telle volatilité. Par exemple, la volatilité des deux taux suivants calculés par BDT pour la troisième année, soit 19,42 % (r_{uu}) et 13,77 % (r_{ud}), est de : $\sigma = \dfrac{\ln\left(\dfrac{0{,}1942}{0{,}1377}\right)}{2} = 0{,}1719$ ou 17,19 %. Nous avons corrigé ces taux fautifs. Les taux corrigés sont respectivement de 19,69 % (r_{uu}), 13,74 % (r_{ud}) et 9,59 % (r_{dd}). La volatilité de ces taux est bien de 18 %. Nous montrerons comment les calculer dans le logiciel Excel dans la section 3 de ce chapitre.

Cette obligation est un portefeuille constitué de trois obligations à coupon zéro : l'obligation elle-même plus le dernier coupon, soit 110 $; le premier coupon de 10 $, qui est une obligation à coupon zéro d'un an, et le deuxième coupon de 10 $, qui est une obligation à coupon zéro de deux ans. Évaluons ces parties les unes après les autres.

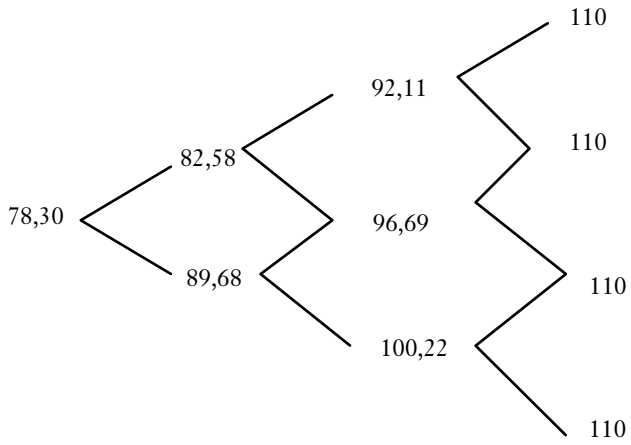
L'évaluation du coupon qui sera versé dans un an est escompté au taux actuel de 10 %. Sa valeur est donc de 9,09 $. Son arbre est le suivant :



Le coupon qui sera versé dans deux ans est évalué par l'arbre suivant :



La valeur actuelle du troisième cash-flow qui sera versé dans trois ans, soit 110, est calculée par l'arbre suivant :



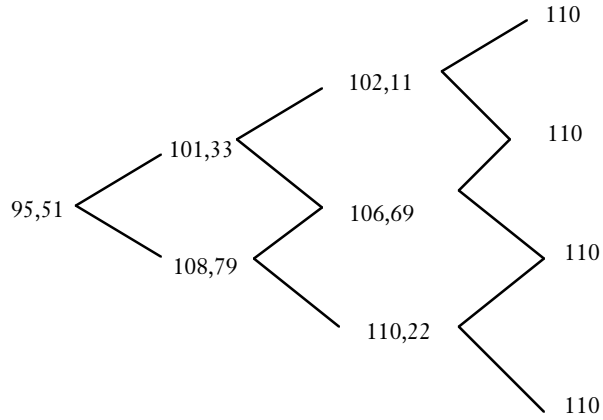
Par exemple, 82,58 dans l'arbre antérieur est calculé comme suit :

$$82{,}58 = \frac{\frac{92{,}11 + 96{,}69}{2}}{1{,}1432}$$

La valeur actualisée des cash-flows totaux de l'obligation à trois ans pour chacune des trois prochaines années est la somme des trois arbres qui viennent d'être construits. Ces cash-flows incluent l'intérêt couru. La somme de ces trois arbres est donnée par la figure de la page suivante.

Pour calculer le prix de l'obligation, il suffit de retrancher l'intérêt couru de 10 $ à toutes les branches, sauf bien sûr la première, car il n'y a pas d'intérêt couru lorsque l'obligation est émise[19]. On obtient de la sorte l'arbre de l'évolution du prix de l'obligation jusqu'à son échéance.

19. L'arbre du prix de l'obligation servira en effet à évaluer des options écrites sur celle-ci. Les prix des obligations doivent donc être alors à l'état pur, c'est-à-dire sans intérêt couru.



1.4. Détermination des prix d'options européennes[20] d'achat et de vente sur une obligation

Nous voulons maintenant calculer le prix d'une option d'achat (« call ») européenne de deux ans sur cette obligation dont le prix d'exercice est de 95 $. Cette option donne donc le droit d'acheter une obligation de trois ans au prix d'exercice de 95 $ jusqu'à son échéance. Elle est en jeu si le prix de l'obligation est supérieur à 95 $ et hors-jeu si le prix de l'obligation est inférieur à 95 $.

Nous savons qu'à l'échéance du call, son prix[21] est égal à :

Prix de l'obligation – prix d'exercice

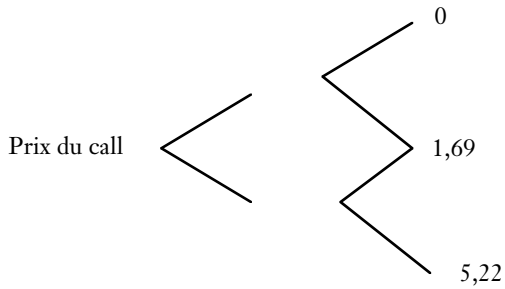
L'échéance du call se produira dans deux ans. Selon l'arbre du prix de l'obligation à trois ans, l'obligation pourra alors prendre trois valeurs : 92,11 $, 96,69 $ et 100,22 $. Dans le premier cas, le call ne vaut rien puisque le prix d'exercice du call est plus élevé que le prix de l'obligation. Si le prix de l'obligation est de 96,69, le prix du call est alors de :

$$96{,}69 - 95 = 1{,}69\ \$$$

20. Rappelons qu'une option est dite « européenne » si elle ne peut être exercée avant son échéance. Si elle peut être exercée avant son échéance, elle est dite « américaine ».

21. Si bien sûr le prix de l'obligation est alors supérieur ou égal au prix d'exercice. Autrement, la valeur du call est de 0.

Et si le prix de l'obligation est de 100,22 à l'échéance, le prix du call est alors de 5,22. On reporte ces valeurs sur l'arbre du call de façon à calculer son prix actuel.



Pour calculer les prix du call dans un an, on actualise les cash-flows de la deuxième année comme on le faisait pour l'obligation. Il y a deux embranchements la deuxième année. Pour l'embranchement supérieur, le cash-flow actualisé est de :

$$\frac{\frac{0 + 1{,}69}{2}}{1{,}1432} = 0{,}74$$

Pour l'embranchement inférieur, le cash-flow actualisé est de :

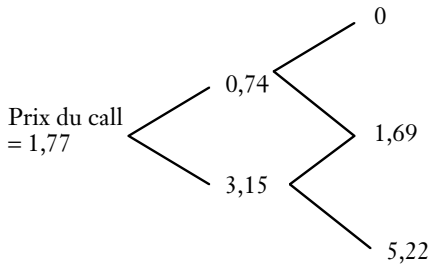
$$\frac{\frac{1{,}69 + 5{,}22}{2}}{1{,}0979} = 3{,}15$$ [22]

22. À remarquer que l'on traite ici le cas d'un call européen. Si le call était américain, il faudrait se demander à chaque nœud de l'arbre binomial si l'option n'aurait pas intérêt à être exercée. Ainsi, au nœud où nous indiquons le prix 3,15 $ comme valeur de l'option, l'option vaut 3,79 $ (98,79 $ – 95 $) si elle est exercée. Par conséquent, si l'option était américaine, on chiffrerait ce nœud à 3,79 $ et non à 3,15 $. Mentionnons qu'il n'y a aucun intérêt à exercer avant l'échéance un call qui est écrit sur un titre qui ne génère pas de revenus. Mais si le titre génère des revenus – des dividendes dans le cas d'une action ou des coupons dans le cas d'une obligation –, il peut y avoir avantage à exercer ce call avant son échéance si le revenu du titre sous-jacent est suffisamment important. Pour une action portant dividendes, l'exercice du call ne se produira habituellement qu'à la dernière date ex-dividendes qui est observée durant la durée de vie du call, si bien sûr il y a avantage à l'exercer.

On reporte ces valeurs dans l'arbre précédent, au bout de la première année. À partir de ces deux nombres, on obtient finalement le prix recherché pour le call :

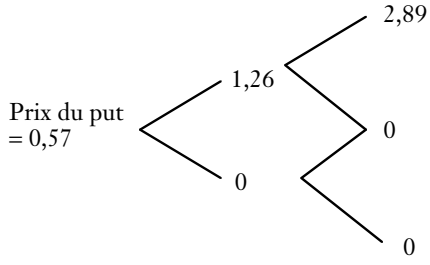
$$\frac{\frac{0{,}74 + 3{,}15}{2}}{1{,}10} = 1{,}77$$

L'arbre de l'évolution des cash-flows actualisés du call apparaît à la figure suivante.



Nous envisageons maintenant de déterminer le prix d'un put ou option de vente européenne de 2 ans écrit sur la même obligation. Le prix d'exercice de ce put est de 95 $. Le put est donc en jeu si le prix de l'obligation est inférieur à 95 $. Il est hors-jeu si le prix de l'obligation est supérieur à 95 $.

En procédant comme le call, on obtient l'arbre de l'évolution des cash-flows actualisés du put.



Le prix du put est donc de 0,57 $[23].

À partir des calculs que nous venons d'effectuer, nous pouvons calculer des ratios de couverture (*hedging ratios*). De tels ratios sont de première importance pour le gestionnaire de portefeuille, car ils lui permettent de calculer le nombre d'options qui est nécessaire pour couvrir une obligation.

Le delta d'un call se définit comme suit :

$$\Delta_{\text{call}} = \frac{\Delta \text{ prix du call}}{\Delta \text{ prix de l'obligation}}$$

Le delta d'un call se modifie avec toute variation de taux d'intérêt. Il n'est donc pas fixe dans le temps. Le gestionnaire de portefeuille doit le recalculer périodiquement et ajuster ses positions en conséquence pour demeurer couvert.

Calculons le delta du call dans l'exemple précédent pour la première année. La variation du prix de l'obligation est alors de :

$$91{,}33 - 98{,}79 = -7{,}46$$

La variation concomitante du prix du call est de :

$$0{,}74 - 3{,}15 = -2{,}41$$

Le delta du call est donc de :

$$\frac{-2{,}41}{-7{,}46} = 0{,}323$$

Pour avoir une couverture « parfaite », il faut donc vendre 3,096 calls pour chaque obligation détenue. La hausse de la valeur des calls annule alors la baisse du prix de l'obligation, c'est-à-dire :

$$\Delta P - \frac{1}{\Delta}\Delta C = -7{,}46 - \frac{1}{0{,}323}(-2{,}41) = -7{,}46 - (3{,}096)(-2{,}41) = 0$$

---

23. Le put est ici européen. Mais s'il était américain, il faut considérer à chaque nœud, comme dans le cas du call, s'il y a intérêt à l'exercer avant l'échéance. Ainsi, au nœud où apparaît 1,26 $, le put vaudrait 3,67 $ (95 $ – 91,33 $) s'il était exercé. Par conséquent, si le put était américain, il faudrait inscrire 3,67 $ à ce nœud et non 1,26 $. Notons que contrairement au call, il peut y avoir avantage à exercer un put écrit sur un titre ne générant pas de revenus avant son échéance. Cela se produit habituellement quand le put est suffisamment en jeu (*in-the-money*).

Dans cette expression, P désigne le prix de l'obligation et C, le prix d'un call. La position du gestionnaire est alors couverte. Ce qu'il perd sur sa position au comptant, ici des obligations, il le regagne sur sa position sur le marché des options, ici une position à découvert sur des calls.

Le delta du put correspondant est de :

$$\Delta_{\text{put}} = \frac{1,26}{-7,46} = -0,169$$

À noter que le delta du put est négatif. En effet, le prix d'un put diminue lorsque le prix de l'obligation augmente.

Contre chaque obligation détenue, il faut donc acheter 5,917 puts pour être couvert. Si le prix de l'obligation diminue de 1 $, la valeur des puts détenus s'apprécie alors de 1 $. Le gestionnaire récupère alors sur le marché des options ce qu'il perd sur sa position en compte[24] (obligations). Il est donc couvert.

Nous avons dans ces exemples divisé la période en années. Pour arriver à une estimation plus précise de la valeur des calls et des puts sur titres à revenus fixes, il faut opérer une subdivision beaucoup plus fine de la période. Il est même souhaitable de la diviser en jours. Seul un ordinateur peut résoudre un tel problème. Un tel arbre peut être programmé sur Visual Basic, par exemple.

2. Les aspects formels du modèle de Black, Derman et Toy

Nous voulons maintenant traduire le modèle binomial de BDT en termes stochastiques. Mais comme ce modèle suppose que les taux d'intérêt suivent un processus lognormal, nous nous attardons d'abord à décrire ce processus.

24. Une position en compte est dite *long position* en anglais. Le gestionnaire de portefeuille a une position en compte en obligations si elles font partie de ses actifs. S'il a vendu des obligations qu'il a empruntées à un courtier, il a alors une position à découvert (*short position*).

2.1. Le modèle lognormal

Dans le modèle lognormal de l'absence d'arbitrage, on suppose que les taux d'intérêt obéissent à un processus lognormal, à l'instar des prix des actions dans le modèle de Black et Scholes. On s'assure ainsi que le taux d'intérêt ne puisse prendre de valeurs négatives. L'équation différentielle stochastique des taux d'intérêt est alors la suivante :

$$dr = \mu(t)rdt + \sigma rdz$$

ou, sous forme logarithmique :

$$d\ln(r) = \left[\mu(t) - \frac{\sigma}{2}\right]dt + \sigma dz$$

Les avantages de ce modèle sont les suivants :

- des taux d'intérêt négatifs ne sont pas possibles ;
- la volatilité des taux d'intérêt est proportionnelle au niveau des taux d'intérêt : les taux d'intérêt sont donc plus volatils dans un environnement de taux d'intérêt élevés que dans un environnement de taux d'intérêt faibles.

Ce modèle ignore cependant la tendance des taux d'intérêt à revenir vers un niveau normal (*mean reverting tendency*). L'écart-type des taux d'intérêt est proportionnel au niveau des taux d'intérêt, mais il ne dépend pas du temps[25].

La condition de l'absence d'arbitrage requiert que la somme des titres purs soit égale à l'obligation à coupon zéro sans risque.

Les mouvements de hausse et de baisse de taux d'intérêt obéissent au processus suivant (on suppose ici des intervalles de temps d'un an) :

$$r_{i+1}^{t+1}(1) = r_i^t(1)e^{u^t+\sigma}$$
$$r_i^{t+1}(1) = r_i^t(1)e^{u^t-\sigma}$$

25. Pour l'estimation économétrique de la *mean reverting tendency*, voir : Gouriéroux, C. (1996), *Simulation Based Econometric Methods*, New York, Oxford University Press, et Campbell, J.Y., A.W. Lo et A.C. Mackinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton (N.J.), Princeton University Press, pour une élaboration du sujet au plan pratique.

La première équation représente un état de hausse de taux d'intérêt et la seconde équation, un état de baisse. Les paramètres μ et σ doivent être estimés. Ils doivent satisfaire à la structure à terme actuelle des taux d'intérêt.

2.2. Le modèle de Black, Derman et Toy transposé au langage du calcul stochastique

Dans le modèle de BDT, les taux d'intérêt suivent un processus lognormal et leur volatilité dépend du temps. Le taux d'intérêt obéit à l'équation différentielle suivante dans leur modèle :

$$dr = \mu(t)rdt + \sigma(t)rdz$$

Les inputs du modèle sont donc la structure à terme actuelle des taux d'intérêt, représentée par $\mu(t)$ et la structure à terme des volatilités, représentée par $\sigma(t)$. La flexibilité de ce modèle l'a rendu très populaire.

On doit formuler trois hypothèses pour que l'arbre des taux se recombine dans un tel modèle[26] :

- Les prix actuels des obligations à coupon zéro doivent être reproduits par le modèle.
- La volatilité des taux ne doit pas dépendre de l'état de la nature (hausse de taux et baisse de taux). Elle ne dépend que du temps.
- La structure actuelle de la volatilité des taux est une donnée du problème. Ce n'est pas une inconnue.

Dans le modèle de BDT, les mouvements de hausse et de baisse des taux obéissent respectivement aux deux équations suivantes :

$$r_{i+1}^{t+1}(1) = r_i^t(1)e^{\mu^t+\sigma^t}$$
$$r_i^{t+1}(1) = r_i^t(1)e^{\mu^t-\sigma^t}$$

Dans ces équations, l'indice supérieur dénote le temps.

26. C'est-à-dire qu'à chaque nœud de l'arbre ne doivent correspondre que deux branches.

Le *bootstrapping*

Pour opérationnaliser le modèle de Black, Derman et Toy (1990), nous devons disposer de la structure à terme des taux d'intérêt au comptant des titres sans risque, généralement les titres gouvernementaux. Mais la plupart du temps l'on ne dispose que de la structure des rendements des titres avec coupons. Il faut recourir à la technique du *bootstrapping* pour convertir les rendements à l'échéance de titres avec coupons en taux au comptant. Expliquons cette procédure.

Les obligations d'un an et moins sont habituellement des obligation à coupons zéro appelées bons du trésor. Soit r_1 le taux au comptant des obligations à six mois et r_2 , le taux au comptant des obligations à un an. Nous voulons maintenant calculer le taux au comptant des obligations à 1,5 an, mais nous ne disposons que d'une obligation qui paie un coupon C semestriellement. Nous connaissons son prix. En vertu du principe de l'arbitrage, le prix de cette obligation est égal à :

$$P_0 = \frac{C}{\left(1 + r_1 / 2\right)} + \frac{C}{\left(1 + r_2 / 2\right)^2} + \frac{C + VN}{\left(1 + r_3 / 2\right)^3} \qquad (1)$$

où P_0 est le prix de l'obligation ; VN, sa valeur nominale ; et r_3, le taux au comptant recherché pour l'échéance d'un an et demi. Cette équation ne comporte donc qu'une inconnue. On peut se servir du solveur d'Excel pour le trouver.

Nous voulons maintenant déterminer le taux au comptant des obligation à deux ans. On recourt encore une fois à la technique du *bootstrapping* pour y arriver. Nous connaissons le prix d'une obligation à deux ans qui paie un coupon C. Son prix est donc égal à :

$$P_1 = \frac{C}{\left(1 + r_1 / 2\right)} + \frac{C}{\left(1 + r_2 / 2\right)^2} + \frac{C}{\left(1 + r_3 / 2\right)^3} + \frac{C + VN}{\left(1 + r_4 / 2\right)^4} \qquad (2)$$

où P_1 désigne le prix de l'obligation à deux ans et r_4, le taux au comptant recherché pour les obligations à deux ans. Ce taux est la seule inconnue de l'équation (2). Et l'on procède de la sorte pour générer toute la structure à terme des taux au comptant. Cette technique de recherche séquentielle des taux au comptant porte le nom de *bootstrapping*.

3. Construction de l'arbre binomial du modèle de Black, Derman et Toy dans le logiciel Excel

Comme nous l'avons indiqué auparavant, le modèle de BDT vise à reproduire la structure actuelle des taux d'intérêt au comptant (taux spot) de même que celle de leur volatilité, mesurée par leur écart-type historique. Au tableau 2 apparaît une structure observée de taux d'intérêt au comptant, qui correspond grosso modo à celle à laquelle ont recouru BDT dans leur article, de même que la structure de volatilité de ces taux.

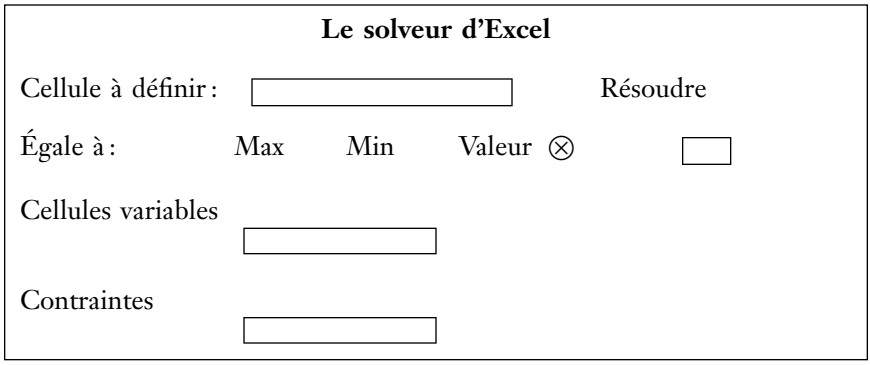
TABLEAU 2

Durée	Taux spot	Volatilité
1 an	10 %	20 %
2 ans	11 %	19 %
3 ans	12 %	18 %
4 ans	12,5 %	17 %
5 ans	13 %	16 %
6 ans	13,5 %	15 %

L'arbre binomial de BDT est construit de façon telle qu'il reproduit les données du tableau 2. C'est-à-dire que l'obligation à coupon zéro d'un an devra avoir un rendement de 10 % et une volatilité de 20 %. L'obligation de deux ans devra avoir un rendement de 11 % et une volatilité de 19 %, et ainsi de suite. Nous avons présenté auparavant le processus itératif par lequel on pouvait trouver les inconnues du modèle de BDT. Mais ce processus est plus complexe qu'il n'y paraît à première vue car, à mesure que l'on progresse dans l'arbre, le degré de non-linéarité des équations ne cesse d'augmenter. Comment peut-on solutionner de telles équations ? Le solveur d'Excel, que nous présentons ci-après, est de nature à résoudre notre problème.

Un fac-similé du solveur d'Excel apparaît à la figure 5. On y accède en cliquant sur Outils, puis sur solveur. Le solveur comprend d'abord une rubrique : *cellule à définir*. Cette cellule doit comporter une formule. Par exemple, dans un problème de calcul d'une frontière efficiente, cette formule sera celle de la variance du rendement à

FIGURE 5



minimiser. Dans le cas qui nous intéresse, cette formule a trait au rendement auquel doit être égal le rendement d'une obligation de n années. Par exemple, selon le tableau 2, ce rendement doit être égal à 12 % pour l'obligation à trois ans. Vient ensuite la rubrique : *égale à*. Le solveur désire savoir si la formule qui apparaît dans la *cellule à définir* doit être *maximisée*, *minimisée* ou prendre une certaine *valeur*. Dans le cas de la construction d'une frontière efficiente, on cocherait : *Min*. Dans le cas qui nous intéresse, la cellule à définir doit prendre une certaine valeur, c'est-à-dire le rendement observé de l'obligation de n années. On coche donc l'option *Valeur* et on inscrit ce rendement dans la case indiquée. Par la suite, le solveur demande de spécifier les cellules des variables, c'est-à-dire les cellules dans lesquelles le logiciel enregistrera la solution des inconnues. Pour le cas qui nous intéresse, ces cellules correspondent aux taux d'intérêt qui se situent aux nœuds de l'arbre binomial que nous voulons construire. Comme nous pourrons le constater ultérieurement, nous n'aurons à spécifier que deux cellules à chaque période dans le cas du modèle de BDT. Finalement, nous devons spécifier les contraintes du modèle dans le solveur. Dans le problème de la construction d'une frontière efficiente, ces contraintes sont : *i)* le rendement espéré doit prendre une valeur donnée ; *ii)* la somme des pondérations des titres qui constituent le portefeuille doit être égale à l'unité. Pour le cas du modèle de BDT, la contrainte est que la volatilité de l'obligation de n périodes doit prendre sa valeur observée.

Forts de ces développements, nous pouvons maintenant nous attaquer à la solution du modèle de BDT à l'aide du solveur d'Excel. Pour bien comprendre la procédure, nous donnerons d'abord une solution détaillée pour l'arbre de taux d'intérêt de BDT. Puis nous exposerons une solution beaucoup plus expéditive.

3.1. Procédure détaillée

À la figure 6 apparaît la mise en forme initiale du modèle de BDT sur un chiffrier Excel. L'arbre que nous recherchons apparaît à gauche du chiffrier. Dans la cellule A16, nous avons introduit le premier taux de l'arbre qui est connu, soit 10 %. Nous avons également fixé tous les autres taux de l'arbre à 10 %. C'est la solution de départ, une solution fausse, cela s'entend. Le solveur déterminera ces taux période par période. Au milieu du chiffrier apparaît le modèle proprement dit. Les cellules I15 à I20 seront les *cellules à définir* par le solveur. Elles devront prendre leur valeur observée qui est égale aux taux que l'on retrouve dans la colonne des inputs où apparaît la structure à terme observée des taux d'intérêt. Par ailleurs, la colonne ayant trait à la volatilité dans le modèle (colonne J) nous permettra de définir la contrainte du modèle. Cette contrainte réalisera l'égalité entre la volatilité du modèle et la volatilité observée.

À la figure 7 apparaît l'arbre du prix de l'obligation à coupon zéro ainsi que l'arbre des rendements correspondant. Aux cellules B24 et B26, nous avons introduit des 1, soit la valeur de l'obligation à coupon zéro d'un an à l'échéance. La cellule A25 contient la formule de l'actualisation de ces deux cash-flows au taux A16, soit le taux spot d'une période. Cette formule est égale à :

```
= 0.5*(B24+B26)/(1+A16)
```

À la cellule H25, on retrouve la formule du rendement de l'obligation d'un an. Celle-ci est égale à :

```
(1/A25)-1
```

Le prix de l'obligation d'un an est en effet égal, en termes de son rendement :

$$P_0 = \frac{1}{1+y}$$

FIGURE 6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9	Cellules des variables								Modèle				Inputs	
10														
11						0.1000								
12					0.1000									
13				0.1000		0.1000			Taux	Volatilité			Taux	Volatilité
14			0.1000		0.1000									
15		0.1000		0.1000		0.1000			0.1000				0.1000	0.2000
16	0.1000		0.1000		0.1000								0.1100	0.1900
17		0.1000		0.1000		0.1000							0.1200	0.1800
18			0.1000		0.1000								0.1250	0.1700
19				0.1000		0.1000							0.1300	0.1600
20					0.1000								0.1350	0.1500
21						0.1000								

FIGURE 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
22	**Arbre des prix des obligations**							**Arbre des rendements**		
23	**coupon 0**									
24		1								
25	0.90909							0.1		
26		1								

où P_0 désigne le prix de l'obligation d'un an et y, son rendement à l'échéance. En isolant y, on a donc :

$$y = \frac{1}{P_0} - 1$$

soit la formule introduite dans la cellule H25. Ces deux premiers arbres ne font pas problème puisque nous connaissons déjà la solution du taux spot d'un an, soit un taux observé.

Nous voulons maintenant calculer les deux taux qui apparaissent aux cellules B15 et B17. Pour ce faire, nous recourons aux arbres des prix et des rendements de l'obligation de deux ans, que l'on retrouve à la figure 8.

FIGURE 8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
28									
29			1						
30		0.90909							0.1
31	0.82645		1					0.1	
32		0.90909							0.1
33			1						

À gauche du chiffrier apparaît l'arbre de l'évolution du prix de l'obligation à coupon zéro jusqu'à son échéance. Dans les cellules C29, C31 et C33, on a introduit des 1, soit la valeur de cette obligation à l'échéance. La cellule B30 contient la formule de l'actualisation des cash-flows contenus dans les cellules C29 et C31 au taux B15, soit un des deux taux recherchés. Cette formule est la suivante :

```
=0.5*(C29+C31)/(1+B15)
```

De la même façon, la cellule B32 renferme la formule de l'actualisation des deux cash-flows C31 et C33 au taux B17, l'autre taux recherché. Finalement, la cellule A31 renferme la formule de l'actualisation des cash-flows B30 et B32 au taux contenu dans la cellule A16.

À droite du chiffrier de la figure 8 apparaît l'arbre des taux de rendements correspondant à l'arbre des prix. La cellule H31 contient le rendement de l'obligation de 2 ans calculé au temps 0, c'est-à-dire qu'il est calculé à l'aide de la cellule A31 qui renferme le prix de ladite obligation au temps 0. La formule qui se trouve dans la cellule H31 est donc égale à :

```
=(1/A31)^(0.5)-1
```

On rappelle en effet que le prix de l'obligation de deux ans, en termes de rendement, est égal à :

$$P_0 = \frac{1}{(1+y)^2}$$

En isolant y, on a :

$$y = \left(\frac{1}{P_0}\right)^{0,5} - 1$$

ce qui est bien la formule que contient la cellule H31. Par ailleurs, dans la colonne I30 apparaît le rendement correspondant au prix de la cellule B30. La formule de la cellule I30 est donc de :

```
=(1/B30)-1
```

Cette formule est aussi égale au taux recherché B15. Nous tirerons profit de cette égalité ultérieurement. De façon analogue, la cellule I32 renferme la formule :

```
=(1/B32)-1
```

ce qui est égal au taux B17, l'autre taux recherché.

Ces arbres étant construits, nous revenons à la figure 6. Nous nous situons dans la section correspondant au modèle. Dans la cellule I16, nous écrivons :

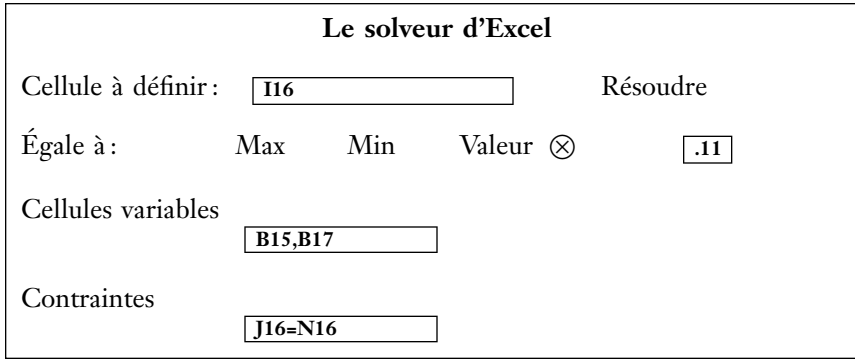
```
=H31
```

ce qui est égal au rendement recherché pour l'obligation à 2 ans. La cellule I16 sera la cellule à définir dans le solveur. Sa valeur sera fixée au rendement observé de l'obligation de deux ans, soit 11 %. Dans la colonne I17, nous écrivons la formule de la volatilité des deux taux recherchés, qui, en vertu du modèle de BDT, est égale à :

```
0.5*LN(I30/I32)
```

puisque I30 est aussi égal à B15 et I32, à B17, B15 et B17 étant, on le rappelle, les deux taux recherchés. On peut alors faire appel au solveur d'Excel qui apparaît à la figure 9.

FIGURE 9



La cellule à définir est I16, qui renferme la formule du rendement de l'obligation de 2 ans. Sa valeur doit être être égale à 0,11, soit le rendement observé des obligations de deux ans. Les taux recherchés sont B15 et B17, qui apparaissent dans le casier des cellules variables. Finalement, la contrainte est que la cellule I16, qui renferme la formule de la volatilité des deux taux B15 et B17, soit égale à la cellule N16, qui renferme la volatilité observée de ces deux taux. On clique alors sur *Résoudre*.

À la suite de cette opération, la modification de la figure 6 apparaît à la figure 10.

FIGURE 10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9	Cellules des variables								Modèle				Inputs	
10														
11						0.1000								
12					0.1000									
13				0.1000		0.1000			Taux	Volatilité			Taux	Volatilité
14			0.1000		0.1000									
15		0.1432		0.1000		0.1000			0.1000				0.1000	0.2000
16	0.1000		0.1000		0.1000				0.11	0.19			0.1100	0.1900
17		0.0979		0.1000		0.1000							0.1200	0.1800
18			0.1000		0.1000								0.1250	0.1700
19				0.1000		0.1000							0.1300	0.1600
20					0.1000								0.1350	0.1500
21						0.1000								

Comme on peut le constater à la figure 10, le solveur a bien trouvé les deux taux recherchés aux cellules B15 et B17 de l'arbre, soit 14,32 % et 9,79 %[27]. Si on regarde dans la section modèle du chiffrier, on constate que ces deux taux satisfont le taux de rendement à l'échéance et la volatilité observés des obligations de deux ans. La colonne I16 nous indique que le taux de rendement des obligations de 2 ans est bien de 11 % dans le modèle. Pour sa part, la cellule J16 nous indique que la contrainte de volatilité est bien respectée dans le modèle. Elle est égale à sa valeur observée, soit 19 %. Par ailleurs, la modification de l'arbre de l'évolution des prix et des rendements de l'obligation de deux ans se retrouve à la figure 11.

FIGURE 11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
29			**1**						
30		0.87475							0.14318
31	0.81162		1					0.11	
32		0.91082							0.09792
33			1						

Le prix de l'obligation à deux ans est de 0,81162. Son rendement est de :

$$\left(\frac{1}{0{,}81162}\right)^{0{,}5} - 1 = 0{,}11$$

ce qui est bien le rendement recherché pour les obligations à deux ans. Pour leur part, les cellules I30 et I32 correspondent bien aux taux qui apparaissent dans les cellules B15 et B17. Leur volatilité est de :

$$\frac{\ln\left(\frac{0{,}14318}{0{,}09792}\right)}{2} = 0{,}19$$

ce qui est bien la volatilité recherchée.

27. On remarquera ici que ces deux taux sont conformes au processus lognormal inhérent au modèle de BDT. Nous avons vu auparavant que si les taux suivent un processus lognormal, leur évolution est déterminée par les équations suivantes : $r_{i+1}^{t+1} = r_i^t e^{\mu^t + \sigma^t}$ et $r_i^{t+1} = r_i^t e^{\mu^t - \sigma^t}$. On peut se servir du taux 14,32 pour trouver le *drift* de l'équation, qui est égal à 0,17 à la période 1. Alors on a : $0{,}1432 = 0{,}10e^{0{,}17+0{,}19}$ et $0{,}0979 = 0{,}10e^{0{,}17-0{,}19}$, 0,19 étant la volatilité des taux à la période 1. Les deux taux d'intérêt trouvés suivent bien un processus lognormal.

Nous en sommes à l'étape de calculer les taux C14, C16 et C18 de l'arbre. Remarquons ici que nous n'avons à calculer que deux taux. Le troisième est alors automatiquement déterminé par les deux premiers. En effet, dans le modèle de BDT, la volatilité des taux ne dépend pas des états de la nature. Elle ne dépend que des périodes. Ainsi, on peut écrire à la période 2 :

$$\frac{\ln\left(\frac{r_{uu}}{r_{ud}}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{r_{ud}}{r_{dd}}\right)}{2}$$

ce qui implique :

$$\frac{r_{uu}}{r_{ud}} = \frac{r_{ud}}{r_{dd}}$$

r_{dd} est donc déterminé par r_{ud} et r_{uu}, c'est-à-dire :

$$r_{dd} = \frac{\left(r_{ud}\right)^2}{r_{uu}}$$

On peut donc écrire, à la cellule C18, la formule suivante :

```
=(C16^2)/C14
```

À chaque étape, nous n'avons donc à déterminer que deux taux d'intérêt, les autres étant automatiquement fixés par ceux-ci.

Pour calculer les taux C14, C16 et C18, on écrit les formules des arbres de l'évolution des prix et des rendements de l'obligation à 3 ans, qui apparaît à la figure 12.

FIGURE 12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
35										
36				1						
37			0.90909							0.1
38		0.79523		1					0.12138	
39	0.73784		0.90909					0.10666		0.1
40		0.82801		1					0.09896	
41			0.90909							0.1
42				1						
43										

Ces arbres sont construits comme les précédents. Les cellules qui nous intéressent particulièrement sont les cellules J37 et J39, qui contiennent les deux taux recherchés, C14 et C16, et la cellule H39, qui contient la formule du rendement à l'échéance de l'obligation à 3 ans. Cette formule est égale à :

```
(1/A39)^(1/3)-1
```

Nous revenons à la figure 10. La cellule à définir est maintenant I17. Nous y inscrivons la formule :

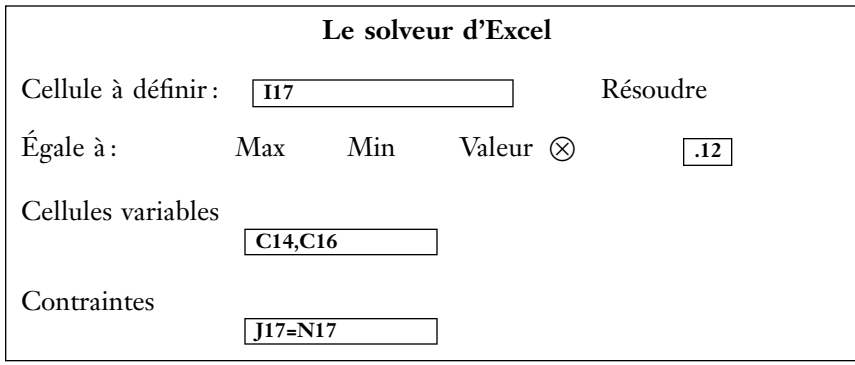
```
=H39
```

Dans la cellule J17, nous écrivons la formule de la volatilité des deux taux recherchés, soit :

```
=0.5*LN(J37/J39)
```

Et nous faisons appel au solveur d'Excel pour solutionner. Nos inscriptions apparaissent à la figure 13.

FIGURE 13



On clique sur *Résoudre* et l'on retourne à l'arbre des taux d'intérêt, qui apparaît à la figure 14.

FIGURE 14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9	Cellules des variables								Modèle				Inputs	
10														
11						0.1000								
12					0.1000									
13				0.1000		0.1000			Taux	Volatilité			Taux	Volatilité
14			0.1969		0.1000									
15		0.1432		0.1000		0.1000			0.1000				0.1000	0.2000
16	0.1000		0.1374		0.1000				0.11	0.19			0.1100	0.1900
17		0.0979		0.1000		0.1000			0.12	0.18			0.1200	0.1800
18			0.0959		0.1000								0.1250	0.1700
19				0.1000		0.1000							0.1300	0.1600
20					0.1000								0.1350	0.1500
21						0.1000								

On remarquera que les calculs de BDT n'étaient pas exacts pour la période 2, comme nous l'indiquions auparavant. À la suite de ces calculs, les arbres de l'évolution des prix et des taux de rendement de l'obligation à 3 ans sont recalculés à la figure 15.

FIGURE 15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
35										
36				1						
37			0.83546							0.19694
38		0.74995		1					0.15474	
39	0.71178		0.8792					0.12		0.1374
40		0.81596		1					0.10704	
41			0.91252							0.09586
42				1						

On laisse au lecteur le soin de calculer les autres taux de l'arbre. La forme finale de l'arbre recherché se retrouve à la figure 16.

3.2. Procédure simplifiée

La procédure que nous venons d'exposer pour construire l'arbre binomial de BDT est somme toute assez longue à exécuter, quoiqu'elle mette en jeu des calculs fort complexes que l'algorithme du solveur d'Excel résout presque instantanément. Maintenant que nous comprenons la logique de la construction de l'arbre, nous proposons une procédure de résolution beaucoup plus rapide.

Le chiffrier de départ pour construire l'arbre de modèle de BDT est illustré à la figure 17.

C'est là tout l'espace de travail dont nous avons besoin pour mettre en branle la procédure simplifiée de la construction de l'arbre de taux d'intérêt du modèle de BDT. Comme dans le cas précédent, nous inscrivons 10 % dans la cellule A13 de l'arbre des taux à construire puisque ce taux est directement observé. Nous nous souvenons également que nous n'avons à déterminer que deux taux à chaque période, les autres étant automatiquement fixés par la contrainte de volatilité. À cet effet, nous écrivons la formule suivante dans la cellule C15 :

```
=(C13^2)/C11
```

FIGURE 16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9	Cellules des variables								Modèle				Inputs	
10														
11						0.3366								
12					0.2801									
13				0.2284		0.2493			Taux	Volatilité			Taux	Volatilité
14			0.1969		0.2034									
15		0.1432		0.1626		0.1847			0.1000				0.1000	0.2000
16	0.1000		0.1374		0.1477				0.11	0.19			0.1100	0.1900
17		0.0979		0.1157		0.1368			0.12	0.18			0.1200	0.1800
18			0.0959		0.1072				0.125	0.17			0.1250	0.1700
19				0.0824		0.1014			0.13	0.16			0.1300	0.1600
20					0.0779				0.135	0.15			0.1350	0.1500
21						0.0751								

FIGURE 17

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2																
3																
4																
5																
6	**Arbre BDT**								**Modèle**		**Inputs**					
7									**Taux**	**Volatilité**	**Taux**	**Volatilité**				
8						0.1										
9					0.1						0.1	0.2				
10				0.1		0.1					0.11	0.19				
11			0.1		0.1						0.12	0.18				
12		0.1		0.1		0.1					0.125	0.17				
13	0.1		0.1		0.1						0.13	0.16				
14		0.1		0.1		0.1					0.135	0.15				
15			0.1		0.1											
16				0.1		0.1										
17					0.1											
18						0.1										
19	**Arbre des prix**															
20									**Arbre des rendements**							
21							1									
22						1								0		
23					1		1						0			
24				1		1						0		0		
25			1		1		1				0		0			
26		1		1		1				0		0		0		
27	0.9090909		1		1		1		0.1		0		0			
28		1		1		1				0		0		0		
29			1		1		1				0		0			
30				1		1						0		0		
31					1		1						0			
32						1								0		
33							1									
34																

Puis nous la recopions dans les cellules suivantes : D14, D16, E13, E15, E17, F12, F14, F16 et F18. Par la suite, nous incorporons dans la cellule A27 la formule suivante :

```
=(0.5*B26+0.5*B28)/(1+A13)
```

Cette formule sera recopiée constamment par la suite pour actualiser les cash-flows des obligations de diverses échéances. Pour l'instant, nous mettons des 1 partout ailleurs dans l'arbre des taux. Finalement, à la colonne I27, nous inscrivons la formule suivante :

```
=(1/A27)-1
```

C'est là le rendement de l'obligation d'un an.

Nous sommes maintenant en mesure d'initier la construction de l'arbre BDT. Nous nous attaquons tout d'abord à l'obligation à deux ans. Nous recopions la formule contenue dans la cellule A27 dans les cellules B26 et B28. Nous modifions comme suit la formule contenue dans la cellule I27, puisque nous avons maintenant affaire à une obligations de deux ans :

```
=(1/A27)^(1/2)-1
```

À la cellule J26, nous incorporons la formule :

```
=(1/B26)-1
```

Et à la cellule J28 :

```
=(1/B28)-1
```

Nous recourrons en effet à ces deux cellules pour définir la contrainte de volatilité.

Nous revenons au haut du chiffrier et nous inscrivons dans la cellule à définir I8 la formule suivante :

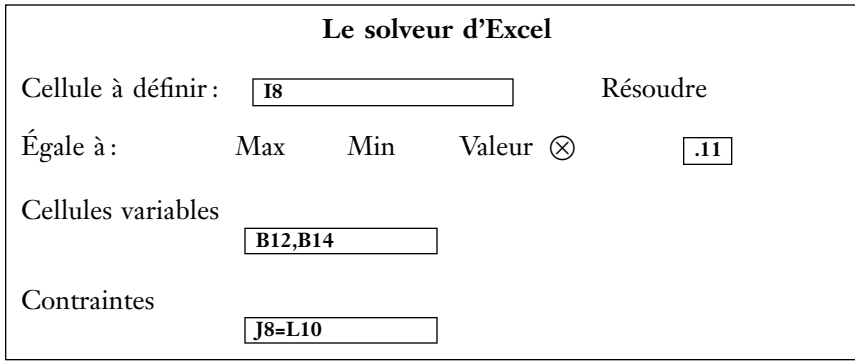
```
=I27
```

Et à la cellule J8, on écrit la formule suivante :

```
=0.5*LN(J26/J28)
```

On est maintenant en mesure d'appeler le solveur d'Excel. Les écritures sont reportées dans la figure 18.

FIGURE 18



On clique alors sur *Résoudre*. À la suite de cette opération, les modifications que subit le chiffrier apparaissent à la figure 19.

Nous retrouvons donc dans l'arbre BDT les deux taux recherchés, soit 14,32 % et 9,79 %.

Nous voulons maintenant déterminer les taux de la période suivante. Nous revenons dans l'arbre des taux et nous copions la formule contenue dans la cellule B26 dans les cellules C25, C27 et C29. Nous modifions l'exposant de la formule contenue dans la cellule I27, car c'est maintenant le rendement de l'obligation de 3 ans qui y apparaît :

```
=(1/A27)^(1/3)-1
```

Puis nous recopions la formule contenue dans la cellule J26 dans les cellules K25 et K27. Nous ne nous préoccupons plus des autres cellules, car elles ne sont pas mises à contribution pour solutionner l'arbre BDT.

Nous revenons dans la section **Modèle** du chiffrier et nous modifions comme suit le contenu de la cellule J8 :

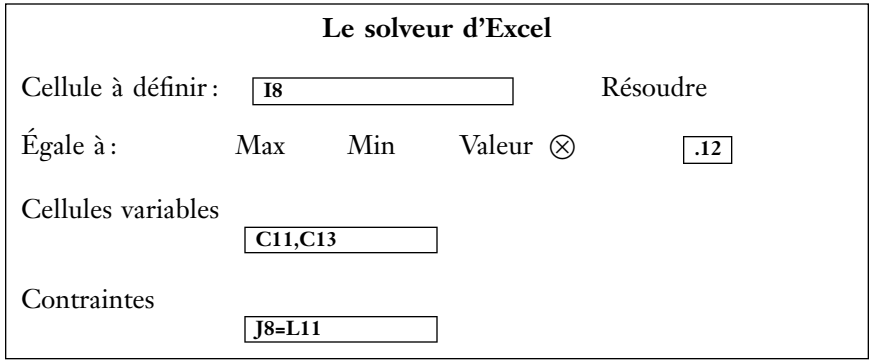
```
=0.5*LN(K25/K27)
```

Nous appelons alors le solveur où nous effectuons les écritures qui sont reportées à la figure 20.

FIGURE 19

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
7									**Taux**	**Volatilité**	**Taux**	**Volatilité**		
8						0.1			0.1100005	0.19				
9					0.1						0.1	0.2		
10				0.1		0.1					0.11	0.19		
11			0.1		0.1						0.12	0.18		
12		0.1431818		0.1		0.1					0.125	0.17		
13	0.1		0.1		0.1						0.13	0.16		
14		0.0979165		0.1		0.1					0.135	0.15		
15			0.1		0.1									
16				0.1		0.1								
17					0.1									
18						0.1								
19	**Arbre des prix**													
20									**Arbre des rendements**					
21							1							
22						1								0
23					1		1						0	
24				1		1						0		0
25			1		1		1				0		0	
26		0.8747515		1		1				0.1431818		0		0
27	0.8116217		1		1		1		0.1100005		0		0	
28		0.9108161		1		1				0.0979165		0		0
29			1		1		1				0		0	
30				1		1						0		0
31					1		1						0	
32						1								0
33							1							

FIGURE 20



On clique sur *Résoudre*. Le chiffrier prend alors la forme illustrée à la figure 21.

Nos trois taux recherchés sont donc apparus dans l'arbre. Et l'on procède de la sorte pour terminer le montage de l'arbre BDT.

FIGURE 21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
7									**Taux**	**Volatilité**	**Taux**	**Volatilité**		
8						0.1			0.1200008	0.1799995				
9					0.1						0.1	0.2		
10				0.1		0.1					0.11	0.19		
11			0.196943		0.1						0.12	0.18		
12		0.1431818		0.1		0.1					0.125	0.17		
13	0.1		0.1374026		0.1						0.13	0.16		
14		0.0979165		0.1		0.1					0.135	0.15		
15			0.0958627		0.1									
16				0.1										
17					0.1	0.1								
18						0.1								
19	**Arbre des prix**													
20									**Arbre des rendements**					
21							1							
22						1								0
23					1		1						0	
24				1		1						0		0
25			0.8354617		1		1				0.196943		0	
26		0.7499498		1		1				0.3334226		0		0
27	0.7117787		0.8791961		1		1		0.1200008		0.1374026		0	
28		0.8159634		1		1				0.2255452		0		0
29			0.9125231		1		1				0		0	
30				1		1						0		0
31					1		1						0	
32						1								0
33							1							

BIBLIOGRAPHIE

BISIÈRE, C. (1997), *La structure par terme des taux d'intérêt*, Paris, Presses universitaires de France.

BJERKSUND, P. et G. STENSLAND (1996), « Implementation of the Black-Derman-Toy Interest Rate Model », *The Journal of Fixed Income*, septembre, p. 67-75.

BLACK, F. (1976), « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, mars, p. 157-179.

BLACK, F., E. DERMAN et W. TOY (1990), « A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options », *Financial Analysts Journal*, janvier-février, p. 33-39.

BROADIE, M. et P. GLASSERMAN (1996), « Estimating Security Price Derivatives Using Simulation », *Management Science*, vol. 42, nº 2, février, p. 269-285.

CAMPBELL, J.Y., A.W. LO et A.C. MACKINLAY (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton (N.J.), Princeton University Press.

COX, J., J. INGERSOLL et A. ROSS (1985), « An Intertemporal General Equilibrium of Asset Prices », *Econometrica*, vol. 53, nº 2, mars, p. 363-384.

GOURIÉROUX, C. (1996), *Simulation Based Econometric Methods*, New York, Oxford University Press.

NEFTCI, S. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2e édition, San Diego, Academic Press.

MERTON, R.C. (1974), « On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, vol. 29, nº 2, mai, p. 449-470.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

WEI, J.Z. (1996), *A Simple Approach to Bond Option Pricing*, document de travail, University of Saskatchewan, département de finance et de management.

CHAPITRE

5

VARIATIONS SUR LES ASPECTS THÉORIQUES DE LA VaR AVEC APPLICATIONS VISUAL BASIC DU CALCUL DE LA VaR SELON LA MÉTHODE DU *BOOTSTRAPPING* ET SELON L'EXPANSION DE CORNISH-FISHER[1]

Les mesures du risque ont bien évolué depuis que Markowitz a avancé sa célèbre théorie de la diversification de portefeuille à la fin des années 1950, théorie qui devait révolutionner la gestion de portefeuille moderne. L'écart-type était alors la mesure du risque d'un portefeuille efficient. Mais pour un titre, cette mesure n'est pas appropriée. En effet, dans le cas d'un titre individuel, le risque est représenté par la covariance de son rendement avec celui des autres titres qui constituent un portefeuille bien diversifié. L'écart-type du rendement d'un titre comprend les risques diversifiable et non diversifiable. Or, seul le risque non diversifiable est rémunéré par le marché. Ce risque est représenté par la covariance entre le rendement du titre et les rendements des titres qui constituent un portefeuille hautement diversifié.

---

1. Pour écrire ce chapitre, nous nous sommes inspirés de : Théoret, R. (1999), *Traité de gestion bancaire*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec ; Théoret, R. et P. Rostan (2000), *Empirical Comparative Study of Monte Carlo Simulation Methods versus Historical Methods to Estimate Value at Risk*, Montréal, Centre de recherche en gestion, École des sciences de la gestion, Université du Québec à Montréal, CRG 19-2000 ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec ; Benninga, S. (2000), *Financial Modeling*, Cambridge, The MIT Press ; Bessis, J. (1998), *Risk Management in Banking*, New York, Wiley ; Alexander, C. (1996), *The Handbook of Risk Management and Analysis*, New York, Wiley ; Esch, K. *et al.* (1997), *Value at Risk : vers un risk management moderne*, Bruxelles, DeBoeck ; Das, S. (1997), *Risk Management and Financial Derivatives*, New York, McGraw-Hill.

Les théories du risque qui ont emboîté le pas à celles de Markowitz se sont attachées aux facteurs qui déterminent le risque d'un titre de même qu'à l'équilibre des marchés financiers. Durant les années 1960, Sharpe a proposé le modèle de l'évaluation des actifs financiers, soit le MÉDAF ou le CAPM[2] en anglais. Ce modèle est monofactoriel en ce sens qu'il ne distingue qu'un seul facteur explicatif du risque d'un titre, soit la corrélation entre le rendement de ce titre et celui du portefeuille du marché. C'est ce qu'on appelle le risque systématique[3] du titre, catégorie de risque qui n'est pas diversifiable. Le risque non systématique, ou risque idiosyncratique, est celui qui est particulier à la compagnie qui émet le titre. Comme il est diversifiable, il n'est pas rémunéré par le marché. À l'intérieur de la théorie du CAPM, le risque systématique d'un titre équivaut à son bêta, qui est une mesure relative du risque établie en comparaison avec le bêta du portefeuille du marché qui, lui, est égal à un.

Au milieu des années 1970 est apparu un autre modèle du risque basé sur l'absence d'arbitrage : l'APT, acronyme de l'expression : *Arbitrage Pricing Theory*. Ce modèle reconnaît que le risque est un phénomène multidimensionnel qui s'explique par plusieurs facteurs. Le modèle APT est donc multifactoriel. Le bêta d'un titre pour un facteur donné est la sensibilité relative du rendement du titre à ce facteur. L'une des faiblesses du modèle APT est qu'il reste muet quant à l'identité des facteurs qui déterminent les rendements des titres.

Récemment, une mesure absolue du risque était proposée : la VaR. Cet acronyme, ***Value at Risk***, désigne une mesure qui s'implante de plus en plus dans la gestion des institutions financières. Qui plus est, cette mesure permet d'évaluer les risques de type asymétrique, comme celui qui est associé aux options, l'écart-type et le bêta ne permettant pas de prendre en compte ce risque de façon satisfaisante.

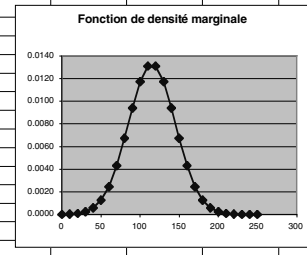
2. Acronyme de : *Capital Asset Pricing Model.*
3. Dit encore « risque de marché ».

1. VaR ET LOI NORMALE

Par définition, la VaR est la perte maximale que peut subir un gestionnaire de portefeuille durant une certaine période avec une probabilité donnée. À supposer que cette probabilité soit de 95 %, la marge d'erreur ayant trait à cette perte maximale n'est que de 5 %. Pour illustrer ce concept, supposons qu'un portefeuille ait un rendement annuel espéré de 15 % (μ). L'écart-type (σ) de ce rendement est de 30 % annuellement. Nous voulons calculer la VaR annuelle avec un probabilité de 95 %. L'investissement initial dans ce portefeuille est de 100 $. Nous supposons que la distribution du rendement du portefeuille est normale. La distribution de ce portefeuille, en dollars, apparaît à la figure 1.

FIGURE 1 **Distribution du portefeuille**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	Rendement espéré	0.15							
4	Écart type	0.3							
5	Investissement initial	100							
6	X	120							
7				0.0131	<...NORMDIST(B6,(1+B3)*B5,B5*B4,FALSE)				
8			0	0.0000					
9			10	0.0000					
10			20	0.0001					
11			30	0.0002					
12			40	0.0006					
13			50	0.0013					
14			60	0.0025					
15			70	0.0043					
16			80	0.0067					
17			90	0.0094					
18			100	0.0117					
19			110	0.0131					
20			120	0.0131					
21			130	0.0117					
22			140	0.0094					
23			150	0.0067					
24			160	0.0043					
25			170	0.0025					
26			180	0.0013					
27			190	0.0006					
28			200	0.0002					
29			210	0.0001					
30			220	0.0000					
31			230	0.0000					
32			240	0.0000					
33			250	0.0000					



Nous nous sommes servis de la fonction Excel *NormDist* pour calculer cette distribution. La formule de cette fonction apparaît à la cellule D7. Elle comprend 4 arguments : 1) la variable aléatoire X qui constitue l'abscisse de la distribution, que l'on appelle aussi *cutoff* en anglais ; 2) la moyenne de la distribution, soit : $100(1 + \mu)$; 3) l'écart-type de la distribution, soit $(100 \times \sigma)$; 4) un argument qui spécifie si l'on veut une distribution cumulative ou non. Ici, nous avons inscrit *FALSE* car nous désirons la distribution marginale. Pour tracer ce graphique, nous avons recouru aux commandes suivantes du menu principal d'Excel : *Données*, *Table*.

Pour trouver la VaR pour un alpha de 5 %, nous devons calculer la valeur de l'abscisse à gauche de laquelle la surface sous la cloche est de 5 %. Il y a deux façons de procéder. Nous pouvons d'abord calculer ce point en recourant à la fonction *Norminv* d'Excel. Cette fonction comprend trois arguments : *i)* le seuil (alpha), ici égal à 5 % ; *ii)* l'espérance du portefeuille ; *iii)* l'écart-type du portefeuille. Ce calcul apparaît au tableau 1 pour le cas qui nous intéresse :

TABLEAU 1 **Calcul de la VaR pour une distribution normale**

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	Rendement espéré	0.15			
4	Écart type	0.3			
5	Investissement initial	100			
6	Niveau cible	65.65441	<…=Norminv(0.05,(1+b3)*b5,b4*b5)		

La VaR annuelle pour une probabilité de 95 % est donc de :

$$100 - 65{,}65 = 34{,}35 \$$$

On aurait pu également recourir à une table normale pour obtenir ce résultat. Pour un alpha de 5 %, la table normale lui associe une valeur égale à 1,655. La perte par dollar est donc de :

$$\text{Perte} = \mu - 1{,}655\sigma = 0{,}15 - 1{,}655(0{,}30) = -0{,}3435 \qquad (1)$$

Comme le portefeuille se chiffre ici à 100 $, la perte annuelle maximale avec une probabilité de 95 %, soit la VaR, est égale à 34,35 $.

L'autre façon de procéder est de recourir au solveur d'Excel[4]. Pour ce faire, on efface la formule dans la cellule B6 et on met un nombre quelconque à la place. Dans la cellule B7, on écrit la formule de la fonction normale de probabilité cumulative telle qu'elle apparaît au tableau 2. L'argument *TRUE* dans la fonction indique que l'on désire la fonction cumulative. Puis on appelle le solveur. On lui indique que la cellule-cible est B7, que sa valeur doit être de 0,05 et que cette valeur doit être obtenue en modifiant la cellule B6. Le résultat apparaît également au tableau 2.

TABLEAU 2 **Calcul de la VaR à l'aide du solveur d'Excel**

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	Rendement espéré	0.15				
4	Écart type	0.3				
5	Investissement initial	100				
6	Niveau cible	65.65				
7		0.05	<...=NORMDIST(b6,(1+b3)*b5,b4*b5,TRUE)			

On calcule alors la VaR comme dans le cas précédent. La VaR qui vient d'être calculée couvre une période d'un an et l'alpha correspondant est de 5 %. Pour un alpha de 2,5 %, c'est-à-dire pour une probabilité de 97,5 %, on remplacerait 1,655 par 1,96 dans l'équation (1) et pour un alpha de 1 %, la valeur critique deviendrait 2,326. Certes, plus on réduit la marge d'erreur, plus la VaR augmente.

Nous venons de définir la VaR dans le cas le plus simple. Nous avons en effet supposé que la distribution des rendements était normale. La VaR s'exprime alors en termes d'un multiple, disons θ, calculé à partir de la loi normale et relié à la marge d'erreur recherchée, c'est-à-dire :

$$\text{VaR} = \text{portefeuille initial}(\mu - \theta\sigma\sqrt{\Delta t}) \qquad (2)$$

4. Que l'on appelle en cliquant sur *Tools*, puis sur *Solver* dans le menu principal d'Excel.

On suppose ici que l'écart-type est annualisé ; Δt représente la période sur laquelle est calculée la VaR, mesurée en fraction d'année. La VaR dépend donc de trois paramètres : le type de distribution auquel obéissent les rendements des titres qui constituent le portefeuille, la période de temps sur laquelle on mesure la VaR[5] et la marge d'erreur recherchée. Nous reviendrons ultérieurement sur ces éléments.

Une question fondamentale se pose ici : à quoi sert la VaR ? Mentionnons d'abord qu'elle se révèle d'une grande utilité puisqu'elle est mesurée en termes absolus en non en termes relatifs, tel le bêta. Une fois qu'une institution financière a calculé sa VaR globale, c'est-à-dire la perte maximale qu'elle peut encourir sur l'ensemble de son bilan pour une probabilité prédéterminée, il lui est loisible de se servir de ce montant pour déterminer le capital (avoir propre) minimal qu'elle doit maintenir pour ne pas s'exposer à la faillite. Si en effet elle détient un capital moindre et que la perte maximale se produit, son avoir propre sera négatif et elle devra peut-être déposer son bilan.

La VaR est donc très utile pour une institution financière, car elle lui permet de déterminer le niveau du capital qu'elle doit maintenir pour survivre. Quand la VaR est utilisée à cette fin, on l'appelle plus communément : CaR (***C**apital **a**t **R**isk*), c'est-à-dire que le capital que doit maintenir une institution financière est calculé ou évalué selon les risques auxquels elle est exposée. Plus le risque est important, plus elle devra maintenir un capital élevé. Cela apparaît bien raisonnable, car le capital détenu par une institution financière est d'abord et avant tout un filet de sécurité. Pour une banque, il vise à protéger les dépôts à son passif. La VaR se présente donc comme une mesure appropriée pour définir le capital réglementaire que doit détenir une institution financière. C'est pourquoi le Comité de Bâle, chapeauté par la Banque des règlements internationaux, retenait cette

5. Par exemple, la VaR calculée sur 10 jours est plus élevée que la VaR calculée sur une seule journée.

mesure pour calculer le capital réglementaire d'une institution de dépôts en 1995 qui est devenue effective en janvier 1998. Celles-ci doivent maintenant calculer leur exposition au risque en recourant à la VaR[6].

Un autre avantage de la VaR est qu'elle n'est pas assujettie à la distribution normale. Tel n'est pas le cas de l'écart-type ou du bêta, qui sont des mesures de risque reliées à la loi normale. Il est bien connu que les rendements des titres n'obtempèrent pas à une distribution normale. D'où l'avantage indéniable de la VaR sur les mesures de risque classiques qui sont enchâssées dans la distribution normale.

Nous venons d'étudier la VaR dans un contexte de normalité des rendements. Dans la section qui suit, nous considérons d'autres types de distribution des rendements pour calculer la VaR. C'est alors que la technique du *bootstrapping* nous sera d'une grande utilité, car elle ne repose pas sur une distribution a priori des rendements.

6. Les règles actuelles concernant le calcul de la VaR pour une institution financière sont les suivantes. La VaR doit être calculée sur un horizon de 10 jours pour un alpha de 1 %. On doit recourir à au moins une année d'observations pour calculer cette VaR. L'institution financière doit prendre en compte plusieurs catégories de risques : les risques associés aux instruments financiers non linéaires (produits dérivés), les risques découlant des mouvements de la structure à terme des taux d'intérêt et les risques associés à la base (écart entre le prix au comptant et le prix à terme) pour les matières premières. L'institution financière doit également se livrer au *backtesting*. Mentionnons qu'en réaction à la faillite de la banque Herstatt, les gouverneurs des banques centrales faisant partie du G-10 ont mis sur pied le Comité de Bâle en 1974 dont le rôle est de réglementer et de superviser les pratiques bancaires. Ce comité est sous la gouverne de la Banque des règlements internationaux. À la suite du krach boursier d'octobre 1987, la Banque des règlements internationaux avait fortement suggéré aux banques en 1988 de détenir un capital réglementaire égal ou supérieur à 8 % d'une somme pondérée de leurs actifs risqués. On allouait à chaque actif un coefficient de pondération proportionné à son risque. Cette mesure du risque était statique et ignorait le phénomène de la diversification des portefeuilles. Certes, les banques ne sont pas obligées de suivre les recommandations de la Banque des règlements internationaux. Mais celles qui les négligent risquent de subir la *décote* sur les marchés financiers internationaux. D'où des coûts d'emprunt plus élevés à la clef.

2. VaR ET DISTRIBUTIONS DES RENDEMENTS AUTRES QUE LA NORMALE[7]

Les intervalles de confiance que l'on peut calculer à partir de l'équation (2) de manière à estimer la VaR reposent sur une distribution normale des rendements des titres. Pour calculer une telle distribution, il n'est besoin de connaître que les deux premiers moments de celle-ci, soit l'espérance mathématique et l'écart-type. En effet, la fonction de densité de la loi normale ne fait appel qu'à ces deux premiers moments. Elle s'écrit comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{3}$$

où μ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire x et σ, son écart-type. Cette fonction permet de calculer la probabilité associée à une certaine valeur de x. Signalons que la fonction de répartition cumule les probabilités rattachées aux observations sur x. Le maximum d'une telle fonction est certes l'unité.

Mais il n'est pas dit que la distribution des rendements des titres soit normale. Les autres moments de la distribution sont alors de toute première importance pour calculer la VaR. Le troisième moment d'une distribution mesure le degré d'asymétrie de celle-ci. Il se définit comme suit :

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E\left[\left(X-\mu\right)^3\right]}{\left(V(X)\right)^{3/2}} = \frac{E\left[\left(X-\mu\right)^3\right]}{\left(\sigma^2\right)^{3/2}} \tag{4}$$

où E(.) est l'espérance et V(.), la variance. E, dans les petits échantillons, est estimée par la moyenne arithmétique des réalisations de la variable aléatoire :

$$E\left[\left(X-\mu\right)^3\right] \cong \frac{\sum_{i=1}^{T}\left(x_i-\bar{x}\right)^3}{T} = \hat{\mu}_3 \tag{5}$$

7. Pour cette section, nous nous référons à : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001), *op. cit.*

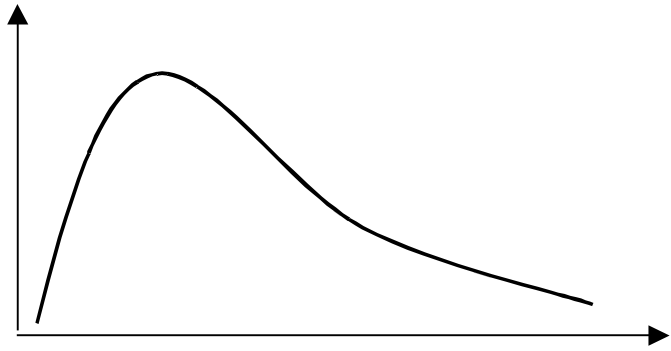
où μ est estimé par $\bar{x}$.

Par ailleurs, on estime σ^2 par $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{T}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{T}$.

Si $\dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$, alors la distribution est symétrique, à l'instar de la normale qui apparaît à la figure 1. Notons ici que dans le cas d'une distribution normale, tous les moments impairs sont nuls.

Si $\dfrac{\mu_3}{\sigma^3} > 0$, alors la densité de la distribution s'étale vers la droite, comme cela apparaît à la figure 2.

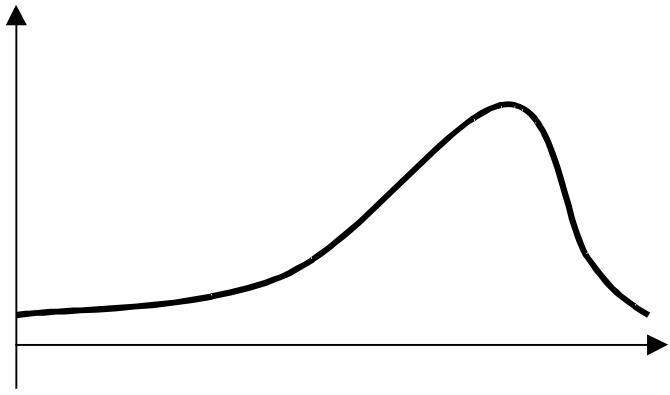
FIGURE 2 **Asymétrie positive**



Si $\dfrac{\mu_3}{\sigma^3} < 0$, alors la densité de la distribution s'étale vers la gauche, comme l'illustre la figure 3.

L'intuition ici est que l'on compare les moments empiriques de nos données aux moments théoriques d'une distribution qui est la normale.

FIGURE 3 **Asymétrie négative**



Le quatrième moment d'une distribution est le coefficient d'aplatissement. Comme son nom l'indique, le coefficient d'aplatissement d'une distribution mesure son degré d'aplatissement. Il est associé à l'épaisseur des queues (*tails*) de la distribution. On le définit comme suit :

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\left(V(X)\right)^2} = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\left(\sigma^2\right)^2} \tag{6}$$

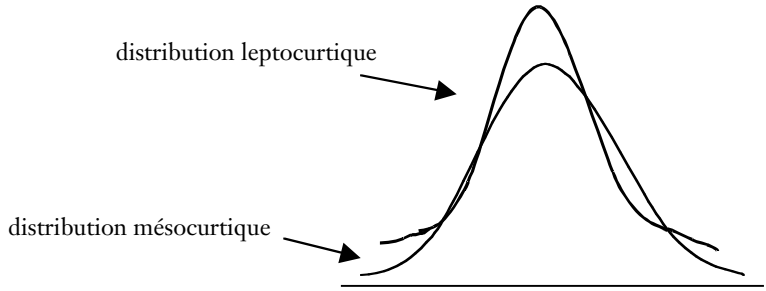
Dans la pratique on estime ce coefficient de la façon suivante. L'espérance E est estimée par la moyenne échantillonnale, c'est-à-dire :

$$E\left[\left(X-\mu\right)^4\right] \cong \frac{\sum_{i=1}^{T}\left(x_i-\bar{x}\right)^4}{T} = \hat{\mu}_4 \tag{7}$$

où μ et σ^2 sont estimés comme ci-devant.

Si $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, il n'y a pas de biais leptocurtique. On dit alors que la distribution est mésocurtique comme c'est le cas pour la distribution normale qui sert de point de référence. Par ailleurs, si $\frac{\mu_4}{\sigma^4} > 3$,

FIGURE 4 **Distribution leptocurtique**

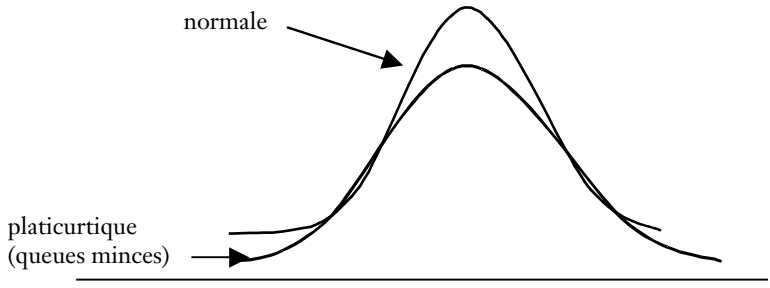


on est confronté au cas d'une distribution leptocurtique. Plus communément, on dit qu'une telle distribution présente des queues épaisses, cela toujours en rapport avec les extrémités d'une distribution normale, comme on peut le constater à la figure 4.

Finalement, si $\frac{\mu_4}{\sigma^4} < 3$, on parle de distribution platicurtique. Plus communément, on dit qu'une telle distribution présente des queues minces (*thin tails*), toujours en rapport avec les extrémités d'une distribution normale, comme on peut le visualiser à la figure 5.

Si les coefficients estimés d'asymétrie et d'aplatissement sont respectivement près de 0 et de 3 pour une distribution donnée, on

FIGURE 5 **Distribution platicurtique**



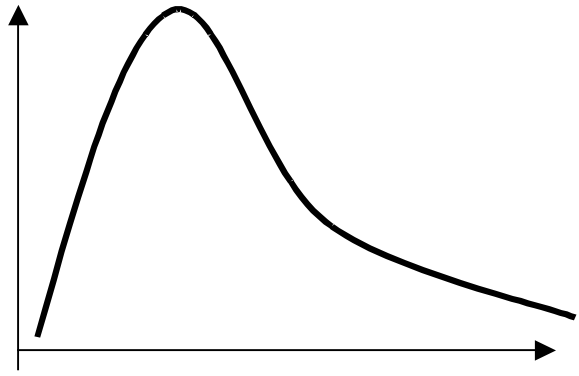
pourrait conclure qu'on est en présence d'une distribution gaussienne (normale). Certains logiciels très connus comme EViews, SAS et RATS sont déjà préprogrammés pour le calcul de ces coefficients.

Une distribution que l'on retrouve couramment dans la littérature financière, notamment pour modéliser le prix d'une action, est la distribution lognormale. Sa fonction de densité se définit comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (8)$$

Les deux premiers moments d'une telle distribution sont : 1) $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$; 2) $\text{var}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$. Il faut noter que si une variable suit une distribution lognormale, alors le logarithme de cette variable obéit à une distribution normale. Black et Scholes se sont servis de cette propriété pour formuler leur célèbre modèle du prix d'une option d'achat européenne. Ils ont supposé que le prix de l'action sous-jacente à l'option suivait une distribution lognormale. Le logarithme du prix en termes duquel est formulé le modèle suit alors une distribution normale. On peut ainsi recourir à la loi normale pour solutionner le modèle. Finalement, comme on peut le constater à la figure 6, le coefficient d'asymétrie de la distribution lognormale est positif.

FIGURE 6 **La distribution lognormale**



Comme c'est toujours le cas en statistique, un simple coup d'œil sur un graphique ne suffit pas à mesurer les déviations de ces coefficients par rapport à la normale. Comme à l'accoutumée, il faut développer un test pour juger du caractère significatif de ces déviations. Le test de Jarque et Bera (Bera et Jarque, 1981) est conçu à cette fin. Ce test est défini sur la somme des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement élevés au carré. Plus précisément, le test de Jarque et Bera (JB) est basé sur la statistique suivante :

$$JB = \frac{T - K}{6}\left[AS^2 + \frac{1}{4}\left(KUR - 3\right)^2\right] \overset{a}{\sim} \chi^2(2) \qquad (9)$$

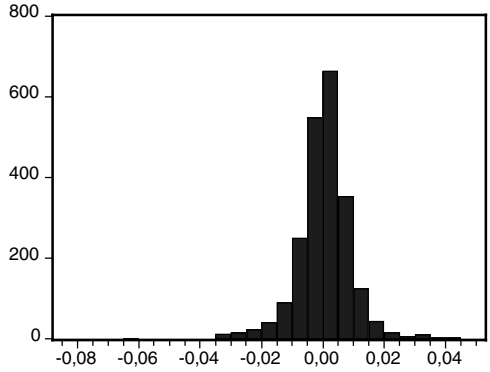
où AS est le coefficient d'asymétrie et KUR, le coefficient de *kurtosis*.

Le test d'hypothèses est le suivant. L'hypothèse nulle H0 est que la distribution est normale alors que l'hypothèse alternative H1 est que la distribution ne l'est pas. La règle consiste à rejeter H0 si la statistique JB est plus grande que χ^2 avec deux degrés de liberté au seuil de signification habituel de 5 % ou si la p-value associée à la statistique JB est inférieure à 0,05. Une mise en garde vis-à-vis de l'utilisation de ce test s'impose cependant. Ce test est asymptotique, comme l'indique le symbole $\overset{a}{\sim}$ dans la formule de JB. Il n'est donc pas exact, parce que l'on ne connaît pas la distribution de JB dans de petits échantillons. On ne connaît sa distribution que dans les grands échantillons[8]. On peut effectuer directement ce test de normalité dans le logiciel EViews.

La figure 7, construite à partir du logiciel Eviews, relate la distribution des rendements journaliers de l'indice TSE300 de la Bourse de Toronto pour la période s'étirant du début de 1992 au début de 2001. Les troisième et quatrième moments y apparaissent de même que la statistique Jarque-Bera.

8. Si l'on régressait les y sur X, on obtiendrait le vecteur $\hat{e} = y - X\hat{\beta}$. Pour tester la normalité des erreurs résiduelles, on calcule les inputs de la formule de JB comme suit : $\hat{\mu}_3 = \frac{\sum \hat{e}_i^3}{T}$; $\hat{\mu}_4 = \frac{\sum \hat{e}_i^4}{T}$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{e}_i^2}{T}$. Ce test fait partie de la catégorie des tests LM. Notons que l'on pourrait aussi le voir comme un test de Wald.

FIGURE 7 **Distribution des rendements du TSE300, 1992-2001**



Source : EViews, version 3.1.

Comme l'indique la figure 7, le troisième moment de la distribution des rendements du TSE est négatif, ce qui indiquerait un certain degré d'asymétrie négative : elle a l'aspect de la figure 3, ce qui fait état du risque d'investir dans cet indice puisque la distribution, en raison de son degré d'asymétrie, est beaucoup plus étalée vers la gauche que vers la droite. Le quatrième moment, très supérieur à 3, indique que la distribution des rendements journaliers du TSE300 est nettement leptocurtique, c'est-à-dire qu'elle a des queues épaisses en comparaison avec la distribution normale. Par ailleurs, la statistique Jarque-Bera donne à penser que la distribution des rendements du TSE300 dévie fortement de la normale.

Plusieurs analystes de la VaR supposent que la distribution des rendements des titres qui constituent un portefeuille est normale. Comme nous l'avons vu auparavant, cela facilite beaucoup les calculs en raison de la simplicité de la loi normale. Mais si la distribution réelle des rendements n'est pas normale, cela peut entraîner des erreurs de calcul importantes. En effet, supposons que la distribution des rendements d'un portefeuille soit leptocurtique, comme c'est le cas à la figure 7, et que l'analyste financier utilise une distribution normale pour calculer l'intervalle de confiance des bénéfices d'un portefeuille. S'il recherche une marge d'erreur de 1 %, il multipliera alors l'écart-type du rendement du portefeuille par 2,33 de façon à

déterminer l'intervalle de confiance du rendement du portefeuille, puisqu'il suppose une distribution normale. Mais comme la véritable distribution des rendements présente des queues épaisses, les valeurs extrêmes de sa distribution, telles les pertes maximales, sont plus probables que pour une distribution normale. Par conséquent, pour calculer l'intervalle de confiance des rendements, c'est peut-être un multiple de 4, voire de 6, qu'il aurait fallu rattacher à l'écart-type plutôt qu'un multiple de 2,33. La VaR sera donc fortement sous-estimée sous une distribution normale. Le capital que l'analyste recommandera à l'institution financière pour couvrir sa perte maximale à 99 % sera donc fortement sous-estimé. Il y a alors des risques beaucoup plus importants de faillite que si notre analyste s'était penché sur la détermination de la véritable distribution des rendements des titres qui constituent le portefeuille de l'institution financière. Nous nuancerons ces propos dans la section 4, consacrée à l'expansion de Cornish-Fisher, qui corrige les percentiles de la distribution normale pour les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, entre autres.

Comment pallier une telle situation ? Comment découvrir la distribution d'une variable aléatoire lorsqu'on ne la connaît pas ? Pour y arriver, on recourt à diverses techniques de simulation. L'une d'elles est la simulation Monte Carlo, qui permet de générer la distribution d'une variable aléatoire lorsque le processus stochastique auquel elle obéit est connu[9]. Mais la technique du *bootstrapping*, vers laquelle nous dirigeons notre collimateur dans la prochaine section, semble plus puissante puisque le seul input nécessaire pour sa mise en œuvre est une série d'observations sur une variable donnée.

9. Pour plus de détails sur ce sujet, voir : Racicot, F.-É., *Les méthodes numériques en économétrie financière*, CRG 21-2000, Montréal, École des sciences de la gestion, Université du Québec à Montréal.

3. LA TECHNIQUE DU *BOOTSTRAPPING*[10]

Les techniques de rééchantillonnage (*resampling*) se sont vu donner des noms exotiques en anglais : *jacknife* et *bootstrap* (ou *bootstrapping*) sont de ceux-là. Dans cette section, nous nous intéressons à la technique du *bootstrapping*. Son instigateur est Efron (1979)[11].

Le concept de la méthode du *bootstrapping* est simple à saisir. À partir d'un échantillon donné, telle une série statistique sur le prix d'un titre pour une période donnée, on effectue des réaménagements aléatoires de cette série, avec ou sans remise, de façon à décrypter la distribution de la variable qui fait l'objet de l'étude. Sous des conditions très générales, la distribution qui a fait l'objet de *bootstrapping* converge vers la véritable distribution quand le nombre d'observations tend vers l'infini[12].

3.1. *Bootstrapping* d'un seul titre

Pour fixer les idées, considérons la situation hypothétique suivante. Nous effectuons un placement dans l'indice TSE300 et nous voulons calculer la VaR de notre placement pour une période donnée. Pour ce faire, nous pourrions supposer que la distribution du rendement du TSE300 est normale et recourir tout simplement à l'équation (2) pour calculer sa VaR. Mais, selon la figure 7, la distribution du rendement du TSE300 n'est pas normale. Alors comment procéder ?

Benninga (2000) suggère la simulation suivante. L'input de la simulation sera ici une série des rendements journaliers du TSE300 du début de 1999 au début de 2001. On génère d'abord des nombres

10. Pour cette section, nous nous référons à : Stuart A., K. Ord et S. Arnold (1999b), *Kendall's Advanced Theory of Statistics. Volume 2A : Classical Inference and the Linear Model*, New York, Arnold ; Judge, G.G. *et al.* (1988), *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, 2e édition, New York, Wiley, chap. 9 ; Benninga, S. (2000), *op. cit.*

11. Efron, B. (1979), « Bootstrap Methods : Another Look at the Jacknife », *Annals of Statistics*, vol. 7, p. 1-26. Ce chercheur a publié par la suite plusieurs articles sur le sujet dont l'un des plus récents est : Efron, B. (1994), « Missing Data, Imputation and the Bootstrap », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, p. 463-478.

12. Cependant, lorsque les observations ne sont pas indépendantes, la méthode semble moins bien performer. À ce sujet, voir : Stuart *et al.* (1999b), p. 7.

aléatoires, un pour chaque observation. Ces nombres ont une distribution uniforme et non normale pour ne pas biaiser les résultats. Puis on classe les observations sur le TSE300 par ordre croissant des nombres aléatoires et on obtient une série réaménagée du TSE300. On associe un rendement à cette série. C'est la différence entre le TSE300 de la fin de la série et celui du début, exprimée en pourcentage du TSE300 du début de la série. Cela constitue un premier élément pour calculer la VaR. On répète cette procédure un grand nombre de fois de façon à générer la distribution empirique du rendement du TSE 300. On peut alors calculer la VaR du portefeuille en trouvant le rendement associé au seuil alpha recherché.

Pour fixer les idées, nous empruntons ici à Benninga (2000) un programme Visual Basic que nous aurons l'occasion de modifier à souhait par la suite. Pour classer une série, nous recourons à la commande *Sort* d'Excel 2000 (version anglaise), qui classe une série selon différents ordres. On accède à cette commande en cliquant sur la commande *Data* du menu principal, puis sur *Sort*. Mais comme nous voulons ici intégrer cette fonction dans le cadre d'un programme Visual Basic de façon à calculer la VaR du TSE300 par la méthode du *bootstrapping*, nous devons connaître la syntaxe de la commande *Sort*. La meilleure façon d'y parvenir est d'enregistrer la macro pertinente dans Visual Basic.

Nous voulons classer la série X qui apparaît au tableau 3 sur un chiffrier Excel 2000 (version anglaise) par ordre croissant d'une variable aléatoire. Pour ce faire, nous insérons la fonction *Rand()* dans la cellule B2 et nous la recopions dans les cellules B3 à B6. Le résultat apparaît au tableau 4.

TABLEAU 3 **Série à classer par ordre croissant de nombres aléatoires**

	A	B
1	X	
2	7	
3	8	
4	10	
5	12	
6	15	

TABLEAU 4 **Génération d'une variable aléatoire pour classer la série X**

	A	B
1	X	
2	7	0.399099
3	8	0.787238
4	10	0.678131
5	12	0.136128
6	15	0.122104

Puisque nous avons inséré des variables aléatoires dans la colonne B, elles se recalculent régulièrement. Pour éviter ceci, on les copie dans la même colonne, puis on effectue un collage spécial dans lequel on spécifie que l'on veut des valeurs « fixes » dans cette colonne.

Puis on enregistre la macro correspondant à la commande *Sort*. On clique sur *Tools* dans le menu principal, puis sur *Macro*. On clique ensuite sur *Record New Macro*. Une boîte apparaît dans laquelle on demande un nom pour la macro et une clef d'exécution. Nous retenons le nom suggéré et nous choisissons la clef *Ctrl+a* pour l'exécution. Nous cliquons sur *OK* et nous sommes alors en mode d'enregistrement de la macro. Une petite boîte pour arrêter l'exécution au moment voulu apparaît à l'écran.

Nous sélectionnons alors les cellules A2 à B6 et nous cliquons sur *Data* dans le menu principal, puis sur *Sort*. Apparaît alors à l'écran une boîte qui nous demande certaines spécifications. On doit d'abord choisir la colonne B comme série servant au classement de la colonne A. On spécifie que l'on veut un classement par ordre croissant des nombres qui sont dans la colonne B. Puis on lui indique qu'il n'y a pas d'entête au niveau de la sélection des séries. On passe ensuite aux options pour indiquer que l'on veut un classement normal, c'est-à-dire de haut en bas. On quitte par la suite la commande *Sort* en cliquant sur *OK* et on arrête l'enregistrement de la macro. Le résultat du classement apparaît au tableau 5.

TABLEAU 5 **Variable X classée par ordre croissant d'une variable aléatoire**

	A	B
2	15	0.122104
3	12	0.136128
4	7	0.399099
5	10	0.678131
6	8	0.787238

Les nombres aléatoires sont bien dans un ordre croissant dans la colonne B et la série X a été classée par ordre croissant de ce nombre. Pour visualiser l'enregistrement de la macro, on clique simultanément sur les touches *Alt+F11*, puis sur *Module*, puisque la macro a été insérée dans un module, puis sur *module 1*. La macro qui apparaît alors à l'écran se retrouve au tableau 6.

TABLEAU 6 **La syntaxe de la commande *Sort* en langage Visual Basic**

```
Sub Macro1()
'
' Macro1 Macro
' Macro recorded 6/30/2001 by dsa
'
' Keyboard Shortcut: Ctrl+a
'
   Range("A2:B6").Select
   Application.CutCopyMode = False
   Selection.Sort Key1:=Range("A2"), Order1:=xlAscending,
      Header:=xlNo, _
      OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom
End Sub
```

Quelques mots sur le programme qui se retrouve au tableau 6. La formule : *Range("A2:B6").Select* permet de sélectionner le rectangle délimité par les cellules A2 à B6. La syntaxe de la commande *Sort* apparaît sur les deux lignes qui commencent par *Selection.Sort*. On voit que cette syntaxe relève d'un langage sibyllin qui ne peut être

déchiffré que par l'enregistrement de la macro qui effectue cette opération. Lorsque l'on ne connaît pas la syntaxe d'une commande dans Visual Basic, il est donc recommandé d'enregistrer tout bêtement la macro qui correspond à cette commande. La commande *Record New Macro* enregistre en effet tout ce que vous faites tant que vous ne la stoppez pas !

Nous voulons tout d'abord calculer la VaR d'un placement hypothétique dans le TSE300 à partir des cotes journalières de cette série débutant en janvier 1999 et se terminant en mars 2001. Nous recourons à la méthode du *bootstrapping* pour y arriver. La mise en forme du chiffrier qui a été utilisé pour effectuer cette simulation se retrouve au tableau 7.

TABLEAU 7 **Chiffrier Excel pour *bootsrapper* le TSE300**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		TSE300					Rendemen	-0.0643444		rMax	0.728978
2	1/4/99	10235.39	4.53E-05							rMin	-0.44128
3	1/5/99	6889.77	0.000666								
4	1/6/99	9557.65	0.001353				startime	4:48:57 PM			
5	1/7/99	7665.62	0.006276				elapsed	05:26.0			
6	1/8/99	7292.58	0.006767								
7	1/11/99	7063.29	0.007993				iiterations	1000			
8	1/12/99	7271.3	0.00949								
9	1/13/99	9461.57	0.01059								
10	1/14/99	7042.46	0.014284								
11	1/15/99	7193.21	0.014477								
12	1/18/99	8899.1	0.015301								
13	1/19/99	8937.8	0.016483								
14	1/20/99	8822.48	0.01672								
15	1/21/99	7693.11	0.016735								
16	1/22/99	7023.62	0.019041								
17	1/25/99	6970.81	0.019404								
18	1/26/99	10701.4	0.020311								
19	1/27/99	9836.5	0.02048								

Nous n'avons pas inclus toutes les cotes du TSE300 dans le chiffrier du tableau 7 du fait de la longueur de la série. Plusieurs cellules ont été nommées de façon à ce que le programme Visual Basic qui effectuera la simulation puisse les reconnaître. Pour nommer une cellule, vous cliquez dans la case réservée au nom de la cellule. Vous effacez ce nom, disons C2, et vous inscrivez le nom désiré à la place. Par exemple, la cellule C2 porte le nom TSE en plus de C2. Le programme Visual Basic l'identifiera comme TSE.

Rappelons la procédure de la simulation. Des nombres aléatoires sont générés dans la colonne C du tableau 7, autant que la série du TSE comporte d'observations. La série du TSE est ensuite classée par ordre croissant des nombres aléatoires. Cela constitue une itération. On retient le rendement obtenu sur le TSE au cours de cette itération en faisant la différence entre la cote finale et la cote initiale de la nouvelle série du TSE, rapportée à la cote initiale. La formule qui apparaît dans la cellule H1, qui comptabilise le rendement moyen de l'itération, est donc la suivante :

```
=(B555/B2)-1
```

la dernière observation de la série simulée étant B555. On reporte ensuite le résultat dans la colonne O (tableau 10), qui enregistre le résultat de chaque itération. La première itération est alors terminée.

Comme nous le disions, nous avons nommé des cellules dans le chiffrier pour que le programme Visual Basic puisse les reconnaître. Celles-ci apparaissent au tableau 8.

TABLEAU 8 **Noms de certaines cellules du chiffrier**

Cellule	Nom
C2	TSE
H1	rmoyen
H4	starttime
H5	elapsed
H7	iiterations
O2	returndata

Les cellules H4 et H5 enregistrent l'heure à laquelle a débuté la simulation et le temps qu'elle a duré[13]. La cellule H7 spécifie le nombre d'itérations désiré. La cellule O2 spécifie l'endroit où le programme enregistre les résultats, ici le rendement correspondant à chaque itération.

13. Ces cellules doivent donc être formatées en mode temps.

Forts de cette mise en forme, nous pouvons écrire le programme de la simulation, qui est retranscrit au tableau 9. Pour y arriver, nous touchons simultanément les touches du clavier *Alt* et *F11* pour appeler Visual Basic. Puis, dans le menu principal de Visual Basic, nous cliquons sur *Insert*, puis sur *Module*. Nous sommes alors prêt à enregistrer notre programme.

TABLEAU 9 **Programme Visual Basic pour *bootstrapper* le TSE300**

```
Sub Varin()

Range("starttime") = Time
Range("O1:O15000").ClearContents
Application.ScreenUpdating = False
For Iteration = 1 To Range("iiterations")
For Row = 1 To 554
Range("TSE").Cells(Row, 1) = Rnd
Next Row
Range("B2:C555").Select
   Selection.Sort Key1:=Range("C2"), Order1:=xlAscending,
      Header:=xlNo, _
      OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom

Range("returndata").Cells(Iteration, 1) = Range("rmoyen")
Next Iteration

Range("elapsed") = Time - Range("starttime")

End Sub
```

Quelques commentaires sur ce programme[14]. La première ligne indique d'insérer l'heure du début de la simulation dans la cellule nommée *starttime* dans le chiffrier. La deuxième ligne indique d'effacer

14. Il y a deux façons de mettre ce programme en branle. La première est de lui définir une clef. Pour ce faire, on clique sur la commande *Tools* du menu principal, puis sur *Macro* et encore une fois sur *Macro*. On clique alors sur le nom de la macro à laquelle on veut donner une clef, puis sur *Options*. Dans la section *Short key* de la boîte, on introduit une lettre dans la case *Ctrl+*, disons *a*. Chaque fois que l'on pressera simultanément les touches *Ctrl* et *a*, la macro se mettra en branle. Une autre façon d'enclencher la macro est de cliquer sur l'icône *Run Sub* du menu principal de Visual Basic. Cette icône reproduit la touche *Play* d'un système de son ou d'un magnétoscope.

le contenu des cellules O1 à O15000. C'est en effet dans cette colonne que seront répertoriés les résultats de chaque itération. La commande : *Application.Screenupdating=False* est là pour éviter qu'Excel n'enregistre toutes les étapes de la simulation. Avec cette commande, l'on pourra demeurer sur la même feuille d'une itération à l'autre. Sans cette commande, on aurait autant de feuilles que d'itérations, ce qui deviendrait alarmant, c'est le moins qu'on puisse dire.

Le programme comporte une première boucle :

```
For Iteration = 1 To Range("iiterations")
                    ...
Next Iteration
```

Cette boucle indique au programme d'effectuer le nombre d'itérations contenu dans la cellule nommée *iiterations* du chiffrier.

Le programme comporte une seconde boucle :

```
For Row = 1 To 554
                ...
Next Row
```

Cette boucle indique d'insérer un nombre aléatoire dans la cellule nommée TSE, qui est la cellule C2, et de remplir les cellules suivantes de cette colonne jusqu'à la ligne 554, comme le commande la boucle. La commande suivante permet cette insertion :

```
Range("TSE").Cells(Row, 1) = Rnd
```

où *Rnd* désigne « variable aléatoire » dans Visual Basic.

Une fois la colonne C remplie de nombres aléatoires, on peut alors classer la série du TSE par ordre croissant des variables aléatoires comme cela a été indiqué auparavant. C'est ce qu'effectue la commande *Selection.Sort*, dont nous avons découvert la syntaxe par simple enregistrement de la macro pertinente. À remarquer que le *Range* spécifié, soit C2, est celui du début de la série de variables aléatoires.

La commande :

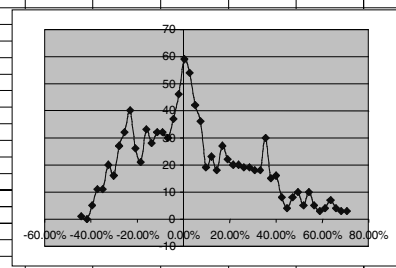
```
Range("returndata").Cells(Iteration, 1) = Range("rmoyen")
```

indique de reporter le résultat de l'itération, qui se trouve dans la cellule nommée *rmoyen*, dans la cellule nommée : *returndata*. La syntaxe *Cells* indique que la cellule O2, nommée *returndata*, sera d'abord remplie, soit la *Cells(1,1)*, puisque l'on est encore à la première itération. Les autres cellules seront remplies dans l'ordre des itérations.

La première itération est maintenant terminée. La procédure se répète en vertu de la boucle qui commande les itérations et génère 1000 rendements moyens dont il est temps de tracer la distribution. C'était en effet là l'objectif de la procédure du *bootstrapping*. Les résultats de la simulation apparaissent dans la colonne O du tableau 10.

TABLEAU 10 **Chiffrier final du *bootstrapping* du TSE300**

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1			Bins	Frequence	Cumul.							
2	-0.1519377	1	-44.13%	1	0.10%							
3	0.13334252	2	-41.79%	0	0.10%							
4	0.24828427	3	-39.45%	5	0.60%							
5	-0.25333122	4	-37.11%	11	1.70%							
6	-0.0989036	5	-34.77%	11	2.80%							
7	-0.05821718	6	-32.43%	20	4.80%							
8	0.14001748	7	-30.08%	16	6.40%							
9	-0.35540171	8	-27.74%	27	9.10%							
10	0.23027556	9	-25.40%	32	12.30%							
11	0.55162304	10	-23.06%	40	16.30%							
12	-0.0013449	11	-20.72%	26	18.90%							
13	0.48547081	12	-18.38%	21	21.00%							
14	0.41338192	13	-16.04%	33	24.30%							
15	-0.17090294	14	-13.70%	28	27.10%							
16	0.11316556	15	-11.36%	32	30.30%							
17	0.28256049	16	-9.02%	32	33.50%							
18	0.01874663	17	-6.68%	30	36.50%							
19	-0.32817803	18	-4.34%	37	40.20%							
20	0.32164276	19	-2.00%	46	44.80%							
21	-0.28148972	20	0.34%	59	50.70%							
22	-0.09365043	21	2.68%	54	56.10%							
23	0.06552027	22	5.02%	42	60.30%							
24	-0.18251872	23	7.36%	36	63.90%							
25	0.13089187	24	9.70%	19	65.80%							
26	-0.11678212	25	12.04%	23	68.10%							
27	0.00721073	26	14.38%	18	69.90%							
28	-0.30545654	27	16.73%	27	72.60%							
29	0.12920488	28	19.07%	22	74.80%							
30	0.14738985	29	21.41%	20	76.80%							
31	0.00838192	30	23.75%	20	78.80%							
32	-0.2052579	31	26.09%	19	80.70%							
33	0.45701048	32	28.43%	19	82.60%							
34	0.34637657	33	30.77%	18	84.40%							
35	-0.2702949	34	33.11%	18	86.20%							
36	0.16044986	35	35.45%	30	89.20%							
37	-0.2822838	36	37.79%	15	90.70%							
38	0.05121386	37	40.13%	16	92.30%							
39	0.15291653	38	42.47%	8	93.10%							
40	0.14666799	39	44.81%	4	93.50%							
41	-0.11049552	40	47.15%	8	94.30%							
42	0.09096978	41	49.49%	10	95.30%							
43	0.02834678	42	51.83%	5	95.80%							
44	0.19978831	43	54.17%	10	96.80%							
45	-0.23803734	44	56.51%	5	97.30%							
46	0.02166637	45	58.85%	3	97.60%							
47	0.08516526	46	61.20%	4	98.00%							
48	-0.01094322	47	63.54%	7	98.70%							
49	0.03800681	48	65.88%	4	99.10%							
50	-0.11927685	49	68.22%	3	99.40%							
51	0.39145659	50	70.56%	3	99.70%							



Pour calculer la VaR, nous devons d'abord calculer la distribution des rendements du TSE300. De façon à établir les subdivisions (*bins*) de la distribution, nous avons prévu deux formules dans notre chiffrier (tableau 7). D'abord, une formule qui calcule le maximum des rendements dans la colonne O (MAX O:O) et une autre qui en calcule le minimum (MIN O:O). Le premier *bin* que nous introduisons dans la cellule Q2 est K2, soit le minimum des rendements. Nous fixons ici le nombre de bins à 50. Nous entrons donc la formule suivante dans la cellule Q3 :

```
=($K$1-$K$2)/50 + Q2
```

l'expression entre parenthèses étant la différence entre le rendement maximal et le rendement minimal. Puis nous recopions cette formule des cellules Q4 à Q51. Pour chacun de ces *bins*, nous devons calculer la fréquence des observations qui lui correspond. Pour ce faire, nous recourons à la fonction *Frequency* d'Excel. Nous sélectionnons les cellules R2 à R51 et nous écrivons la formule suivante :

```
=Frequency(O:O, Q2:Q51)
```

Puis nous pressons simultanément les touches au clavier *Crtl+Maj+Entrée*[15] et les fréquences apparaissent dans la colonne R.

Dans la colonne S, nous calculons la probabilité cumulative associée aux *bins* puisque cette colonne nous servira à calculer la VaR. Dans la cellule S2, nous avons inscrit :

```
=R2/iiterations
```

c'est-à-dire la fréquence marginale du premier *bin* divisée par le nombre d'itérations, ici 1000. Puis nous cumulons les fréquences. À la cellule S3, nous avons inscrit :

```
=R3/iiterations + S2
```

puis nous recopions cette formule jusqu'au *bin* final, c'est-à-dire jusqu'à la cellule S51.

15. La fonction *Frequency* est en effet une fonction de type *Array* (Rangée) dans le langage Excel comme le sont d'ailleurs les matrices, c'est-à-dire qu'elle lie ensemble plusieurs cellules. Il faut alors presser les touches *Crtl+Maj+Entrée* pour la mettre à exécution et non pas seulement sur la touche *Entrée*.

Au tableau 10 apparaît également la distribution des rendements du TSE300 qui a été obtenue par la méthode du *bootstrapping*. Pour la construire, nous sélectionnons les cellules appropriées des colonnes Q et R puis nous cliquons sur la commande *Chart* dans le menu principal. Nous choisissons la catégorie de graphique *XY-Scatter*. Le reste n'est qu'une simple réponse aux options que présente le menu de construction de graphiques d'Excel.

On est maintenant à même de constater que la distribution des rendements journaliers du TSE300 dévie beaucoup de la normale. Il serait donc très hasardeux de calculer la VaR du TSE300 en recourant à la loi normale. Elle est même bimodale. Les rendements nuls sont par ailleurs les plus fréquents.

On peut calculer la VaR du TSE300 en interpolant la fonction de probabilité cumulative qui apparaît à la colonne S. Pour un alpha de 1 %, le rendement que lui associe la fréquence cumulative serait de –38,6 % et pour un alpha de 5 %, de –32,1 %. Ce résultat est obtenu sur une période de 554 jours, soit le nombre d'observations de la simulation. Pour un alpha de 1 %, le rendement associé à la VaR serait d'environ –0,07 % par jour. Sur 10 jours, ce qui est un intervalle courant pour calculer la VaR, la perte serait de 7000 $ sur un portefeuille d'un million de dollars.

3.2. *Bootstrapping* d'un portefeuille de titres

Nous nous attaquons maintenant au *bootstrapping* des rendements d'un portefeuille de titres. Nous considérons ici trois entreprises canadiennes œuvrant dans le secteur de la biotechnologie et cotées à la Bourse de Toronto : Axcan Pharma Inc., Glyco Biomedical Inc. et Theratechnologies Inc. Nous les désignerons par leur cote boursière respective soit : AXP, GBL et TH. Nous disposons de données journalières sur les cotes de ces titres pour la période du début de janvier 1999 au mois de mars 2001, soit un total de 574 observations. Ces actions ne versent aucun dividende.

À l'instar de la procédure utilisée pour transposer la méthode du *bootstrapping* au calcul de la VaR du TSE300, nous utilisons dans un premier temps une variable aléatoire différente pour classer chacun des trois titres. Le programme Visual Basic utilisé à cette fin apparaît au tableau 11.

TABLEAU 11 **Programme Visual Basic pour *bootstrapper* 3 titres sans prise en compte de leur corrélation historique**

```
Sub ValueatRisk1()
Range("starttime") = Time
Range("O1:O15000").ClearContents
Application.ScreenUpdating = False
For Iteration = 1 To Range("iiterations")
For Row = 1 To 573
Range("AXPRAND").Cells(Row, 1) = Rnd
Next Row
For Row = 1 To 573
Range("GBLRAND").Cells(Row, 1) = Rnd
Next Row
For Row = 1 To 573
Range("THRAND").Cells(Row, 1) = Rnd
Next Row
Range("B2:C574").Select
   Selection.Sort Key1:=Range("C2"), Order1:=xlAscending,
      Header:=xlNo, _
      OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom
   Range("D2:E574").Select
   Selection.Sort Key1:=Range("E2"), Order1:=xlAscending,
      Header:=xlNo, _
      OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom
   Range("F2:G574").Select
   Selection.Sort Key1:=Range("G2"), Order1:=xlAscending,
      Header:=xlNo, _
      OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom


Range("returndata").Cells(Iteration, 1) = Range("rmoyen")
Next Iteration
Range("elapsed") = Time - Range("starttime")

End Sub
```

Le tableau 12 donne l'allure générale du chiffrier dans ce cas.

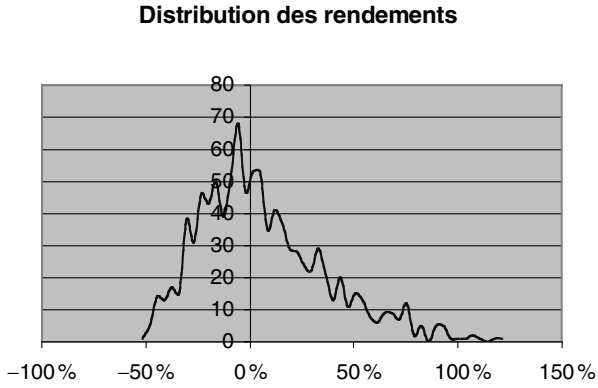
La cellule C2 a été nommée *AXPRAND* ; la cellule E2, *GBLRAND* et la cellule G2, *THRAND*. Ce sont ces noms qui apparaissent dans le programme Visual Basic (tableau 11) et qui servent à insérer les variables aléatoires dans les cellules.

TABLEAU 12 **Chiffrier du *bootstrapping* de trois titres sans prise en compte de leur corrélation historique**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		AXP		GBL		TH		Portefeuille			Rendement	-14.29%	rMAX	124.77%	-38.84%
2	1/1/99	9.2	0.000167	6.8	0.001091	5	0.007113099	21					rMin	-51.60%	-46.95%
3	1/4/99	9.8	0.006143	6.05	0.00191	5.2	0.00854224	21.05							32.48%
4	1/5/99	11.7	0.007217	7.5	0.003407	9.25	0.017462015	28.45			startime	3:23:56 PM			1.07%
5	1/6/99	7	0.008459	6.2	0.006903	12	0.017480493	25.2			elapsed	10:56.0			13.00%
6	1/7/99	15	0.00879	9.2	0.009418	8.3	0.017623723	32.5							-22.99%
7	1/8/99	10.15	0.009539	6.65	0.010701	10.75	0.018807471	27.55			iiterations	1000			41.37%
8	1/11/99	6.2	0.013214	6.8	0.011409	11.95	0.020773172	24.95							-32.85%
9	1/12/99	7.45	0.01469	6.5	0.01323	3.8	0.022529185	17.75							-13.26%
10	1/13/99	15.2	0.020979	5.55	0.014458	12.25	0.024957716	33							8.12%
11	1/14/99	9.95	0.024017	5.45	0.015619	4.75	0.028709233	20.15							-7.37%
12	1/15/99	15.2	0.024357	8.35	0.018087	9	0.029308498	32.55							-0.17%
13	1/18/99	18.5	0.024634	5.2	0.020659	4.9	0.030032635	28.6							7.82%
14	1/19/99	8.4	0.025367	6.6	0.021486	8.65	0.032485604	23.65							2.91%
15	1/20/99	10.8	0.025905	6.2	0.02232	4.7	0.03264457	21.7							-26.07%
16	1/21/99	10.95	0.026744	6.65	0.023269	4.6	0.033358872	22.2							42.24%
17	1/22/99	9.65	0.026872	6	0.025281	5.15	0.033763409	20.8							-14.74%
18	1/25/99	9.9	0.029379	6	0.02566	5	0.034745574	20.9							12.32%

La distribution des rendements du portefeuille qui découle de l'application de la technique du *bootstrapping* pour 1000 itérations apparaît à la figure 8.

FIGURE 8 **Distribution des rendements du portefeuille résultant du programme du tableau 11**

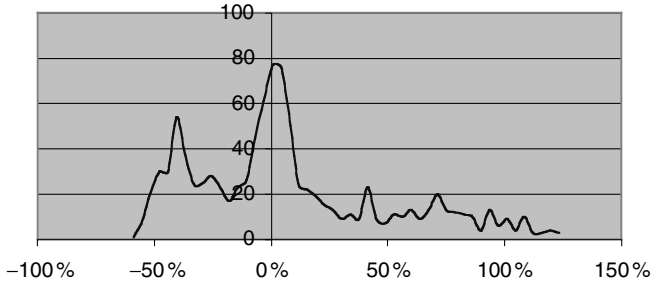


Comme on peut le constater à la figure 8, la distribution des rendements du portefeuille des trois titres a un coefficient d'asymétrie nettement positif, ce qui diminue de beaucoup son lien de parenté avec la distribution normale. Selon la fonction de distribution cumulative, le rendement associé à la VaR pour un alpha de 1 % serait de –47,4 %, soit –0,08 % par jour.

La méthode que nous avons utilisée pour *bootstrapper* le portefeuille des trois titres n'est pas satisfaisante, car elle ne prend pas en compte toute l'information qui est incorporée dans l'échantillon. Elle néglige en effet la corrélation qui existe entre les rendements des trois titres. Comme nous avons utilisé une variable aléatoire différente pour les trois titres, nous avons supposé implicitement que la corrélation entre les rendements des trois titres était quasi nulle, ce qui semble être la situation la plus favorable au plan de la diversification du portefeuille, car, habituellement, la corrélation entre les rendements des titres est positive.

Une façon rapide de pallier ce problème est d'appliquer la méthode du *bootstrapping* à l'ensemble du portefeuille plutôt qu'à chacun des trois titres. La distribution des rendements du portefeuille qui en résulte se retrouve à la figure 9.

FIGURE 9 **Distribution des rendements obtenus par un *bootstrapping* de l'ensemble du portefeuille**



La distribution qui apparaît à la figure 9, obtenue par un *bootstrapping* de l'ensemble du portefeuille en faisant abstraction des titres qui le constituent, diffère nettement de celle qui apparaît à la figure 8, qui elle résulte d'un *bootstrapping* effectué sur chaque titre. La distribution de la figure 9 ressemble plutôt à celle du TSE300 (tableau 10) qui elle-même fut construite sur l'ensemble de l'indice en ne prenant pas en compte les titres qui le constituent. Elle est bimodale, comme cela est le cas pour le TSE300. La distribution des rendements du portefeuille comporte en effet un mode au niveau des rendements nuls et un autre dans la zone des rendements négatifs importants, ce qui, certes, se révèle très défavorable s'agissant du calcul de la VaR. Cela atteste les risques substantiels reliés à l'investissement dans le secteur de la biotechnologie.

Pour le portefeuille analysé, le rendement associé à un alpha de 1 % est ici de –55,1 % sur l'ensemble de la période, ce qui est nettement supérieur au taux obtenu lors du *bootstrapping* de chacun des titres. Cela était anticipé puisque ce dernier supposait que la corrélation entre les rendements des titres est nulle, ce qui n'est pas le cas.

Une façon qui nous semble plus satisfaisante pour effectuer le *bootstrapping* du portefeuille, parce qu'elle prélève davantage d'informations dans l'échantillon, est de préserver la corrélation historique entre les rendements des trois titres à chaque itération. La matrice de corrélation des cotes boursières des trois titres pour la période étudiée se retrouve au tableau 13.

TABLEAU 13 **Matrice de corrélation des cours AXP, GBL et TH**

	AXP	**GBL**	**TH**
AXP	1	–0,023	0,868
GBL	–0,023	1	0,244
TH	0,868	0,244	1

La façon de procéder est la suivante. Il suffit de classer les titres avec la même variable aléatoire. Ici, pour chaque itération, on introduit une variable aléatoire dans la colonne à droite de AXP et on la recopie dans les colonnes limitrophes aux deux autres titres. On s'assure de la sorte que la corrélation des rendements que renferme le tableau 13 est préservée d'une itération à l'autre. Le tableau 14 fait état du programme Visual Basic que nous avons créé à cette fin.

Le chiffrier a la même apparence que celui du tableau 12. La distribution des rendements qui résulte de cette simulation se lit à la figure 10.

Cette distribution ressemble évidemment beaucoup à celle de la figure 9 bien que certaines différences soient observables, notamment au niveau du premier mode qui est moins prononcé. Pour un alpha de 1 %, le rendement est de –54,2 %, donc très rapproché de celui de la méthode précédente, qui se situe à –55,1 %. Pour un alpha de 5 %, les résultats diffèrent cependant davantage. Pour la méthode qui prend en compte la corrélation des rendements, le rendement est de –46,1 % alors qu'il est de –49,1 % dans le cas de la méthode qui consiste à effectuer un *bootstrapping* sur l'ensemble du portefeuille.

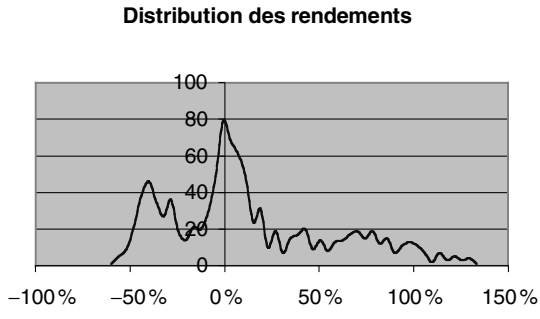
TABLEAU 14 **Programme Visual Basic pour *bootstrapper* trois titres avec prise en compte de leur corrélation historique**

```
Sub ValueatRisk1()
Range("starttime") = Time
Range("O1:O15000").ClearContents
Application.ScreenUpdating = False
For Iteration = 1 To Range("iiterations")
For Row = 1 To 573
Range("AXPRAND").Cells(Row, 1) = Rnd
Range("GBLRAND").Cells(Row, 1) = Range("AXPRAND").Cells(Row, 1)
Range("THRAND").Cells(Row, 1) = Range("AXPRAND").Cells(Row, 1)
Next Row
Range("B2:C574").Select
   Selection.Sort Key1:=Range("C2"), Order1:=xlAscending,
     Header:=xlNo, _
   OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom
   Range("D2:E574").Select
   Selection.Sort Key1:=Range("E2"), Order1:=xlAscending,
     Header:=xlNo, _
   OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom
   Range("F2:G574").Select
   Selection.Sort Key1:=Range("G2"), Order1:=xlAscending,
     Header:=xlNo, _
   OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom

Range("returndata").Cells(Iteration, 1) = Range("rmoyen")
Next Iteration
Range("elapsed") = Time - Range("starttime")

End Sub
```

FIGURE 10 **Distribution des rendements du portefeuille avec prise en compte de la corrélation historique des rendements**



3.3. Autres façons de *bootstrapper* des séries dans Excel

La version 2000 d'Excel comporte un menu appelé *Poptools* qui permet, entre autres, de *bootstrapper* des séries de deux autres façons. La procédure de *bootstrapping* que nous venons d'utiliser en est une sans remise. Pour comprendre ce dont il s'agit, considérons un boulier rempli de boules, qui sont les prix de nos actions. Lors de nos simulations, nous avons tiré des prix sans remise. La fonction *Resample*[16] de *Poptools* permet d'effectuer des tirages avec remise tandis que la fonction *Shuffle*, également intégrée au menu de *Poptools*, permet, à l'instar de la fonction *Sort* d'Excel, d'effectuer des tirages sans remise. Le tableau 15 prend acte du programme Visual Basic que nous avons conçu pour *bootstrapper* l'ensemble de notre portefeuille de trois titres. Nous savons maintenant en effet qu'il est préférable de *bootstrapper* l'ensemble du portefeuille plutôt que chaque titre séparément dont les résultats sont par la suite additionnés pour former le portefeuille. La fonction *Resample* ne permet pas toutefois de prendre en compte directement la corrélation historique entre les prix des titres du portefeuille, méthode que nous favorisons.

TABLEAU 15 **Programme Visual Basic du *bootstrapping* avec remise de l'ensemble du portefeuille**

```
Sub ValueatRisk1()
Range("starttime") = Time
Range("O1:O15000").ClearContents
Application.ScreenUpdating = False
For Iteration = 1 To Range("iiterations")

Range("h2:h574").Select
Selection.FormulaArray = "=Resample(g2:g574)"

Range("returndata").Cells(Iteration, 1) = Range("rmoyen")
Next Iteration
Range("elapsed") = Time - Range("starttime")

End Sub
```

Le chiffrier ayant servi à la simulation se retrouve au tableau 16.

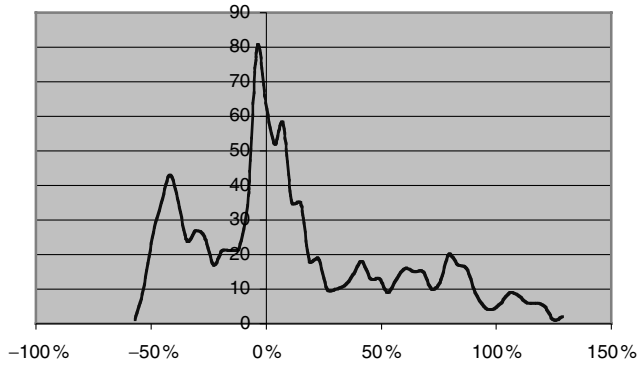
16. En fait, Efron (1979) favorisait cette méthode.

TABLEAU 16 **Chiffrier du *bootstrapping* avec remise de l'ensemble du portefeuille**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		AXP	GBL	TH				Portefeuille			Rendement	50.98%	rMAX	132.46%	-5.90%
2	1/1/99	10.75	5.55	2.9			19.2	18.81					rMin	-57.09%	11.13%
3	1/4/99	10.55	5.5	2.85			18.9	32.35							28.71%
4	1/5/99	10.2	5.55	2.8			18.55	17.8			startime	2:46:10 PM			3.13%
5	1/6/99	10.1	5.55	2.8			18.45	17.8			elapsed	00:23.0			-4.09%
6	1/7/99	10.3	5.5	2.8			18.6	17.9							106.63%
7	1/8/99	10.75	5.6	2.8			19.15	18.05			iiterations	1000			81.92%
8	1/11/99	10.7	6	2.8			19.5	25.25							-36.23%
9	1/12/99	10.7	6	2.9			19.6	19.35							58.47%
10	1/13/99	10.75	6.1	2.9			19.75	32.5							-36.25%
11	1/14/99	10.5	6.05	2.7			19.25	18.25							-17.49%
12	1/15/99	10.2	6	2.7			18.9	20.05							10.36%
13	1/18/99	10.05	5.95	2.85			18.85	28.05							71.81%
14	1/19/99	10.15	6	2.8			18.95	30.1							-32.04%
15	1/20/99	10.15	6.1	2.9			19.15	18.65							-48.80%
16	1/21/99	9.85	6.05	2.75			18.65	36.5							-22.89%
17	1/22/99	10	6.1	2.8			18.9	18.65							23.90%

Comme l'indique le programme du tableau 15, à chaque itération, on sélectionne le *range* H2 à H574 de façon à insérer les résultats de l'itération et on appelle la fonction *Resample* pour *bootstrapper* avec remise la série des données de notre portefeuille qui se trouve dans les cellules G2 à G574. À noter que ces dernières cellules doivent avoir été converties en valeurs avant d'effectuer la simulation. Les autres lignes du programme ont déjà été expliquées. La distribution des rendements du portefeuille qui résulte de ces itérations se retrouve à la figure 11.

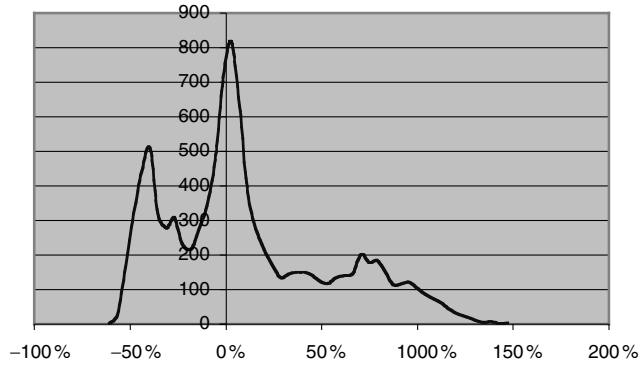
FIGURE 11 **Distribution des rendements du portefeuille : *bootstrapping* avec remise (1000 itérations)**



La figure 11 ressemble à la figure 9, bien qu'elle comporte moins de soubresauts. Son premier mode est moins accentué, ce qui la rapproche davantage de la figure 10.

L'un des avantages de la fonction *Resample* est qu'elle permet d'effectuer rapidement un très grand nombre d'itérations, ce qui n'est pas le cas pour la fonction *Sort*. À la figure 12, 10 000 itérations ont été effectuées pour obtenir la distribution plutôt que 1000 comme à la figure 11.

FIGURE 12 ***Bootstrapping* avec remise : 10000 itérations**



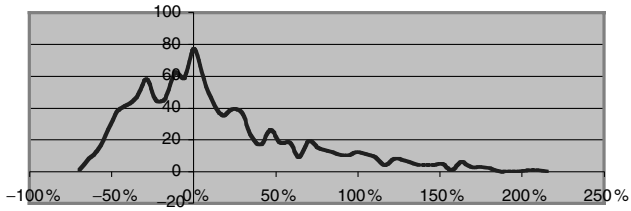
Après 10 000 itérations, l'aspect de la distribution ressemble beaucoup à celui de la figure 11, mais elle est devenue plus continue, comme il fallait s'y attendre. Il n'y aurait donc guère de gain additionnel à *bootstrapper* une série au-delà de 1000 itérations.

À la figure 13, afin de comparer les trois techniques de *bootstrapping*, nous *bootstrappons* les rendements journaliers du TSE300 pour la période 1992-2001 selon les trois techniques dont il a été question dans ce chapitre. D'abord, par la technique *Sort*, puis par les deux fonctions de *Poptools* : *Shuffle* (*bootstrapping* sans remise) et *Resample* (*bootstrapping* avec remise). Le programme qui a servi à créer la distribution avec la fonction *Shuffle* n'a pas encore été fourni ; il apparaît au tableau 17. On est à même de constater que ces trois méthodes donnent des résultats très comparables. La distribution des rendements journaliers du TSE300 présente un coefficient d'asymétrie positive important. On remarque cependant que le *bootstrapping* avec remise altère quelque peu l'allure de la distribution.

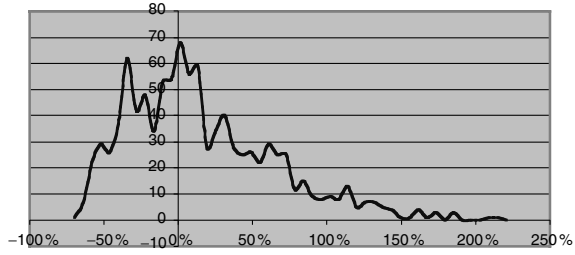
Finalement, à la figure 14, on peut comparer un *resample* qui comporte 1000 itérations à un autre qui en comprend 10 000. Comme nous l'avons allégué auparavant, l'augmentation du nombre d'itérations au-delà de 1000 n'altère guère les résultats, sinon qu'elle adoucit les fluctuations de la distribution.

FIGURE 13 **Comparaison des trois techniques de *bootstrapping***

Rendements du TSE-300 : *Sort* : 1000 itérations



Rendements du TSE 300 : *Shuffle* : 1000 itérations



Rendements TSE300 : *Resample* : 1000 itérations

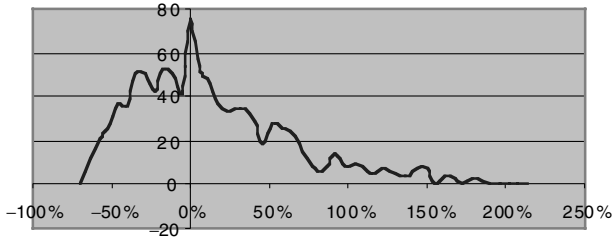


TABLEAU 17 **Programme Visual Basic : *bootstrapping* du portefeuille avec la fonction *Shuffle***

```
Sub Varin()

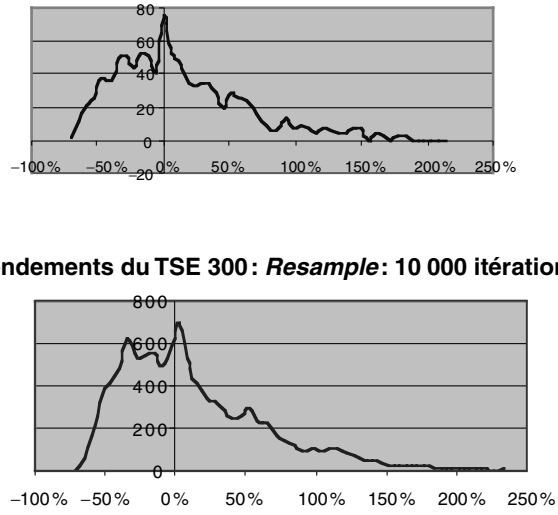
Range("starttime") = Time
Range("O1:O15000").ClearContents
Application.ScreenUpdating = False
For Iteration = 1 To Range("iiterations")
Range("C2:C2224").Select
' Les résultats seront compilés dans les cellules C2 à C224
Selection.FormulaArray = "=Shuffle(b2:b2224)"
' La série du TSE se trouve dans les cellules b2:b224.
' On demande de bootstrapper cette série _
' par la fonction Shuffle
Range("returndata").Cells(Iteration, 1) = Range("rmoyen")
Next Iteration

Range("elapsed") = Time - Range("starttime")

End Sub
```

N.B. Visual Basic ne prend pas en compte les lignes qui s'ouvrent par : '. Ce sont de simples explications ou aide-mémoire.

FIGURE 14 ***Bootstrapping* du TSE300 avec la fonction *Resample* : 1000 et 10 000 itérations**



4. L'EXPANSION DE CORNISH-FISHER ET LA VAR[17]

La VaR n'est certes qu'une approximation. C'est pourquoi plusieurs méthodes valent mieux qu'une pour la calculer. L'expansion de Cornish-Fisher[18] est l'une de celles-là. Celle-ci est une relation approximative entre les percentiles d'une distribution et ses moments. Au dire de Stuart *et al.* (1999a), un très grand nombre de distributions que l'on retrouve en Statistique tendent vers la normale quand n (le nombre d'observations) se dirige vers l'infini, mais dans des échantillons de moindre envergure, la distribution normale peut laisser beaucoup à désirer. C'est pourquoi il faut recourir à l'expansion de Cornish-Fisher dans ce cas pour approximer les percentiles d'une distribution. Cette approximation, basée sur la série de Taylor, recourt aux moments d'une distribution qui dévie de la normale pour calculer ses percentiles. Hull (2000) fournit cette approximation jusqu'au troisième moment d'une distribution. L'approximation de Cornish-Fisher s'écrit alors comme suit :

$$w_\alpha \cong z_\alpha + \frac{1}{6}\left(z_\alpha^2 - 1\right) AS \qquad (10)$$

Dans cette expression, w_α est le percentile corrigé de la distribution au seuil alpha ; z_α est le percentile correspondant à une N(0,1) et AS est le coefficient d'asymétrie. Pour fixer les idées, reprenons l'équation (1) dans laquelle nous supposons que l'espérance du rendement d'un portefeuille se situe à 0,15, son écart-type annuel, à 0,30, et où nous supposons également que les rendements ont un coefficient d'asymétrie nul (AS = 0). Nous voulons calculer la VaR annuelle par dollar pour un alpha de 5 %. L'équation (10) s'écrit alors : $w_{5\,\%} = z_{5\,\%} = -1{,}655$, soit le percentile ou valeur critique de la normale au seuil de 5 %. La VaR annuelle par dollar est, sous ces hypothèses :

$$\text{Perte} = \mu - 1{,}655\sigma = 0{,}15 - 1{,}655(0{,}30) = -0{,}3435 \qquad (11)$$

17. Pour cette section, nous nous référons à : Stuart A., K. Ord et S. Arnold (1999a), *Kendall's Advanced Theory of Statistics. Volume 1 : Distribution Theory*, New York, Arnold, p. 236-240 ; Hull, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle River (N.J.), Prentice Hall, chap. 14.

18. Cornish, E.A et R.A. Fisher (1937), « Moments and Cumulants in the Specification of Distributions », *Review of the International Statistical Institute*, vol. 5, p. 307-320.

Supposons maintenant que le coefficient d'asymétrie des rendements soit de –0,5. L'expansion de Cornish-Fisher s'écrit alors :

$$\begin{aligned} w_\alpha &= z_\alpha + \frac{1}{6}\left(z_\alpha^2 - 1\right)AS \\ &= -1{,}655 + \frac{1}{6}\left[\left(-1{,}655\right)^2 - 1\right] \times -0{,}5 \\ &= -1{,}80 \end{aligned} \tag{12}$$

Corrigée de l'asymétrie des rendements du portefeuille, la VaR par dollar devient :

$$0{,}15 - 1{,}80\left(0{,}30\right) = -0{,}3900 \tag{13}$$

La VaR se voit rehaussée de 13,5 % à la suite du changement du coefficient d'asymétrie de 0 à –0,5. Si la distribution des rendements présente un coefficient d'asymétrie négatif, cela augmente la VaR, donc le risque, comme nous le soulignions précédemment. Un coefficient d'asymétrie positif diminue la VaR, donc le risque.

Il est malheureux que Hull (2000) ne soit pas allé plus loin que le troisième moment d'une distribution pour écrire l'expansion de Cornish-Fisher – qui, rappelons-le, met en cause tous les moments d'une distribution –, car le principal problème que présentent les distributions de rendements est leur caractère leptocurtique, ou leur excédent de *kurtosis* si l'on veut, problème qui concerne le quatrième moment d'une distribution. On rappelle que le quatrième moment d'une normale est de 3. Or, les distributions de rendements présentent généralement un coefficient plus élevé que 3, d'où leur caractère leptocutique ou leur excédent de *kurtosis*. En prenant en compte l'excédent de kurtosis (EKUR), l'expansion de Cornish-Fisher devient, en négligeant les termes peu significatifs[19] :

$$\begin{aligned} w_\alpha \cong\ & z_\alpha + \frac{1}{6}\left(z_\alpha^2 - 1\right)\ AS + \frac{1}{24}\left(z_\alpha^3 - 3z_\alpha\right)\ EKUR \\ & - \frac{1}{36}\left(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha\right)\ AS^2 \end{aligned} \tag{14}$$

19. On retrouvera l'expansion de Cornish-Fisher jusqu'au sixième moment dans : Stuart *et al.* (1999a), *op. cit.*, p. 238.

où EKUR représente l'excès de *kurtosis*. L'expansion de Cornish-Fisher se complique donc sensiblement lorsque l'on introduit le quatrième moment d'une distribution. À titre d'exemple, reprenons le cas précédent où, cette fois-ci, AS = 0 mais EKUR = 4, c'est-à-dire que le coefficient d'aplatissement des rendements est de 7 plutôt que de 3 comme c'est le cas pour la loi normale. L'expansion de Cornish-Fisher devient dans ce cas :

$$\begin{aligned} w_\alpha &= z_\alpha + \frac{1}{24}\left(z_\alpha^3 - 3z_\alpha\right)\text{EKUR} \\ &= -1{,}655 + \frac{1}{24}\left[\left(-1{,}655\right)^3 - 3\left(-1{,}655\right)\right] 4 \\ &= -1{,}5830 \end{aligned} \tag{15}$$

La VaR par dollar, pour un alpha de 5 %, est donc de :

$$0{,}15 - 1{,}583(0{,}30) = -0{,}3249 \tag{16}$$

L'excès de *kurtosis* a donc réduit la VaR pour un alpha de 5 %. L'excès de *kurtosis* n'a cependant pas un effet à sens unique sur la VaR. Son effet dépend de la marge d'erreur que l'on recherche[20]. Calculons en effet la VaR pour un alpha de 1 %. z_α est alors égal à –2,33 et w_α, le multiple corrigé pour l'excédent de kurtosis, est égal à –3,27 en vertu de l'équation (14). La VaR est égale à –0,83 $, chiffre sensiblement supérieur à la situation sans excès de *kurtosis*, soit –0,3435. Du fait que l'on vise habituellement des marges d'erreur très faibles lorsque l'on calcule la VaR, de l'ordre de 1 %, on se rend compte que l'excédent de *kurtosis* au chapitre de la distribution des rendements peut augmenter sensiblement le risque d'un portefeuille.

Au tableau 18 apparaissent le degré d'asymétrie, l'excédent de *kurtosis* et la statistique w_α calculée à partir de l'équation (14) pour un seuil de 1 %, cela pour les trois titres étudiés dans ce chapitre ainsi que pour l'indice TSE300 et l'indice des titres biotechnologiques. Les coefficients d'asymétrie ainsi que l'excès de *kurtosis* ont été obtenus à partir du logiciel EViews pour la période s'étirant du début de 1999 au début de 2001. Comme on peut le constater au tableau 18, l'excès de *kurtosis* domine nettement l'asymétrie dans le calcul de l'expansion

20. En fait, le point mort, soit le point où l'excédent de *kurtosis* commence à jouer négativement sur la VaR, se situe ici à $z_\alpha = -1{,}73$.

TABLEAU 18 **Statistiques w_α au seuil de 1 % Titres sous étude, 1999-2001**

	AS	EKUR	w_α
TH	1,3	8,5	–5,85
GBL	0,2	3,7	–4,13
AXP	1,5	10,0	–6,49
TSE300	–0,6	3,7	–4,72
Indice Bio.	–0,3	2,9	–4,08

de Cornish-Fisher. En utilisant –2,33 comme multiple dans l'équation (2), multiple représenté par θ, on sous-estime donc beaucoup le risque de ces cinq titres ou indices. C'est bien souvent le double de ce multiple, voire davantage, qu'il faut utiliser pour calculer la VaR, toujours à partir de l'équation (2). Le titre AXP a même un multiple de –6,49. Bien que son asymétrie positive ait tendance à diminuer son multiple, son excès de *kurtosis* qui est très important joue fort défavorablement au chapitre de son w_α.

Finalement, le tableau 19 fournit la VaR journalière pour les titres ou indices du tableau 18 calculée à partir de l'équation (2), les multiples respectifs étant ceux qui apparaissent au tableau 18. Les indices ont une VaR plus faible, comme il se doit, car l'écart-type de leur rendement est inférieur à celui des titres individuels du fait du caractère diversifié des indices. Selon le tableau 19, c'est le TSE300 qui présenterait le moins de risque, comme il se doit. Les moyennes et écarts types respectifs des rendements ont été calculés à partir du logiciel Eviews.

TABLEAU 19 **VaR journalière au seuil de 1 % ajustée par la méthode Cornish-Fisher Titres sous étude**

	μ	σ	VaR
TH	0,002	0,0472	–0,2741
GBL	0,000	0,0458	–0,1893
AXP	0,000	0,0349	–0,2265
TSE300	0,000	0,0139	–0,0656
Indice Bio.	0,000	0,0221	–0,0902

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous n'avons envisagé que trois techniques du calcul de la VaR : *i)* celle qui correspond à une distribution normale ; *ii)* celle qui est reliée au *bootstrapping* selon trois méthodes de rééchantillonnage ; *iii)* celle qui est reliée à l'expansion de Cornish-Fisher. Il existe cependant d'autres techniques de calcul de la VaR : *i)* la méthode Monte Carlo, qui fait appel non pas à la distribution normale mais à la distribution stable parétienne[21] ; *ii)* les méthodes qui prennent en compte les volatilités changeantes, comme les méthodes GARCH[22] ; *iii)* les méthodes qui considèrent les mémoires plus ou moins longues des processus stochastiques.

BIBLIOGRAPHIE

ALEXANDER, C. (2001), *Market Models : A Guide to Financial Data Analysis*, New York, Wiley.

ALEXANDER, C. (1996), *The Handbook of Risk Management and Analysis*, New York, Wiley.

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, Cambridge, The MIT Press.

BERA, A.K. et C.M. JARQUE (1981), *An Efficient Large-sample Test for Normality of Observations and Regression Residuals*, Canberra, Australian National University Working Papers in Econometrics, 40.

BESSIS, J. (1998), *Risk Management in Banking*, New York, Wiley.

21. Cette distribution prend en compte certaines caractéristiques des distributions empiriques telles que leur caractère leptocurtique.

22. On pense ici au GARCH fractionnaire. À cet effet, on consultera : Khindanova, I. (1998), *Value at Risk*, document de travail, Département d'économie, Santa Barbara, Université de Californie. Pour d'autres applications du modèle GARCH à la VaR, on se référera à : Khindanova, I. et S.T. Rachev (1999), *Value at Risk : Recent Advances*, document de travail, Santa Barbara, Université de Californie ; Hull, J. et A. White (1998), « Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed », *Journal of Derivatives*, vol. 5, n° 3, p. 9-19. Pour un texte faisant appel à l'expansion de Cornish-Fisher pour calculer les percentiles entrant dans l'expression de la VaR, on lira : Favre, L. et J.A. Galeano (2000), *Portfolio Allocation with Hedge Funds : Case Studies of a Swiss Institutional Investor*, manuscrit, Harcourt Investment Consulting A.G.

CORNISH, E.A et R.A. FISHER (1937), « Moments and Cumulants in the Specification of Distributions », *Review of the International Statistical Institute*, vol. 5, p. 307-320.

DAS, S. (1997), *Risk Management and Financial Derivatives*, New York, McGraw-Hill.

EFRON, B. (1994), « Missing Data, Imputation and the Bootstrap », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, p. 463-478.

EFRON, B. (1979), « Bootstrap Methods : Another Look at the Jacknife », *Annual of Statistics*, vol. 7, p. 1-26.

ESCH, K. *et al.* (1997), *Value at Risk : vers un risk management moderne*, Bruxelles, DeBoeck.

HULL, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

JUDGE, G.G. *et al.* (1988), *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, 2e édition, New York, Wiley.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

STUART, A., K. ORD et S. ARNOLD (1999a), *Kendall's Advanced Theory of Statistics. Volume 1 : Distribution Theory*, New York, Arnold.

STUART, A., K. ORD et S. ARNOLD (1999b), *Kendall's Advanced Theory of Statistics. Volume 2A : Classical Inference and the Linear Model*, New York, Arnold.

THÉORET, R. et P. ROSTAN (2000), *Empirical Comparative Study of Monte Carlo Simulation Methods versus Historical Methods to estimate Value at Risk*, Montréal, Centre de recherche en gestion, École des sciences de la gestion, Université du Québec à Montréal, CRG 19-2000.

THÉORET, R. (2000), *Traité de gestion bancaire*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

PARTIE

3

ARBRES BINOMIAUX ET TRINOMIAUX ET SIMULATION MONTE CARLO

CHAPITRE

6

VARIATIONS SUR LES ASPECTS THÉORIQUES ET PRATIQUES DES ALGORITHMES D'OPTIMISATION

ÉTUDE D'UN CAS : L'ALGORITHME DE NEWTON COMME SOLUTION À L'ARBRE BINOMIAL DE TAUX D'INTÉRÊT DE BLACK, DERMAN ET TOY

Au chapitre 3, nous avons montré comment on pouvait solutionner l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy en recourant à un chiffrier Excel. La solution mettait essentiellement en contribution le solveur d'Excel. Dans le présent chapitre, nous visons à mettre sur pied une procédure écrite à l'aide de l'application Visual Basic d'Excel qui nous permettra d'obtenir une solution presque instantanée en choisissant un nombre de pas quelconque. Cet exercice, très utile en soi, nous permettra également de mieux comprendre comment fonctionne le solveur d'Excel puisqu'il tire profit des algorithmes d'optimisation dits de Newton qui servent d'introduction à ce chapitre.

1. LES ALGORITHMES D'OPTIMISATION DE TYPE NEWTON

Dans cette section, nous nous intéressons surtout aux algorithmes d'optimisation de type Newton même si nous ouvrirons une fenêtre plus grande sur ce sujet à la fin de cette section.

Les algorithmes d'optimisation à la Newton sont des procédures itératives de recherche des valeurs des variables d'une fonction qui l'annulent ou qui sont associées à son optimum (maximum ou minimum). Dans ce qui suit, nous considérons d'abord l'algorithme de Newton qui permet de trouver les racines d'une fonction, c'est-à-dire

les valeurs que prennent ses variables lorsqu'elle s'annule, puis nous nous tournons vers l'algorithme Newton-Raphson, qui permet de déterminer les valeurs des variables associées à l'optimum d'une fonction. Finalement, nous présentons une formulation générale des algorithmes d'optimisation à la Newton[1].

1.1. L'algorithme de Newton

Soit une fonction f(x). Nous voulons déterminer la ou les valeurs de x qui annulent cette fonction, mais nous ne pouvons recourir à une solution analytique en raison de sa complexité. Nous faisons donc appel à l'algorithme de Newton qui nous permettra de dégager une solution numérique à notre problème.

Selon la série de Taylor, la fonction f(x) peut être approximée de la façon suivante (approximation du premier degré) :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x \tag{1}$$

où f'(x) est le gradient[2] de la fonction et Δx, un petit accroissement de x. Nous désirons trouver la ou les valeurs de x qui annulent cette fonction, c'est-à-dire :

$$f(x + \Delta x) = 0 \tag{2}$$

En substituant l'équation (2) dans l'équation (1), on a :

$$f(x) + f'(x)\Delta x = 0 \tag{3}$$

1. Nos références pour cette section sont : Jackson, M. et M. Stauton (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley ; Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill, H. Lütkepohl et T.C. Lee (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, Wiley, Appendix B, p. 951-979 ; Hendry, D.F. (1995), *Dynamic Econometrics*, Oxford, Oxford University Press, Appendix A5, p. 751-780 ; Racicot F.-É. et R. Théoret (2001b), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, chapitre 6 ; Benninga, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge (Mass.), The MIT Press ; Rostan, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire ; Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *Implementing Derivatives Models*, Chichester, Wiley ; Judd, K.L. (1998), *Numerical Methods in Economics*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

2. Soit sa dérivée première.

Pour que l'équation (3) puisse servir de processus itératif, posons :

$$\Delta x = x_{t+1} - x_t \tag{4}$$

En substituant l'équation (4) dans l'équation (3) et en mettant x_{t+1} en évidence, on obtient :

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{5}$$

La fonction (5) permet de déterminer la ou les valeurs de x qui annulent la fonction f(x), cela généralement après seulement quelques itérations si la fonction f(x) est bien configurée.

On peut écrire l'équation (5) de la façon suivante :

$$x_{t+1} = x_t + \alpha D \tag{6}$$

Dans cette équation, D représente la direction que prend la variable à chaque itération et alpha est un facteur de modération du mouvement de x de telle sorte que cette variable ne dépasse pas sa cible. Dans la fonction (5), la direction est donnée par –f(x), mesurée au point x_t, et le terme alpha, par (1/f′(x)), le gradient étant lui-même mesuré au point x_t.

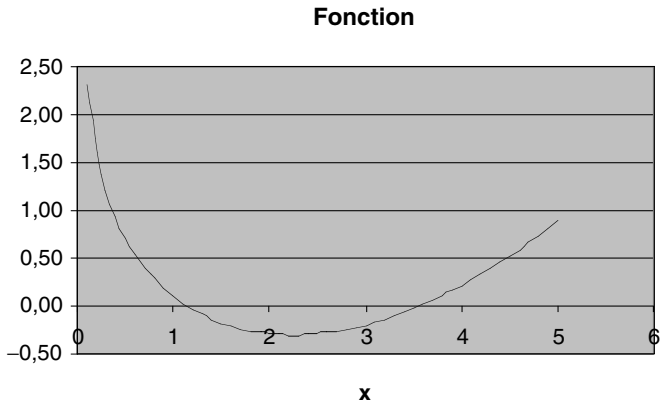
Pour illustrer comment fonctionne l'algorithme de Newton, nous recourons à la fonction suivante.

$$f(x) = -\ln(x) + 0{,}1x^2 \tag{7}$$

Cette fonction admet comme dérivée première : $-\frac{1}{x} + 0{,}2x$ et comme dérivée seconde : $\frac{1}{x^2} + 0{,}2$. La représentation graphique de cette fonction, tracée sur un chiffrier Excel en faisant appel aux commandes : *Data*, *Table*, est illustrée à la figure 1.

Comme on peut le constater, cette fonction a deux racines, l'une rapprochée de 1 et l'autre dans le voisinage de 3,5. Pour calculer ces racines, nous faisons appel à un programme que nous avons écrit en utilisant l'application Visual Basic d'Excel 2000 (version anglaise). Pour écrire ce programme, nous accédons à Visual Basic en pressant

FIGURE 1 **Fonction : $f(x) = -\ln(x) + 0,1x^2$**



simultanément les touches du clavier : *Alt* et *F11*. Une fois dans Visual Basic, nous cliquons sur *Insert* dans le menu principal et ensuite sur *Module*. Nous sommes alors prêts à écrire l'algorithme de Newton, qui apparaît au tableau 1.

La procédure nommée Newton1 débute par *Sub* et se termine par *End Sub*. On déclare d'abord les variables au moyen de la commande *Dim*, en indiquant que t est un entier et x, une variable. Puis on fixe une valeur de départ à x_t dans l'équation (5), ici 1. Puis on enclenche les itérations, dont le nombre est ici fixé à 5, en déclarant la boucle :

```
For t = 1 To 5
    ...
Next t
```

À l'intérieur de la boucle, on écrit les formules de la fonction en cause (*fx*) et de sa dérivée (*fprimex*). On peut alors introduire la formule de Newton :

$$x = x - (fx/fprimex) \tag{8}$$

TABLEAU 1 **Procédure Visual Basic pour l'algorithme de Newton**

```
Sub Newton1()
Dim t As Integer
Dim x As Variant

x = 1

For t = 1 To 5


Range("temps").Offset(t, 0) = t
Range("xt").Offset(t, 0) = x

fx = -Log(x) + 0.1 * x ^ 2
Range("fx").Offset(t, 0) = fx

fprimex = -1 / x + 0.2 * x
Range("fprimex").Offset(t, 0) = fprimex

x = x - fx / fprimex


Next t

End Sub
```

À remarquer qu'une procédure (Sub) nous permet de noter les résultats à chaque itération, ce qui ne serait pas le cas si nous avions choisi la routine : *Function* pour écrire le programme Visual Basic. On ne récupérerait alors que le résultat final de la simulation dans le chiffrier, soit la racine recherchée.

Pour récupérer les résultats de la simulation dans le chiffrier, on nomme d'abord des cellules dans celui-ci. Par exemple, au tableau 2, qui donne les résultats de la simulation, la cellule D56 a été nommée x_t[3]. C'est donc dans cette colonne que seront récupérés, à chaque itération, les résultats de la simulation pour ce qui concerne la variable x.

3. Nos chapitres précédents expliquent comment nommer des cellules.

TABLEAU 2 **Calcul de la première racine de la fonction**

	C	D	E	F
56	**Itérations**	**xt**	**fx**	**f'x**
57	1	1	0.1	-0.8
58	2	1.125	0.008779	-0.663889
59	3	1.138224	8.6E-05	-0.650917
60	4	1.138356	8.49E-09	-0.650788
61	5	1.138356	1.11E-16	-0.650788

Pour faire imprimer les résultats de x dans le chiffrier, cela pour chaque itération, nous avons écrit la commande suivante dans le programme :

```
Range("xt").Offset(t,0)=x
```

Range("xt") désigne la cellule nommée xt dans le chiffrier Excel (tableau 2). Pour enregistrer les résultats dans cette colonne, nous nous servons de la fonction Offset d'Excel. Offset(0,0) renvoie à la cellule de départ[4], ici celle nommée « xt », la structure générale de la fonction étant Offset(i,j). i et j sont des entiers. À chaque fois que i augmente de 1, on se déplace d'une ligne vers le bas dans la même colonne, en supposant que j est fixe. Et à chaque fois que j augmente de 1, on se déplace d'une colonne vers la droite en restant sur la même ligne, i étant supposé fixe. Par exemple, Range("xt").Offset(1,0) signifie que l'on reste dans la colonne où se trouve la cellule nommée « xt » mais qu'on se déplace d'une ligne vers la bas par rapport à « xt ». Dans le chiffrier du tableau 2, c'est la cellule D57 qui se trouve dans cette position. C'est elle qui recevra le premier résultat de la simulation, alors que t, qui se substitue à i, prend la valeur de 1. Et ainsi de suite.

La première racine de la fonction est de 1,1383. Comme on peut le constater, le programme obtient la première racine de la fonction après seulement quatre itérations. La valeur de départ de x ayant été fixée à 1, le programme a convergé rapidement vers la première racine, car celle-ci était dans son voisinage. Pour calculer la deuxième

4. Soit la cellule qui apparaît dans la parenthèse de la commande : *Range*.

TABLEAU 3 **Calcul de la deuxième racine de la fonction**

	C	D	E	F
56	**Itérations**	**xt**	**fx**	**f'x**
57	1	5	0.890562	0.8
58	2	3.886797	0.153134	0.520078
59	3	3.592353	0.011693	0.440102
60	4	3.565785	9.81E-05	0.432714
61	5	3.565558	7.16E-09	0.432651

racine de la fonction, on fixe la valeur de départ de x à 5. Les résultats de la simulation se retrouvent au tableau 3. La deuxième racine de la fonction est donc de 3,5655. Certes, si l'on se positionnait au départ dans un voisinage moins rapproché de cette valeur, le nombre de simulations augmenterait.

Dans le programme précédent, nous avons fixé le nombre d'itérations à un nombre prédéterminé, ici 5. Pour ce faire, nous avons recouru à la boucle :

```
For t= 1 To 5
    ...
Next t
```

Mais cette façon de faire comporte une bonne part d'arbitraire. Pour y remédier, nous remplaçons, dans un nouveau programme, cette boucle par une autre dont la structure est la suivante :

```
Do
...
Loop While Abs(fx)>=atol
```

Cette boucle commande au programme d'itérer tant que la valeur absolue de la fonction excède un seuil de tolérance prédéterminé, nommé *atol*, et fixé ici à 0,000001. Nous devons cependant prendre soin de récupérer les résultats à chaque itération en ajoutant un compteur dans le programme, désigné par t, qui prend la valeur de 1 avant que la boucle ne s'enclence, soit une ligne avant la commande *Do*, et qui prend une valeur de : t = t + 1 juste avant que la boucle ne recommence, soit une ligne avant la commande *Loop*. Les modifications qu'il

TABLEAU 4 **La procédure Do…Loop et l'algorithme de Newton**

```
Sub Newton2()
Dim t As Integer
Dim x As Variant
Dim atol As Variant

atol = 0.000001

x = 1
t = 1

Do


Range("temps").Offset(t, 0) = t
Range("xt").Offset(t, 0) = x

fx = -Log(x) + 0.1 * x ^ 2
Range("fx").Offset(t, 0) = fx

fprimex = -1 / x + 0.2 * x
Range("fprimex").Offset(t, 0) = fprimex

x = x - fx / fprimex

t = t + 1

Loop While Abs(fx) >= atol

End Sub
```

faut apporter au programme du tableau 1 pour implanter cette boucle apparaissent en gras au tableau 4. Si on enclenche cette procédure, on constatera que la boucle s'arrête à l'itération 4. C'est en effet à partir de celle-ci que la valeur de la racine ne se modifie plus.

1.2. L'algorithme de Newton-Raphson

L'algorithme de Newton-Raphson est une procédure analogue à celle de Newton, sauf que cette fois-ci on veut trouver la valeur de x associée à l'optimum de la fonction. Pour dégager la procédure

itérative dans ce cas, dérivons la fonction (1), qui est l'approximation du premier degré de la fonction, par rapport à x et égalons cette dérivée à 0. On obtient comme résultat :

$$f'(x) + f'' \times (\Delta x) = 0 \tag{9}$$

Δx représentant une constante lors de la dérivation. La valeur de celle-ci étant donnée par l'équation (4), on obtient donc la procédure Newton-Raphson :

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f'}{f''} \tag{10}$$

Dans cette équation, $-f'$ donne la direction à prendre lors de la simulation lorsque l'on désire trouver le minimum d'une fonction et $(1/f'')$ agit à titre de modérateur du mouvement.

Le programme servant à calculer le minimum de la fonction retenue se retrouve au tableau 5. Il obéit au même modèle que celui du tableau 4.

Le résultat de cette simulation est compilé au tableau 6.

Comme on peut le constater, le minimum de la fonction se situe à x = 2,236068. Le minimum de la fonction est de : –0,304719. Il a fallu six itérations pour atteindre ce résultat. Pour cette valeur, la dérivée première est quasi nulle, comme cela a été inscrit dans le programme, et la valeur de la dérivée seconde est positive, comme il se doit pour un minimum.

Judge (1985)[5] discute une procédure Newton-Raphson modifiée qu'il qualifie de *steepest descent*. On enlève alors le terme qui sert d'amortisseur dans la fonction Newton-Raphson, soit $(1/f'')$, et l'on ne conserve que le terme qui donne la direction des itérations, soit $(-f')$. La fonction récursive modifiée s'écrit donc :

$$x_{t+1} = x_t - f' \tag{11}$$

5. Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill, H. Lütkepohl et T.C. Lee (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, Wiley, Appendix B : Numerical Optimization Methods, p. 951-979.

TABLEAU 5 **Procédure Visual Basic pour l'algorithme de Newton-Raphson**

```
Sub NewtonRaphson1()

Dim t As Integer
Dim x As Variant
Dim fx1, fprimex1, f2primex1

x = 1

t = 1

Do

Range("temps1").Offset(t, 0) = t
Range("xt1").Offset(t, 0) = x
fx1 = -Log(x) + (0.1 * x ^ 2)
Range("fxnr").Offset(t, 0) = fx1

fprimex1 = -1 / x + 0.2 * x
Range("fprimex1").Offset(t, 0) = fprimex1

f2primex1 = (1 / x ^ 2) + 0.2
Range("f2primex1").Offset(t, 0) = f2primex1

x = x - (fprimex1 / f2primex1)
t = t + 1

Loop While Abs(fprimex1) >= 0.0000001

End Sub
```

TABLEAU 6 **Simulation Newton-Raphson**

	C	D	E	F	G
65	**Itérations**	**xt**	**fx**	**f'x**	**f''x**
66	1	1	0.1	-0.8	1.2
67	2	1.666667	-0.233048	-0.266667	0.56
68	3	2.142857	-0.302956	-0.038095	0.417778
69	4	2.234043	-0.304718	-0.000811	0.400363
70	5	2.236067	-0.304719	-3.67E-07	0.4
71	6	2.236068	-0.304719	-7.54E-14	0.4

Certes, privée de frein, la descente vers la solution est plus brutale, comme l'indique le nom de cette procédure. Son désavantage est qu'elle donne lieu à plus d'itérations que la procédure Newton-Raphson avec dérivée seconde. En effectuant les modifications appropriées dans le programme du tableau 5, on obtient les résultats du tableau 7 lorsque les itérations sont commandées par la fonction (11).

TABLEAU 7 **La *Steepest Descent***

	C	D	E	F	G
65	**Itérations**	**xt**	**fx**	**f'x**	**f''x**
66	1	1	0.1	-0.8	1.2
67	2	1.8	-0.263787	-0.195556	0.508642
68	3	1.9955556	-0.292698	-0.102002	0.451115
69	4	2.097558	-0.300799	-0.057233	0.427286
70	5	2.1547913	-0.303381	-0.033124	0.415372
71	6	2.1879151	-0.304252	-0.019473	0.4089
72	7	2.2073882	-0.304554	-0.011546	0.405231
73	8	2.2189346	-0.30466	-0.00688	0.4031
74	9	2.2258144	-0.304698	-0.004111	0.401847
75	10	2.2299253	-0.304711	-0.00246	0.401103
76	11	2.2323858	-0.304716	-0.001474	0.40066
77	12	2.2338599	-0.304718	-0.000884	0.400396
78	13	2.2347435	-0.304719	-0.00053	0.400237
79	14	2.2352735	-0.304719	-0.000318	0.400142
80	15	2.2355913	-0.304719	-0.000191	0.400085
81	16	2.235782	-0.304719	-0.000114	0.400051
82	17	2.2358964	-0.304719	-6.86E-05	0.400031
83	18	2.235965	-0.304719	-4.12E-05	0.400018
84	19	2.2360062	-0.304719	-2.47E-05	0.400011
85	20	2.2360309	-0.304719	-1.48E-05	0.400007
86	21	2.2360457	-0.304719	-8.89E-06	0.400004
87	22	2.2360546	-0.304719	-5.34E-06	0.400002
88	23	2.23606	-0.304719	-3.2E-06	0.400001
89	24	2.2360632	-0.304719	-1.92E-06	0.400001
90	25	2.2360651	-0.304719	-1.15E-06	0.400001
91	26	2.2360662	-0.304719	-6.92E-07	0.4

On voit que la méthode dite de la *steepest descent* met 26 itérations avant d'atteindre la solution pour un seuil de tolérance fixé à 0,000001. Elle est donc inefficace par rapport à la méthode de Newton-Raphson, mais elle converge vers la bonne solution.

1.3. Structure générale des algorithmes à la Newton

Judge (1985)[6] présente une équation générale pour l'algorithme d'optimisation basé sur les gradients d'une fonction. Nous reprenons ici sa notation. Soit $H(\theta)$ une fonction que l'on cherche à minimiser. Le vecteur des gradients de cette fonction, évalué au vecteur θ_n, soit $\left.\frac{\partial H}{\partial \theta}\right|_{\theta_n}$, est désigné par γ_n. L'algorithme d'optimisation peut alors s'écrire :

$$\theta_{n+1} = \theta_n - t_n P_n \gamma_n \tag{12}$$

Dans l'équation (12), t_n désigne le pas de l'itération et P_n est une matrice définie positive quelconque.

La matrice P dirige le mouvement vers le vecteur de paramètres associé au minimum de la fonction H(.). Les directions dépendent évidemment du choix de cette matrice. Comme nous l'avons vu auparavant, l'algorithme de la *steepest descent* assimile P à la matrice identité. Cette méthode n'est guère recommandable selon Judge (1985) car elle est susceptible de converger très lentement si le minimum de la fonction est mal configuré.

Pour sa part, l'algorithme de Newton-Raphson, que nous avons étudié dans la section précédente dans le cas d'une seule variable, retient pour P l'inverse du hessien de la fonction H, le hessien étant bien sûr la matrice de ses dérivées secondes. P est donc égal à l'expression suivante dans cette procédure :

$$P_n = \left[\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \, \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1} \tag{13}$$

6. Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill, H. Lütkepohl et T.C. Lee (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, Wiley, Appendix B : Numerical Optimization Methods, p. 951-979.

Judge discute les avantages et les inconvénients de ce choix. Si la fonction H est quadratique, on atteint le minimum après une seule itération. Hendry[7] donne un exemple simple pour illustrer ce résultat, soit la méthode des moindres carrés ordinaires, qui est une forme quadratique. Soit en effet

$$e = y - Z\beta \tag{14}$$

où e est le vecteur des erreurs résiduelles ; y, le vecteur des observations sur la variable dépendante ; Z, la matrice des observations sur les variables indépendantes et β, le vecteur des paramètres à estimer. La méthode des MCO consiste à trouver le vecteur des paramètres qui minimise la somme q des carrés des erreurs résiduelles, soit :

$$q = \left(y - Z\beta\right)'\left(y - Z\beta\right) = y'y - 2\beta'Z'y + \beta'Z'Z\beta \tag{15}$$

La matrice des gradients est égale à :

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} = -2(Z'y - Z'Z\beta) \tag{16}$$

et le hessien :

$$H(.) = 2Z'Z \tag{17}$$

En trouvant le minimum de q par la procédure Newton-Raphson à partir d'un vecteur initial β_1, on obtient :

$$\beta_2 = \beta_1 + \left(Z'Z\right)^{-1}\left(Z'y - Z'Z\beta_1\right) \tag{18}$$

$$\beta_2 = \beta_1 + (Z'Z)^{-1}Z'y - (Z'Z)^{-1}(Z'Z)\beta_1 \tag{19}$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \hat{\beta} - \beta_1 = \hat{\beta} \tag{20}$$

On a donc trouvé l'estimateur des MCO en une seule itération en invoquant la procédure Newton-Raphson, car la fonction q(.) est quadratique.

7. Hendry, D.F. (1995), *Dynamic Econometrics*, Oxford, Oxford University Press, Appendix A5 : Numerical Optimization Methods, p. 768-769.

Cependant, le hessien peut ne pas être défini positif dans un petit voisinage du minimum, de telle sorte que la procédure peut nous amener à un maximum ou à un point de selle. De plus, il faut évaluer les gradients et les dérivées secondes de façon numérique. Si l'évaluation numérique des gradients peut donner des résultats acceptables, bien souvent il n'en va pas de même pour les dérivées secondes. D'autres algorithmes ont été proposés pour pallier ces désavantages.

Pour contourner ces problèmes, on peut recourir à la méthode de Gauss-Newton. Supposons que l'on ait un modèle de la forme suivante, qui est souvent utilisée pour représenter un modèle non linéaire :

$$y = f(X, \theta) + e \tag{21}$$

et que $W(\theta)$ soit égal au vecteur gradient de la fonction f(.). On peut alors approximer la matrice P_n par un produit inverse des vecteurs-gradients, c'est-à-dire :

$$P_n = \left[2W(\theta_n)'W(\theta_n)\right]^{-1} \tag{22}$$

On peut montrer que la méthode Gauss-Newton conduit à l'estimation d'une forme non linéaire à partir d'une séquence de régressions linéaires. Par ailleurs, elle est en étroite parenté avec la méthode dite du *scoring*, qui est à la base de la construction de la procédure BHHH[8] utilisée lors de la maximisation d'une fonction de vraisemblance. Pour plus de détails sur tous ces algorithmes, on consultera Judge *et al.* (1985), Hendry (1995) et Racicot et Théoret (2001a)[9].

8. Berndt, E.R., B.H. Hall, R.E. Hall et J.A. Hausman (1974), « Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models », *Annals of Economic and Social Measurement*, vol. 3, p. 653-665.

9. Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill, H. Lütkepohl et T.C. Lee (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, Wiley ; Hendry, D.F. (1995), *Dynamic Econometrics*, Oxford, Oxford University Press ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001a), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

2. Une procédure simpliste pour programmer l'arbre binomial de Black, Derman et Toy[10] dans Visual Basic

Au chapitre 3, nous avons solutionné directement l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy (BDT) dans un chiffrier Excel sans faire appel à l'application Visual Basic d'Excel. Cette façon de procéder, bien qu'elle soit utile pour assimiler le fonctionnement de l'arbre BDT, se révèle toutefois fort laborieuse.

Dans cette section, nous proposons une procédure Visual Basic simpliste pour programmer l'arbre BDT à l'aide de simples enregistrements de macros. Puis, dans la section suivante, nous recourons à une procédure plus robuste inspirée de Jackson (2001) qui fait appel à l'algorithme de Newton. En fait, cette procédure reproduit le mécanisme du solveur d'Excel, qui fait lui-même appel à l'algorithme de Newton. Comme nous le disions auparavant, nous serons alors à même de faire l'autopsie de cette sous-routine d'Excel.

Avant de présenter la procédure simpliste, nous devons cependant faire une mise au point. L'arbre BDT n'exige en effet le calcul que d'un seul taux d'intérêt à chaque sous-période de l'arbre, du fait de l'hypothèse ayant trait à la volatilité des taux dans ce modèle. Selon celle-ci, elle ne se modifie pas pour une sous-période donnée. Elle ne dépend donc pas des états de la nature[11]. En vertu du comportement lognormal des taux dans le modèle BDT, la volatilité des taux s'écrit :

$$\sigma_i = \frac{\ln\left(\frac{ru_j}{rd_{j-1}}\right)}{2} \qquad (23)$$

10. Pour les fondements de l'arbre BDT, voir : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001c), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

11. Ici les mouvements de hausse ou de baisse des taux d'intérêt.

où σ_i représente la volatilité des taux d'intérêt à la période i ; ru_j, le taux supérieur à un nœud de l'arbre pour l'état j et rd_{j-1}, le taux inférieur pour le même nœud. Il s'ensuit que :

$$2\sigma_i = \ln\left(\frac{ru_j}{rd_{j-1}}\right) \tag{24}$$

$$\frac{ru_j}{rd_{j-1}} = e^{2\sigma_i} \tag{25}$$

$$rd_{j-1} = ru_j e^{-2\sigma_i} \tag{26}$$

En vertu de l'équation (26), une fois déterminé le taux maximal d'une sous-période de l'arbre, tous les autres sont obtenus par récursivité à partir de l'équation (26). Il n'y a donc qu'une seule inconnue à chaque sous-période de l'arbre.

Fort de ce résultat, nous pouvons nous attaquer à la solution simpliste de l'arbre BDT. L'input au modèle de BDT apparaît au tableau 8.

TABLEAU 8 **Input du modèle BDT**

	B	C	D
1	Taux	Prix	Volatilités
2	0.1	0.909091	
3	0.11	0.811622	0.19
4	0.12	0.71178	0.18
5	0.125	0.624295	0.17
6	0.13	0.54276	0.16
7	0.14	0.455587	0.15
8	0.145	0.38758	0.13
9	0.15	0.326902	0.12
10	0.16	0.262953	0.11
11	0.17	0.208037	0.1
12	0.18	0.161919	0.09
13	0.19	0.124004	0.08

Au tableau 8, les taux d'intérêt sont des taux au comptant calculés sur base effective pour l'année 1 à l'année 12. Les prix correspondants pour les obligations apparaissent dans la colonne C et la volatilité des taux selon l'échéance, dans la colonne D. L'arbre de taux d'intérêt de BDT vise à reproduire les prix observés des obligations selon les diverses échéances retenues. Le tableau 9 donne l'allure générale du chiffrier avant l'exercice.

Dans l'arbre de taux, nous avons fixé arbitrairement le taux maximal de chaque sous-période à 10 %. Les autres taux de chaque sous-période sont calculés en vertu de l'équation (15). Par exemple, à la cellule H15 apparaît la formule suivante :

```
=H14*EXP(-$D$4*2)
```

et à la cellule H16 :

```
=H15*EXP(-$D$4*2)
```

Toute cellule autre que celles du haut de l'arbre doit contenir la formule qui calcule le taux de ladite cellule.

Au bas du tableau 9 apparaît l'arbre des prix des obligations, construit à partir de l'arbre de taux. La première étape de la simulation vise à faire en sorte que le prix calculé de l'obligation de deux ans soit le prix observé. L'obligation de 2 ans verse 1 $ à son échéance, quel que soit l'état de la nature. On actualise ces cash-flows aux taux correspondants de l'arbre des taux et on obtient un prix de 0,8387 $ pour l'obligation. Par exemple, la cellule G31 renferme la formule suivante :

```
=(0,5*(H30+H31))/(1+G15)
```

et la cellule G32 :

```
=(0,5*(H31+H32))/(1+G16)
```

Certes, les deux taux qui servent à actualiser les cash-flows de l'obligation de deux ans ne sont pas appropriés puisque le prix calculé de l'obligation n'est pas égal au prix observé, à hauteur de 0,8116 $ selon le tableau 8. C'est en effet le but de la simulation que de déterminer les taux qui égalisent prix calculés et prix observés.

TABLEAU 9 **La mise en forme du chiffrier**

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1													
2													
3	**Arbre de taux d'intérêt**												
4													
5												0.1	
6											0.1	0.085214	
7										0.1	0.083527	0.072615	
8									0.1	0.081873	0.069768	0.061878	
9								0.1	0.080252	0.067032	0.058275	0.052729	
10							0.1	0.078663	0.064404	0.054881	0.048675	0.044933	
11						0.1	0.077105	0.061878	0.051685	0.044933	0.040657	0.038289	
12					0.1	0.074082	0.059452	0.048675	0.041478	0.036788	0.03396	0.032628	
13				0.1	0.072615	0.054881	0.045841	0.038289	0.033287	0.030119	0.028365	0.027804	
14			0.1	0.071177	0.052729	0.040657	0.035345	0.030119	0.026714	0.02466	0.023693	0.023693	
15		0.1	0.069768	0.050662	0.038289	0.030119	0.027253	0.023693	0.021438	0.02019	0.01979	0.02019	
16	0.1	0.068386	0.048675	0.036059	0.027804	0.022313	0.021014	0.018637	0.017204	0.01653	0.01653	0.017204	
17													
18													
19													
20													1
21												1	1
22	**Arbre des prix des obligations**										1	1	1
23										1	1	1	1
24									1	1	1	1	1
25								1	1	1	1	1	1
26							1	1	1	1	1	1	1
27						1	1	1	1	1	1	1	1
28					1	1	1	1	1	1	1	1	1
29				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31		0.909091	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	0.838674	0.935991	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33													

Le tableau 9 représente le point de départ de la simulation. Dans l'arbre des taux, seules les cellules supérieures sont des inconnues. Les autres doivent contenir leur formule respective. Dans l'arbre des prix, des formules doivent apparaître au départ dans les cellules G31, G32 et F32.

Pour faire apparaître automatiquement des 0,1 dans les cellules supérieures de l'arbre des taux, nous allons enregistrer une première macro, appelée *macro3*. Pour ce faire, nous cliquons dans le menu principal d'Excel sur *Tools*, puis sur *macro* et enfin sur *Record New macro*. Apparaît alors une boîte qui nous demande le nom de la macro, ici *macro3*, et une commande d'exécution, établie à *Ctrl+c*. Puis nous enregistrons cette macro en mettant tout simplement des 0,1 dans les cellules supérieures de l'arbre des taux. Une fois cette opération terminée, nous stoppons la macro. Et nous visualisons dans Visual Basic, au module 1, son apparence, qui est celle du tableau 10.

La macro a donc pastiché toutes les opérations que nous avons effectuées. À chaque fois que nous pesons simultanément sur les touches *Ctrl* et *c* du clavier, des 0,1 apparaissent dans les cellules supérieures de l'arbre des taux.

Pour introduire des 1 dans l'arbre des prix des obligations, nous enregistrons une autre macro, la *macro2*, qui est commandée par *Ctrl+a*. Elle apparaît à l'annexe 1.

Puis nous nous attaquons au cœur du problème, soit la détermination des taux supérieurs de l'arbre BDT. Pour ce faire, nous enregistrons la *macro1*, que nous activerons par *Ctrl+b*. Une fois en mode d'enregistrement, nous appelons le solveur en cliquant sur *Tools*, puis sur *Solver*. Le solveur nous demande d'identifier la cellule-cible, soit F32 au tableau 9, dont la valeur doit être égale au prix de l'obligation de 2 ans. Pour arriver à ce résultat, la cellule G15 du taux doit être modifiée. On presse sur *OK* et l'on obtient la solution recherchée pour cette période. On procède de la sorte jusqu'à la fin de l'arbre. La macro correspondante est donnée à l'annexe 2.

Chaque fois que l'on touche *Ctrl+a*, *Ctrl+c* et *Ctrl+b*, le mécanisme de résolution s'enclenche. À remarquer que le solveur doit être inséré dans le module pour que la macro qui recourt au solveur

TABLEAU 10 **Enregistrement d'une macro**

```
Sub Macro3()
'
' Macro3 Macro
' Macro recorded 8/10/2001 by dsa
'
' Keyboard Shortcut: Ctrl+c
'
   Range("G15").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("H14").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("I13").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("J12").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("K11").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("L10").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("M9").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("N8").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("O7").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("P6").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("Q5").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.1"
   Range("L21").Select
End Sub
```

fonctionne. Pour ce faire, on clique sur *Tools* dans le menu de Visual Basic, puis sur *References* et enfin on coche le solveur dans le menu qui est présenté. Le solveur est alors actif dans le module. On peut par ailleurs modifier les inputs de l'arbre pour obtenir un arbre différent de taux d'intérêt. Dans le cas qui nous intéresse, la forme finale de l'arbre se lit au tableau 11.

Nous avons considéré que les taux étaient calculés sur une base effective et non continue pour les fins de cette simulation, cela pour rester dans l'esprit de l'article de BDT. Dans la section suivante, nous

TABLEAU 11 **L'arbre BDT selon la méthode simpliste**

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
3	**Arbre de taux d'intérêt**												
4													
5												0.406953	
6											0.545567	0.346782	
7										0.514212	0.455696	0.295508	
8									0.473204	0.421002	0.380629	0.251816	
9								0.425414	0.379755	0.344687	0.317928	0.214583	
10							0.373867	0.334643	0.30476	0.282206	0.265556	0.182856	
11						0.336551	0.28827	0.263239	0.244576	0.231051	0.221811	0.155819	
12					0.280077	0.249323	0.222271	0.207071	0.196277	0.189168	0.185272	0.13278	
13				0.228403	0.203377	0.184703	0.171383	0.162888	0.157516	0.154878	0.154752	0.113148	
14			0.196942	0.162571	0.147682	0.136831	0.132145	0.128132	0.126409	0.126803	0.12926	0.096418	
15		0.143181	0.137401	0.115713	0.107239	0.101367	0.101891	0.100792	0.101446	0.103818	0.107967	0.082162	
16	0.1	0.097916	0.095862	0.082361	0.077872	0.075095	0.078563	0.079286	0.081412	0.084999	0.090182	0.070014	
17													
18													
19													
20													1
21												0.710756	1
22	**Arbre des prix des obligations**										0.47014	0.742511	1
23										0.327004	0.520166	0.771898	1
24									0.241036	0.383186	0.568848	0.79884	1
25								0.189233	0.298436	0.440352	0.615423	0.823328	1
26							0.158537	0.246385	0.359235	0.497079	0.659291	0.845412	1
27						0.13995	0.215562	0.309021	0.421499	0.552096	0.700026	0.865187	1
28					0.132093	0.198228	0.27974	0.374816	0.483361	0.604371	0.737371	0.882784	1
29				0.132125	0.192512	0.265101	0.348391	0.441381	0.543193	0.653139	0.77122	0.898353	1
30			0.136933	0.195678	0.262467	0.337356	0.418643	0.506549	0.599715	0.697909	0.801593	0.912061	1
31		0.149269	0.204349	0.269175	0.338177	0.411531	0.487849	0.568564	0.652028	0.738437	0.828606	0.924076	1
32	0.168462	0.221349	0.281696	0.348226	0.415634	0.48447	0.553854	0.626168	0.699602	0.774679	0.852446	0.934567	1

considérons que les taux utilisés sont continus, ce qui affectera quelque peu le calcul des prix des obligations. Cette procédure est plus conforme à la théorie financière[12].

3. Solution de l'arbre de taux BDT par l'algorithme de Newton

Même s'il constitue une procédure très simple, l'enregistrement de macros ne va pas sans désavantages. D'abord, la syntaxe de la macro est souvent complexe et alambiquée. À l'évidence, il faut la simplifier après coup pour pouvoir l'utiliser. Ensuite, la macro se déroule de façon séquentielle. Elle ne fonctionne pas sur le principe de la boucle. À chaque itération, il faut donc répéter les commandes et la macro devient d'une longueur importante si le programme commande un grand nombre d'itérations.

Dans le but de pallier ces désavantages, nous présentons dans ce qui suit une procédure pour solutionner l'arbre de BDT qui recourt à des fonctions Visual Basic développées par Jackson et Stauton (2001). Nous transposerons ces fonctions en procédures[13]. On pourra alors mieux suivre les étapes de chaque itération, ce que ne permet pas une fonction puisqu'elle ne peut transmettre qu'une seule valeur ou une matrice de valeurs. Qui plus est, une fonction donne un arbre carré. Une procédure se traduit pour sa part par un arbre bien constitué comme dans la section précédente.

---

12. Il est facile de passer d'un taux effectif à un taux continu, et vice-versa. Soit r_{ef} un taux effectif annuel et r_c le taux continu correspondant. L'actualisation d'un dollar sur un an doit donner le même résultat pour les deux taux, c'est-à-dire : $\frac{1}{1+r_{ef}} = e^{-r_c}$. En prenant les logarithmes de chaque côté de l'équation, on obtient : $\ln\left(\frac{1}{1+r_{ef}}\right) = -r_c$. Exprimé en termes du taux effectif, le taux continu est donc égal à : $r_c = -\ln\left(\frac{1}{1+r_{ef}}\right)$. De même, il est facile de vérifier que : $r_{ef} = e^{r_c} - 1$.

13. C'est-à-dire que la macro débute par *Sub* plutôt que par *Function*.

Le programme qui solutionne l'arbre de BDT fait appel à une fonction qui calcule le prix de l'obligation pour une échéance donnée une fois obtenus les taux de l'arbre. La procédure comparera par la suite le prix donné par l'itération du programme à celui qui est observé. Les itérations se poursuivront si l'écart entre la valeur donnée par la fonction et le prix observé excède le seuil de tolérance choisi.

La fonction BinZeroPrice de Jackson (Jackson et Stauton, 2001) apparaît au tableau 12. Les explications de cette fonction sont précédées d'une apostrophe : elles ne sont donc pas lues par le programme lors de son exécution.

L'algorithme de Newton est transposé comme suit dans la procédure qui sert à calculer l'arbre de taux. Prenons le cas d'une obligation à coupon zéro de 5 ans dont le prix est de P_0. La fonction dont on cherche la racine, qui est ici le taux maximal de l'arbre des taux à l'échéance de 5 ans, est la suivante :

$$f_r = \text{Valeur donnée par le programme} - P_0 \qquad (27)$$

Le programme itérera tant que la valeur absolue de f_r dépassera un seuil critique fixé par le programmeur.

La procédure retenue pour solutionner l'arbre de taux de BDT apparaît au tableau 13.

Expliquons cette procédure. Elle débute par la déclaration des variables ou vecteurs qui sont utilisés dans celle-ci. Plusieurs cellules ou vecteurs ont été nommés dans le chiffrier associé à la macro de façon à identifier les inputs qui sont répertoriés au tableau 14.

Par exemple, les cellules C2 à C13 au tableau 14 représentent un vecteur nommé *zpvec*. Le programme pourra y trouver les prix observés des obligations selon les diverses échéances. Le programme identifie une valeur pour *radj* qui servira à calculer l'approximation numérique du gradient de la fonction que l'on cherche à annuler. Le seuil de tolérance *atol* est également fixé très près de 0.

TABLEAU 12 **Procédure de calcul de l'arbre binomial du prix de l'obligation**

Option Base 1
Function BinZeroPrice(L, Rmat, n, delt)

```
' Cette fonction a comme arguments: L, la valeur nominale de
' l'obligation
' Rmat, les taux d'un an qui apparaissent dans l'arbre de taux
' n: l'échéance de lobligation
' delt: le pas

   Dim p, pstar, dfac
   Dim i As Integer, j As Integer

   ' vvec est le vecteur des cash-flows de l'obligation
   'On déclare vvec comme un vecteur puis on donne sa dimension
   Dim vvec() As Variant
   ReDim vvec(n + 1)

   ' On suppose que la prob. d'une hausse ou d'une baisse de
   ' taux=0,5

   p = 0.5
   pstar = 1 - p

   ' On génère les cash-flows finaux de l'obligation

   For i = 1 To n + 1

   ' Le cash-flow final est de 1
      vvec(i) = L

   Next i

   ' Puis on fait machine arrière en actualisant ces cash-flows
   ' jusqu'au début de l'arbre. À remarquer la syntaxe de la
   ' boucle.

   For j = n To 1 Step -1

   For i = 1 To j
      vvec(i) = (p * vvec(i) + pstar * vvec(i + 1)) * Exp(-Rmat(i,
      j) * delt)
      Next i
   Next j

   ' Le prix de l'obligation est égal aux cash-flows actualisés
   ' au tout début de l'arbre.

   BinZeroPrice = vvec(1)

End Function
```

TABLEAU 13 **Solution Visual Basic à l'arbre BDT**

```
Sub ArbreBDT()

' Cette procédure a comme arguments: zpvec, les prix spot
' volvec, les volatilités
' L: la valeur nominale de l'obligation, ici 1
' delt, le pas
' Elle génère l'arbre de taux BDT
' elle recourt à la fonction BinZeroPrice

Range("a60:n78").ClearContents
Range("a99:l118").ClearContents
Range("a122:l144").ClearContents
Range("a150:l163").ClearContents
Range("a167:l180").ClearContents


Dim radj, atol, zpk, vkd, rk, fr1, fr, fdashr
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, n As Integer
Dim zpvec() As Variant
Dim volvec() As Variant
Dim L
Dim delt
Dim iter
Dim RTmat() As Variant
n = Application.Count(Range("zpvec"))
ReDim RTmat(n, n)
ReDim zpvec(n)
ReDim volvec(n - 1)

L = Range("L")
delt = Range("delt")
radj = 0.00001
atol = 0.000000001


RTmat(1, 1) = -(Log(Range("zpvec").Cells(1)) / L) / delt
Range("taux1").Offset(0, 0) = RTmat(1, 1)
For k = 2 To n

zpk = Range("zpvec").Cells(k)
vkd = 2 * Range("volvec").Cells(k - 1) * Sqr(delt)
rk = RTmat(1, k - 1)
iter = 1

Do

RTmat(1, k) = rk + radj
```

TABLEAU 13 *(suite)*

```
Range("tauxsim").Offset(iter - 1, k - 1) = RTmat(1, k)


For i = 2 To k
RTmat(i, k) = RTmat(i - 1, k) * Exp(-vkd)
Next i

fr1 = BinZeroPrice(L, RTmat, k, delt) - zpk

RTmat(1, k) = rk

For i = 2 To k
RTmat(i, k) = RTmat(i - 1, k) * Exp(-vkd)
Range("taux1").Offset(i - 1, k - 1) = RTmat(i, k)
Next i

fr = BinZeroPrice(L, RTmat, k, delt) - zpk
Range("fonction").Offset(iter - 1, k - 1) = fr


fdashr = (fr1 - fr) / radj
Range("gradient").Offset(iter - 1, k - 1) = fdashr

rk = rk - (fr / fdashr)
Range("rk1").Offset(iter - 1, k - 1) = rk

iter = iter + 1


Loop While Abs(fr) > atol


Range("taux1").Offset(0, k - 1) = rk


Next k

End Sub
```

Le taux spot d'un an, désigné par *RTmat(1,1)* et qui est ici de 10 %, sert de point de départ à la simulation. Le programme le calcule à partir du prix de l'obligation d'un an. Il est à remarquer que tous les taux spot sont exprimés sous forme continue pour les fins de la procédure.

TABLEAU 14 **Input du modèle BDT**

	A	B	C	D
1		**Taux**	**Prix**	**Volatilité**
2	1	0.1	0.9048374	
3	2	0.11	0.8025188	0.19
4	3	0.12	0.6976763	0.18
5	4	0.125	0.6065307	0.17
6	5	0.13	0.5220458	0.16
7	6	0.14	0.4317105	0.15
8	7	0.145	0.3624024	0.13
9	8	0.15	0.3011942	0.12
10	9	0.155	0.247833	0.11
11	10	0.16	0.2018965	0.1
12	11	0.165	0.1628379	0.09
13	12	0.17	0.1300287	0.08

La procédure comporte une grande boucle :

```
For k = 2 To n
...
Next k
```

Cette boucle sert à calculer les taux de chaque sous-période de l'arbre, en commençant par la sous-période 2, ici la deuxième année. La macro identifie le prix observé de l'obligation pour la période (*zpk*) et calcule la volatilité observée de la période (*vkd*). Le programme donne aussi une valeur de départ au taux maximal de la sous-période, qui est la valeur du taux trouvé à la fin des itérations de la sous-période précédente :

```
rk = RTmat(1, k - 1)
```

Pour la sous-période 2, ce taux est certes le taux spot observé pour un an, soit 10 %, la valeur de *RTmat(1,1)* ayant été calculée auparavant.

Le programme s'engage alors dans une deuxième boucle principale :

```
Do
...
While Abs(fr) >=atol
```

qui est essentiellement l'implantation de l'algorithme de Newton.

Cette boucle principale veut d'abord calculer l'approximation numérique du gradient de la fonction que l'on cherche à annuler. Celle-ci est donnée par la formule suivante :

$$f_r' = \frac{f_r(r_k + radj) - f_r(r_k)}{radj}$$

La première boucle en i du programme, soit :

```
RTmat(1, k) = rk + radj

    For i = 2 To k
RTmat(i, k) = RTmat(i - 1, k) * Exp(-vkd)
    Next i

fr1 = BinZeroPrice(L, RTmat, k, delt) - zpk
```

calcule la valeur du terme f(rk + radj) du gradient. On calcule d'abord le taux maximal de la sous-période et l'on dégage les autres en recourant à la volatilité de la sous-période. Nous omettons les commandes qui servent à imprimer les résultats pour plus de clarté. La fonction est égale à la différence entre d'une part la valeur calculée pour l'obligation par la fonction BinZeroPrice et de l'autre, la valeur observée, et ce pour les taux d'intérêt indiqués.

Pour sa part, la boucle :

```
RTmat(1, k) = rk

    For i = 2 To k
RTmat(i, k) = RTmat(i - 1, k) * Exp(-vkd)
    Next i

fr = BinZeroPrice(L, RTmat, k, delt) - zpk
```

calcule la portion f(rk) du gradient. Une fois ces calculs effectués, on trouve le gradient de l'itération :

```
fdashr = (fr1 - fr) / radj
```

qui nous permet de calculer l'équation de Newton pour cette itération :

```
rk = rk - (fr / fdashr)
```

Et l'on itère jusqu'à ce que la fonction *fr* soit très rapprochée de 0 :

```
Loop While Abs(fr) >= atol
```

Lorsque cette condition est satisfaite, on peut reporter les taux trouvés dans l'arbre aux endroits appropriés :

```
Range(« taux1 »).Offset(0, k – 1) = rk
```

et passer à la sous-période suivante :

```
next k
```

L'arbre résultant du programme se retrouve au tableau 15[14].

L'arbre correspondant des prix de l'obligation de 12 ans, obtenu en insérant les formules appropriées dans le chiffrier[15], est représenté au tableau 16.

On a supposé que le cash-flow que verse l'obligation à coupon 0 à son échéance est de 100 $. L'arbre de taux d'intérêt de BDT a donc reproduit sa valeur observée, soit de 13,00 $ pour l'obligation de 12 ans, ce qui était le but de l'exercice.

La procédure que nous avons mise sur pied nous permet de suivre les étapes de chaque simulation. Examinons d'abord combien d'itérations effectue le programme pour chaque k (i.e. pour chaque échéance considérée) afin d'annuler, ou presque, la fonction *fr*. Le tableau 17 nous fournit cette information. On se rend compte que la procédure de Newton trouve très rapidement le taux correspondant à un k donné, soit après trois ou quatre itérations seulement. L'algorithme de Newton se révèle donc très approprié pour calculer l'arbre de BDT.

Le tableau 18 nous donne pour sa part l'évolution du gradient au fil des itérations, et ce pour chaque k.

---

14. À remarquer que cet arbre de taux ne se compare pas directement à celui du chapitre 3, car les prix des obligations sont ici calculés sur une base continue, ce qui n'était pas le cas au chapitre 3.
15. À ce sujet, voir la section précédente.

TABLEAU 15 **Arbre BDT selon l'algorithme de Newton**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
60	10.0000%	14.2832%	19.5974%	22.7473%	27.8861%	39.8741%	38.5072%	43.7967%	48.7075%	52.9225%	56.1363%	58.0927%
61		9.7677%	13.6726%	16.1909%	20.2494%	29.5394%	29.6911%	34.4517%	39.0887%	43.3293%	46.8890%	49.5033%
62			9.5391%	11.5242%	14.7041%	21.8833%	22.8933%	27.1007%	31.3694%	35.4750%	39.1650%	42.1840%
63				8.2026%	10.6774%	16.2116%	17.6519%	21.3181%	25.1745%	29.0445%	32.7133%	35.9468%
64					7.7534%	12.0098%	13.6106%	16.7695%	20.2030%	23.7796%	27.3245%	30.6318%
65						8.8971%	10.4944%	13.1913%	16.2133%	19.4691%	22.8233%	26.1027%
66							8.0918%	10.3767%	13.0115%	15.9399%	19.0636%	22.2433%
67								8.1626%	10.4420%	13.0505%	15.9233%	18.9545%
68									8.3799%	10.6849%	13.3002%	16.1519%
69										8.7480%	11.1093%	13.7638%
70											9.2793%	11.7287%
71												9.9946%

TABLEAU 16 **L'arbre binomial du prix de l'obligation de 12 ans**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
81	13.00	11.01	9.59	8.78	8.30	8.34	9.78	11.62	15.10	21.48	33.34	55.94	100.00
82		17.73	15.80	14.56	13.75	13.59	15.08	17.11	20.92	27.67	39.59	60.96	100.00
83			23.31	21.67	20.50	20.07	21.44	23.48	27.38	34.18	45.76	65.58	100.00
84				29.62	28.13	27.41	28.52	30.43	34.21	40.77	51.70	69.80	100.00
85					36.17	35.18	35.95	37.62	41.12	47.23	57.31	73.62	100.00
86						42.98	43.39	44.77	47.87	53.41	62.51	77.03	100.00
87							50.56	51.62	54.29	59.19	67.27	80.06	100.00
88								58.02	60.25	64.48	71.56	82.73	100.00
89									65.67	69.27	75.39	85.09	100.00
90										73.55	78.78	87.14	100.00
91											81.76	88.93	100.00
92												90.49	100.00
93													100.00

TABLEAU 17 **La simulation de la fonction à annuler**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
119						**fr: fonction à annuler**						
120												
121							**k**					
122		**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
123	**iter**	0.02936	0.02690	0.01181	0.01454	0.02518	-0.00222	0.00675	0.00488	0.00330	0.00200	0.00098
124		0.00053	0.00052	0.00012	0.00022	0.00076	0.00001	0.00008	0.00005	0.00003	0.00001	0.00000
125		0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
126		0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		0.00000	0.00000	0.00000		

TABLEAU 18 **La simulation du gradient de la fonction à annuler**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
146							**Gradient**					
147												
148							**k**					
149		**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
150	**iter**	-0.6983	-0.5165	-0.3789	-0.2872	-0.2168	-0.1621	-0.1292	-0.1004	-0.0789	-0.0627	-0.0504
151		-0.6733	-0.4965	-0.3711	-0.2788	-0.2039	-0.1632	-0.1261	-0.0983	-0.0775	-0.0619	-0.0500
152		-0.6728	-0.4961	-0.3710	-0.2786	-0.2035	-0.1632	-0.1261	-0.0983	-0.0775	-0.0618	-0.0500
153		-0.6728	-0.4961	-0.3710	-0.2786	-0.2035		-0.1261	-0.0983	-0.0775		

Les informations contenues aux tableaux 17 et 18 nous permettent de suivre l'évolution du taux d'intérêt au fil des itérations, et ce pour chaque k. Pour ce faire, il suffit d'utiliser l'équation de Newton. Le tableau 19 traduit cette évolution pour quelques k.

Examinons par exemple le cas où k = 2, alors que l'on essaie de trouver le taux qui reproduit le prix observé de l'obligation de 2 ans. Le point de départ est le taux observé de l'obligation à coupon zéro d'un an, soit 10 %. Le programme calcule de façon numérique le gradient de la fonction à annuler à partir de ce taux en lui appliquant un petit accroissement. Ce gradient sert à calculer l'équation de Newton, qui amène le taux à 14,2045 %. Comme le seuil de tolérance n'est pas encore atteint, le programme continue d'itérer en se servant du taux de la dernière itération, ici 14,2045 %, comme nouveau point de départ. Le programme calcule le gradient de la fonction à ce nouveau taux, ce qui, en appliquant l'équation de Newton, amène le taux à 14,2832 %. Après une autre itération, le programme s'arrête puisque le seuil de tolérance est atteint pour l'échéance k = 2. Le taux maximal qui entrera dans l'arbre BDT pour k = 2 sera le taux trouvé, soit 14,2832 %. Les autres taux pour cette échéance sont calculés par récursivité à partir de la contrainte de volatilité. Le programme est alors prêt à s'attaquer à la troisième échéance (k = 3). Et ainsi de suite.

TABLEAU 19 **Les itérations sur les taux d'intérêt**

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
156					**Exemples d'itérations**				
157					**k**				
158		2	3	4	5	6	7	8	9
159	**rk**	10.0000%	14.2832%	19.5974%	22.7473%	27.8861%	39.8741%	38.5072%	43.7967%
160									
161	**rk-fr/f'r**	14.2045%	19.4917%	22.7145%	27.8089%	39.5030%	38.5026%	43.7328%	48.6555%
162	**rk**	14.2045%	19.4917%	0.0328%	0.0771%	0.3707%	0.0046%	0.0639%	0.0520%
163	**rk-fr/f'r**	14.2832%	19.4918%	22.7145%	27.8089%	39.5033%	38.5026%	43.7328%	48.6555%
164	**rk**	14.2832%	19.4918%	22.7145%	27.8089%	39.5033%	38.5026%	43.7328%	48.6555%
165	**rk-fr/f'r**	14.2832%	19.5974%	22.7473%	27.8861%	39.8741%	38.5072%	43.7967%	48.7075%

ANNEXE 6.1

Enregistrement de la macro qui *monte* l'arbre du prix de l'obligation

```
Sub Macro2()
'
' Macro2 Macro
' Macro recorded 8/10/2001 by dsa
'
' Keyboard Shortcut: Ctrl+a
'
   Range("H30").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("H30").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("H30:H32"), Type:=xlFillDefault
   Range("H30:H32").Select
   Range("I29").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("I29").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("I29:I32"), Type:=xlFillDefault
   Range("I29:I32").Select
   Range("J28").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("J28").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("J28:J32"), Type:=xlFillDefault
   Range("J28:J32").Select
   Range("K27").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("K27").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("K27:K32"), Type:=xlFillDefault
   Range("K27:K32").Select
   Range("L26").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("L26").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("L26:L32"), Type:=xlFillDefault
   Range("L26:L32").Select
   Range("M25").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("M25").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("M25:M32"), Type:=xlFillDefault
   Range("M25:M32").Select
   Range("N24").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("N24").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("N24:N32"), Type:=xlFillDefault
   Range("N24:N32").Select
   Range("O23").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
   Range("O23").Select
   Selection.AutoFill Destination:=Range("O23:O32"), Type:=xlFillDefault
```

```
    Range("O23:O32").Select
    Range("P22").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
    Range("P22").Select
    Selection.AutoFill Destination:=Range("P22:P32"), Type:=xlFillDefault
    Range("P22:P32").Select
    Range("Q21").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "1"
    Range("Q21").Select
    Selection.AutoFill Destination:=Range("Q21:Q32"), Type:=xlFillDefault
    Range("Q21:Q32").Select
End Sub
```

ANNEXE 6.2

Enregistrement de la macro qui solutionne l'arbre BDT

```
Sub Macro1()
'
' Macro1 Macro
' Macro recorded 8/10/2001 by dsa
'
' Keyboard Shortcut: Ctrl+b
' Nous introduisons les données dans le programme et les nommons de
' façon à pouvoir les modifier au besoin sans retoucher le reste du
' programme.

spot2 = 0.11
spot3 = 0.12
spot4 = 0.125
spot5 = 0.13
spot6 = 0.135
spot7 = 0.14
spot8 = 0.145
spot9 = 0.15
spot10 = 0.155
spot11 = 0.16
spot12 = 0.16

prix2 = 1 / (1 + spot2) ^ 2
prix3 = 1 / (1 + spot3) ^ 3
prix4 = 1 / (1 + spot4) ^ 4
prix5 = 1 / (1 + spot5) ^ 5
prix6 = 1 / (1 + spot6) ^ 6
prix7 = 1 / (1 + spot7) ^ 7
prix8 = 1 / (1 + spot8) ^ 8
prix9 = 1 / (1 + spot9) ^ 9
prix10 = 1 / (1 + spot10) ^ 10
prix11 = 1 / (1 + spot11) ^ 11
prix12 = 1 / (1 + spot12) ^ 12
Application.ScreenUpdating = False

   SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix2, ByChange:="$G$15"
   SolverSolve

   SolverFinish


   Range("G31").Select
   Selection.Copy
   Range("H30").Select
   ActiveSheet.Paste
   Application.CutCopyMode = False
   Selection.AutoFill Destination:=Range("H30:H32"), Type:=xlFillDefault
```

```
Range("H30:H32").Select
SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix3, ByChange:="$H$14"
SolverSolve (UserFinish)

Range("H30").Select
Selection.Copy
Range("I29").Select
ActiveSheet.Paste
Application.CutCopyMode = False
Selection.AutoFill Destination:=Range("I29:I32"), Type:=xlFillDefault
Range("I29:I32").Select
SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix4, ByChange:="$I$13"
SolverSolve (UserFinish)

Range("I29").Select
Selection.Copy
Range("J28").Select
ActiveSheet.Paste
Application.CutCopyMode = False
Selection.AutoFill Destination:=Range("J28:J32"), Type:=xlFillDefault
Range("J28:J32").Select
SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix5, ByChange:="$J$12"
SolverSolve (UserFinish)

Range("J28").Select
Selection.Copy
Range("K27").Select
ActiveSheet.Paste
Application.CutCopyMode = False
Selection.AutoFill Destination:=Range("K27:K32"), Type:=xlFillDefault
Range("K27:K32").Select
SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix6, ByChange:="$K$11"
SolverSolve (UserFinish)

Range("K27").Select
Selection.Copy
Range("L26").Select
ActiveSheet.Paste
Application.CutCopyMode = False
Selection.AutoFill Destination:=Range("L26:L32"), Type:=xlFillDefault
Range("L26:L32").Select
SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix7, ByChange:="$L$10"
SolverSolve (UserFinish)

Range("L26").Select
Selection.Copy
Range("M25").Select
ActiveSheet.Paste
Application.CutCopyMode = False
```

```
    Selection.AutoFill Destination:=Range("M25:M32"), Type:=xlFillDefault
    Range("M25:M32").Select
    SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix8, ByChange:="$M$9"
    SolverSolve (UserFinish)


    Range("M25").Select
    Selection.Copy
    Range("N24").Select
    ActiveSheet.Paste
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.AutoFill Destination:=Range("N24:N32"), Type:=xlFillDefault
    Range("N24:N32").Select
    SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix9, ByChange:="$N$8"
    SolverSolve (UserFinish)


    Range("N24").Select
    Selection.Copy
    Range("O23").Select
    ActiveSheet.Paste
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.AutoFill Destination:=Range("O23:O32"), Type:=xlFillDefault
    Range("O23:O32").Select
    SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix10, ByChange:="$O$7"
    SolverSolve (UserFinish)


    Range("O23").Select
    Selection.Copy
    Range("P22").Select
    ActiveSheet.Paste
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.AutoFill Destination:=Range("P22:P32"), Type:=xlFillDefault
    Range("P22:P32").Select
    SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix11, ByChange:="$P$6"
    SolverSolve (UserFinish)


    Range("P22").Select
    Selection.Copy
    Range("Q21").Select
    ActiveSheet.Paste
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.AutoFill Destination:=Range("Q21:Q32"), Type:=xlFillDefault
    Range("Q21:Q32").Select
    SolverOk SetCell:="$F$32", MaxMinVal:=3, ValueOf:=prix12, ByChange:="$Q$5"
    SolverSolve (UserFinish)

End Sub
```

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

BERNDT, E.R., B.H. HALL, R.E. HALL et J.A. HAUSMAN (1974), « Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models », *Annals of Economic and Social Measurement*, vol. 3, p. 653-665.

BISIÈRE, C. (1997), *La structure par terme des taux d'intérêt*, Paris, Presses universitaires de France, 1997.

BJERKSUND, P. et G. STENSLAND (1996), « Implementation of the Black-Derman-Toy Interest Rate Model », *The Journal of Fixed Income*, septembre, p. 67-75.

BLACK, F., E. DERMAN et W. TOY (1990), « A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options », *Financial Analysts Journal*, janvier-février, p. 33-39.

CLEWLOW, L. et C. STRICKLAND (1998), *Implementing Derivatives Models*, Chichester, Wiley.

HENDRY, D.F. (1995), *Dynamic Econometrics*, Oxford, Oxford University Press.

JACKSON, M. et M. STAUTON (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley.

JUDD, K.L. (1998), *Numerical Methods in Economics*, MIT Press, Cambridge

JUDGE, G.G., W.E. GRIFFITHS, R.C. HILL, H. LÜTKEPOHL et T.C. LEE (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, Wiley.

NEFTCI, S. (2000), *An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2e édition, San Diego, Academic Press.

PRESS, W.H., S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING et B.P. FLANNERY (1992), *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2e édition, Cambridge, Cambridge University Press.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001a), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001b), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, CRG, 13-2001, mai.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001c), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

ROSTAN, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire.

WEI, J.Z. (1996), *A Simple Approach to Bond Option Pricing*, document de travail, University of Saskatchewan, département de finance et de management.

CHAPITRE

7

DE LA CONSTRUCTION D'ARBRES BINOMIAUX ET TRINOMIAUX DES PRIX DES PRODUITS DÉRIVÉS ET DE SES RAPPORTS AVEC LA SIMULATION MONTE CARLO

UNE EXCURSION DANS LA PROGRAMMATION VISUAL BASIC

Le recours au calcul numérique pour déterminer les prix des produits dérivés dont l'ingénierie n'a de cesse de se complexifier va grandissant. D'autant plus que la puissance de plus en plus importante des systèmes informatiques permet d'effectuer en seulement quelques minutes des simulations qui autrefois paraissaient inabordables ou auraient exigé plusieurs jours d'exécution. C'est pourquoi il importe de maîtriser les techniques du calcul numérique et de savoir les transposer à la détermination des prix des produits dérivés.

Dans ce chapitre, nous nous attardons dans un premier temps à la construction d'arbres binomiaux et trinomiaux. De tels arbres permettent en effet de tarifier un grand nombre d'options américaines. De plus, les arbres binomiaux et trinomiaux présentent l'avantage de converger rapidement vers la solution recherchée. Puis nous déplaçons notre collimateur vers la simulation Monte Carlo, toujours dans le but de calculer les prix de produits dérivés. Contrairement aux arbres, la simulation Monte Carlo requiert un très grand nombre d'itérations avant que la convergence puisse s'obtenir. Une simulation Monte Carlo impose en effet moins de contraintes que la binomiale ou la trinomiale quant à la reproduction du mouvement brownien géométrique du prix de l'action. Considérons par exemple le cas d'une option d'achat européenne. Les mouvements de hausse et de baisse du sous-jacent de même que les probabilités neutres au risque doivent être définis de façon à ce que l'arbre binomial converge vers la solution analytique découverte par Black et Scholes (1973). Une telle contrainte

n'existe pas lors d'une simulation Monte Carlo. De plus, dans le cas de la binomiale, il y a actualisation des cash-flows de l'option à chaque nœud de l'arbre, ce qui rapproche davantage cette méthode du calcul en temps continu. Pour ce qui concerne la simulation Monte Carlo, la discrétisation d'Euler du mouvement brownien suivi par le sous-jacent n'est qu'une première approximation du calcul continu. Il reste que la simulation Monte Carlo peut s'attaquer au calcul des prix de produits dérivés fort complexes, ce que ne sauraient faire les arbres binomiaux et trinomiaux. Mentionnons finalement que, pour écrire les programmes en Visual Basic qui suivent, nous nous inspirons de fonctions ou programmes développés par Jackson et Stauton (2001) mais surtout par Clewlow et Strickland (1998), dont les algorithmes sont rédigés en pseudo-code qu'il a fallu transposer au langage Visual Basic, ce qui peut s'avérer parfois laborieux[1].

1. Construction de l'arbre binomial (multiplicatif) d'une option d'achat européenne et d'une option de vente américaine[2]

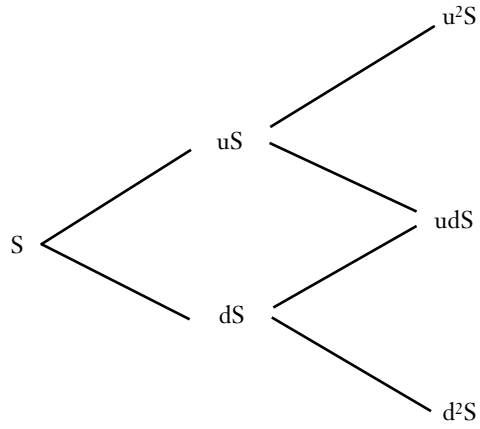
1.1. Prix d'une option d'achat européenne

De manière à calculer le prix d'une option d'achat européenne par le biais de l'arbre binomial, nous devons d'abord évaluer les prix de l'action sous-jacente au bout de l'arbre, tel qu'illustré à la figure 1.

1. Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *Implementing Derivative Models*, Chichester, Wiley ; Jackson, M. et M. Stauton (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley. Dans certains programmes, comme la construction de l'arbre trinomial, la transposition du pseudo-code de Clewlow et Strickland était loin d'être directe pour ce qui concerne le langage Visual Basic. De plus, pour déterminer le prix du *spread* européen, nous avons intégré au calcul la factorisation de Cholesky, qui n'était pas mentionnée par Clewlow et Strickland, mais qui est pourtant nécessaire pour corréler des variables aléatoires.

2. En plus des auteurs cités dans la note précédente, nous nous référons dans cette section à : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001a), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, CRG, 13-2001, mai ; Racicot F.-É. et R. Théoret (2001b), *Le calcul numérique en ingénierie financière. Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation et étude d'un cas : l'algorithme*

FIGURE 1



où u est le multiple de hausse de S, soit le prix de l'action sous-jacente, et d, le multiple de baisse de S. Une fois les prix des actions au bout de l'arbre déterminés, on calcule les cash-flows correspondants du call européen. À l'état j, le cash-flow d'un call européen est égal à :

$$C(j) = MAX\left(0,\ S(j) - K\right) \tag{1}$$

où C(j) est le cash-flow du call pour l'état j ; S(j), le prix de l'action sous-jacente pour cet état et K, le prix d'exercice ou de levée.

de Newton comme solution à l'arbre binomial de Black, Derman et Toy, CRG, 28-2001 ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001c), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril ; Racicot F.-É. et R. Théoret (2001d), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec ; Benninga, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge, The MIT Press ; Rostan, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire ; Hull, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall ; Wilmott, P. (2000), *On Quantitative Finance*, volumes 1 et 2, New York, Wiley.

Puis on calcule le prix du call en actualisant l'espérance de ses cash-flows dans un univers neutre au risque. Pour actualiser l'espérance des cash-flows, on recourt à de probabilités neutres au risque pour pondérer les mouvements de hausse et de baisse du prix de l'action sous-jacente.

$$C = e^{r(T-t)}E^*\left[\max\left(0,\ S_T - K\right)\right] \tag{2}$$

où C est le prix du call européen et E*, l'espérance neutre au risque. (T – t) est par ailleurs la durée de l'option.

Il reste à déterminer les probabilités neutres au risque. Celles-ci sont choisies de façon telle qu'elles soient compatibles avec le modèle de Black et Scholes. En effet, la solution de l'arbre binomial doit converger vers le modèle de Black et Scholes. Dans ce modèle, le prix de l'action sous-jacente obtempère à une distribution log-normale. Pour qu'il y ait compatibilité, le mouvement de hausse du prix de l'action dans l'arbre binomial doit être défini comme suit :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{3}$$

où σ est la volatilité du rendement de l'action et Δt, l'intervalle de temps dans lequel on a divisé la durée de l'option (T – t). Par ailleurs, le mouvement de baisse d du prix de l'action doit être égal à :

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{4}$$

Par ailleurs, toujours pour arrimer l'arbre binomial sur la solution analytique de Black et Scholes au calcul du prix d'un call européen, la probabilité neutre au risque de hausse du prix de l'action doit être de :

$$p = \frac{e^{r\times dt} - d}{u - d} \tag{5}$$

Certes, la probabilité de baisse est égale à $(1 - p)$[3]. Le programme Visual Basic pour déterminer le prix du call européen par le biais de l'arbre binomial se retrouve au tableau 1.

3. Pour les preuves de ces résultats, on consultera : Racicot, F.-É. et R. Théoret, *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, CRG, 13-2001, mai 2001.

TABLEAU 1 Programme Visual Basic pour calculer le prix d'un call européen par la binomiale

```
Sub Calloption()


Sheet1.Activate
Range("G8:L2000").ClearContents


Dim K, T, S, R, N, u, d
K = 100
T = 0.25
S = 100
R = 0.06
sigma = 0.1

N = Range("nombre")

' On définit le pas
dt = T / N

' On retient le processus de hausse et de baisse compatible avec
' Black et Scholes.

u = Exp(sigma * Sqr(dt))
Range("up") = u
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
Range("down") = d

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)

Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)

' Probabilité de hausse conforme au processus B&S

p = (Exp(R * dt) - d) / (u - d)

Range("prob") = p

' La probabilité de baisse est bien sûr de (1-p)

' Taux d'escompte des cash-flows de l'option

disc = Exp(-R * dt)
```

TABLEAU 1 *(suite)*

```
' Prix de départ pour calculer les prix de l'action au dernier
' pas de l'arbre

Smat(0) = S * (d ^ N)
Range("Smat0").Offset(0, 0) = Smat(0)

' À partir de ce prix, on calcule tous les autres prix de
' l'action à l'extrémité de l'arbre

For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Range("Smat1").Offset(j - 1, 0) = Smat(j)
Next j

' Puis on calcule les cash-flows de l'option au bout de l'arbre

For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(0, Smat(j) - K)
Range("Cash1").Offset(j, 0) = Cash(j)
Next j

' Que l'on actualise par la suite jusqu'au début de l'arbre.
' À remarquer la notation pour faire machine arrière

For i = N - 1 To 0 Step -1

For j = 0 To i
Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))
Next j

Next i


Range("callb") = Cash(0)

End Sub
```

Examinons pas à pas cette procédure. Celle-ci sera imprimée sur la feuille 1 d'un chiffrier Excel :

```
Sheet1.Activate
```

On demande ensuite au programme d'effacer le *Range* de cellules désigné :

```
Range("G8:L2000").ClearContents
```

Puis on déclare les variables du modèle par la commande *Dim* :

```
Dim K, T, S, R, N, u, d
```

Les cinq premières variables de cette énumération constituent les inputs du modèle. u et d seront par ailleurs calculés dans le programme. On donne ensuite des valeurs aux inputs. On aurait certes pu introduire ces inputs dans la feuille 1. Par exemple, N, le nombre de pas, se trouve dans une cellule de la feuille 1 nommée : nombre.

```
N = Range("nombre")
```

On définit le pas :

```
dt = T / N
```

Et l'on écrit ensuite les équations de u et de d conformes au modèle de Black et Scholes :

```
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
```

On demande alors de stocker le résultat dans une cellule nommée : *up* :

```
Range("up") = u
```

On répète la même opération pour d :

```
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
    Range("down") = d
```

On déclare i et j comme des entiers, lesquels serviront de compteurs pour les boucles du programme :

```
Dim i as Integer
Dim j as Integer
```

On déclare un vecteur nommé *Smat* qui servira à stocker les prix finaux de l'action (au bout de l'arbre) :

```
Dim Smat() As Variant
```

Les parenthèses indiquent que la variable (*Variant* dans le langage VBA) *Smat* est un vecteur. Puis on déclare la dimension du vecteur *Smat* par la commande *ReDim* :

```
ReDim Smat(N)
```

On déclare de la même façon un autre vecteur : *Cash*( ), qui nous servira à emmagasiner les cash-flows de l'option.

```
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)
```

On définit la probabilité de hausse ainsi que le taux d'escompte des cash-flows de l'option (taux continu) :

```
p = (Exp(R * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-R * dt)
```

et l'on est prêt à enclencher le programme.

Le prix minimal de l'action au bout de l'arbre est d'abord calculé, c'est-à-dire celui qui correspond à l'état 0.

```
Smat(0) = S * (d ^ N)
```

* À la figure 1, N = 2.

Le prix minimal au bout de l'arbre est donc de :

$$Smat(0)=Sd^2$$

Puis, à partir de ce prix, on calcule les autres prix au bout de l'arbre en s'aidant d'une boucle qui commence à 1 et se termine à N :

```
For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Range("Smat1").Offset(j - 1, 0) = Smat(j)
Next j
```

On sait que le prix immédiatement au-dessus du prix minimal de la figure 1, soit Smat(1), est Sdu, c'est-à-dire SMAT(0)*(u/d) :

$$Sdu = (Sd^2)(u/d) = SMAT(0)(u/d)$$

Par conséquent, quand j = 1, on a dans le cas de la figure 1 selon la boucle :

```
SMAT(1) = SMAT(0)*(u/d)
```

ce qui est bien le résultat recherché. Et l'on poursuit ce processus jusqu'à N, c'est-à-dire jusqu'au sommet de l'arbre. Pour le cas où N = 2 :

```
SMAT(2) = SMAT(1) *(u/d)
```

toujours selon la boucle. Comme SMAT(1) = Sdu,

```
SMAT(2) = Sdu * (u/d) = Su²
```

ce qui est bien le résultat recherché.

Une fois calculés les prix des actions selon les différents états de la nature au bout de l'arbre, on calcule les cash-flows correspondants du call européen. La procédure pour y arriver est la suivante :

```
For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(0, Smat(j) - K)
Next j
```

En effet, à l'échéance du prix du call, sa valeur est de :

```
C = MAX (0, S-K)
```

En langage VBA, cela se traduit par :

```
Cash(j) = Application.Max(0, Smat(j) - K)
```

La commande *Application* de Visual Basic appelle la fonction Excel : *MAX*. On doit effectuer ce calcul pour les (N + 1) prix de l'action au bout de l'arbre, d'où la boucle :

```
For j = 0 To N
...
Next j
```

Il reste à actualiser ces cash-flows jusqu'au début de l'arbre pour en arriver à calculer le prix du call. L'actualisation débute à la période (N – 1). D'où la boucle :

```
For i = N-1 to 0 Step-1
...
Next i
```

Cette boucle commande de débuter les calculs à la période (N – 1), cela jusqu'à la période 0, en reculant d'une période à la fois. À l'intérieur de cette boucle, on demande l'actualisation des cash-flows à chaque sous-période. Pour illustrer le calcul, supposons un arbre où N = 3. Il y a alors quatre cash-flows pour le call à la fin de l'arbre, comme l'indique la figure 2.

FIGURE 2

	A	B	C	D
1				C33
2				C23
3				C13
4				C03

Le premier indice des cash-flows représente l'état de la nature, et le second, la période. Nous voulons actualiser ces cash-flows pour la période 2. Selon le programme, il faut suivre la procédure suivante :

```
                    For j = 0 To i
Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))
                    Next j
```

Pour j = 0 jusqu'à 2, soit N – 1, on doit effectuer les calculs suivants selon la procédure. Pour j = 0 :

```
C02 = disc* [p*C13 + (1-p)*C03]
```

Pour j = 1 :

```
C12 = disc* [p*C23 + (1-p)*C13]
```

et pour j = 2 :

```
C22 = disc* [p*C33 + (1-p)*C23]
```

Les résultats de ces calculs apparaissent à la figure 3.

FIGURE 3

	A	B	C	D
1				C33
2			C22	C23
3			C12	C13
4			C02	C03

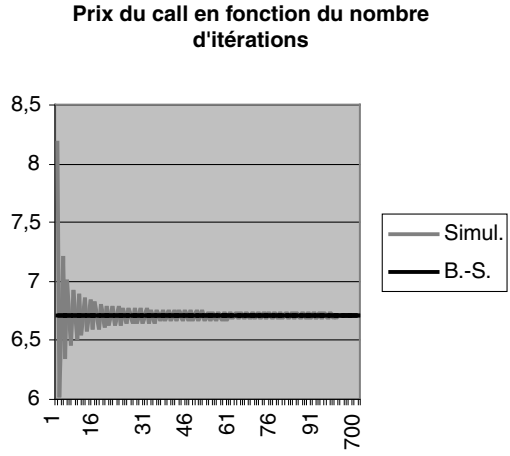
On a bien effectué l'actualisation des cash-flows de la période 3 à la période 2. Et l'on remonte de la sorte au début de l'arbre pour en arriver au prix du call européen, soit Cash(0), ou C00 dans l'arbre modélisé. La figure 4 prend acte de ces opérations.

FIGURE 4

	A	B	C	D
1				C33
2			C22	C23
3		C11	C12	C13
4	C00	C01	C02	C03

Avec les données actuelles et pour N = 100, le prix du call européen est égal à 6,6931 $ selon l'arbre binomial. Par ailleurs, selon le modèle de Black et Scholes, ce prix serait de 6,7080 $. L'arbre converge bien vers la solution de Black et Scholes, comme l'atteste la figure 5.

FIGURE 5



1.2. Prix d'une option de vente américaine

Le programme qui vient d'être exposé se transpose facilement au cas du put américain. Pour y arriver, nous allons écrire, dans le langage de Visual Basic, une fonction qui calcule le prix d'un put américain : putbi. Le programme de cette fonction se retrouve au tableau 2. Les modifications que nous avons apportées au programme du call européen de manière à calculer le prix du put américain sont indiquées en gras.

TABLEAU 2 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'un put américain par la binomiale**

```
Function Putbi(K, T, S, sigma, R, N)
Dim u As Variant, d As Variant, p As Variant, disc As Variant, dt
As Variant
dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)
p = (Exp(R * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-R * dt)
Smat(0) = S * (d ^ N)
For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j
For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(0, K - Smat(j))
Next j
For i = N - 1 To 0 Step -1
For j = 0 To i
Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))
' Si c'est un put, il faut vérifier s'il doit y avoir exercice
Smat(j) = Smat(j) / d
Cash(j) = Application.Max(Cash(j), K - Smat(j))
Next j
Next i
Putbi = Cash(0)
End Function
```

Au lieu d'établir une procédure[4], nous avons défini une fonction pour calculer le prix du put européen que nous déclarons comme suit :

```
Function Putbi(K, T, S, sigma, R, N)
```

Pour une fonction, il faut en effet définir ses inputs dans la parenthèse. Un premier changement est celui au niveau du calcul des cash-flows du put à la date d'échéance.

```
Cash(j) = Application.Max(0, K - Smat(j))
```

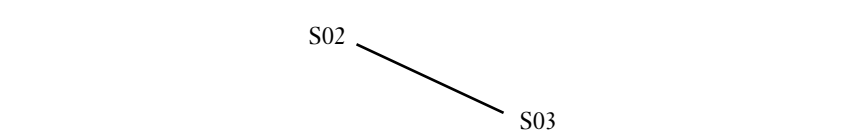
En effet, le cash-flow d'un put à l'échéance est de :

```
P = MAX (0, K-S )
```

Puis, nous devons vérifier la condition d'exercice à chaque nœud de l'arbre lors de l'actualisation des cash-flows :

```
Cash(j) = Application.Max(Cash(j), K - Smat(j))
```

c'est-à-dire que la valeur du put à un nœud est le maximum des deux nombres suivants : *i)* la valeur actualisée des cash-flows au nœud ; *ii)* la valeur d'exercice du put, c'est-à-dire la différence entre le prix d'exercice et le prix de l'action. Le prix de l'action ayant une baisse de moins que le suivant à un nœud :



On a :

```
S03 = d * S02
```

d'où

```
S02 = S03/d
```

C'est ce qui explique la formule suivante dans le programme pour calculer le prix du cash-flow d'un nœud :

```
Smat(j) = Smat(j) / d
```

4. Laquelle débuterait par *Sub*() plutôt que par *Function*().

Finalement, on indique que la valeur de la fonction est égale au prix du put, soit :

```
putbi = cash(0)
```

Les résultats des calculs de cette section sont compilés à la figure 6.

FIGURE 6

	A	B
15	**Calcul par Black et Scholes**	
16		
17	S	100
18	K	100
19	T	0.25
20	r	0.06
21	sigma	0.3
22	N	200
23	d1	0.1750
24	d2	0.0250
25		
26	N(d1)	0.5695
27	N(d2)	0.5100
28		
29	Prix du call B&S	6.7080
30		
31	Put B&S	5.2192
32		
33	**Calcul par la binomiale**	
34		
35	Prix du call Bino	6.70057
36	Prix du put: putbino	5.34168

Avec les données retenues, le prix du put américain est égal à 5,3417 $. Il est plus élevé, comme il se doit, que le prix du put européen (B.-S.), qui est de 5,2192 $. Au niveau de la solution de Black et Scholes, le prix du put passe en dessous de sa valeur intrinsèque à partir d'un certain prix, ce qui n'est pas le cas pour le prix calculé par la binomiale. Les figures 7 et 8 prennent acte de ces différences.

FIGURE 7

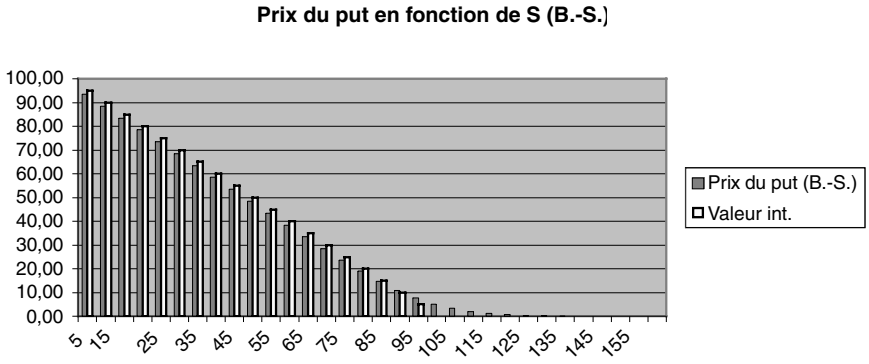
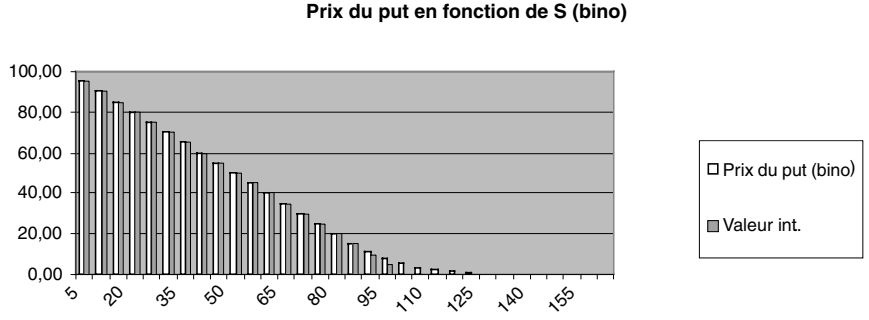


FIGURE 8

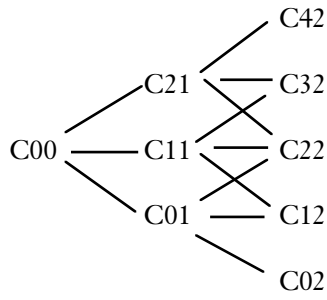


2. CONSTRUCTION DE L'ARBRE TRINOMIAL D'UNE OPTION D'ACHAT EUROPÉENNE

2.1. Première procédure

L'arbre trinomial comporte 3 branches à chaque nœud au lieu de 2 comme dans le cas de la binomiale. La figure 9 représente un arbre trinomial pour le cas où N = 2.

FIGURE 9



À chaque période, un arbre binomial a (N + 1) nœuds tandis que l'arbre trinomial comporte (2N + 1) nœuds. À l'instar de l'arbre binomial, on calcule d'abord les u, d et p de manière à assurer la compatibilité avec le modèle de Black et Scholes[5] :

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \tag{6}$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}} \tag{7}$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \times \left(r_f - div - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6} \tag{8}$$

$$p_m = \frac{2}{3} \tag{9}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \times \left(r_f - div - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6} \tag{10}$$

où div est le taux de paiement du dividende et où p_u représente la probabilité neutre au risque d'un mouvement de hausse du prix de l'action ; p_d, la probabilité d'un mouvement de baisse et p_m, celle d'un mouvement mitoyen. Quand il y a un dividende, on le soustrait du taux d'intérêt pour construire l'arbre. Le programme de l'arbre trinomial se retrouve au tableau 3.

5. À ce sujet, on consultera : Hull (2000).

TABLEAU 3 **Programme Visual Basic de l'arbre trinomial**

```
Sub ArbretriBS()

Sheet10.Activate
Range("g6:df2000").ClearContents
K = 100
T = 0.25
S = 100
sig = 0.3
rf = 0.06
div = 0#


Dim N As Integer
Dim R As Integer
Dim j As Integer
Dim i As Integer


N = 100

R = 2 * N + 1

Dim Stree() As Variant
ReDim Stree(R)
Dim Ctree() As Variant
ReDim Ctree(R)


dt = T / N
Range("dtt1").Offset(0, 0) = dt

nu = Exp(sig * Sqr(3 * dt))
Range("nut1").Offset(0, 0) = nu

nd = 1 / nu

ps = Sqr(dt / (12 * sig ^ 2))
pu = ps * (rf - div - sig ^ 2 / 2) + 1 / 6

Range("putt1").Offset(0, 0) = pu

pm = 2 / 3

Range("pmt1").Offset(0, 0) = pm

pd = -ps * (rf - div - sig ^ 2 / 2) + 1 / 6

Range("pdt1").Offset(0, 0) = pd
```

TABLEAU 3 *(suite)*

```
disc = Exp(-rf * dt)


Stree(1) = S * (nd ^ (N))
Range("Stree1").Offset(0, 0) = Stree(1)

For j = 2 To R

Stree(j) = Stree(j - 1) * (nu)
Range("Stree1").Offset(j - 1, 0) = Stree(j)
Next j

For j = 1 To R
Ctree(j) = Application.Max(0, Stree(j) - K)

Range("Ctreej1").Offset(j, N) = Ctree(j)
Next j

For i = N - 1 To 0 Step -1

S = 2 * i + 1

For j = 1 To S


Ctree(j) = disc * (pu * Ctree(j + 2) + pm * Ctree(j + 1) + pd *
Ctree(j))
Range("ctreej1").Offset(j, i) = Ctree(j)
Next j

Next i

Range("call6") = Ctree(1)

End Sub
```

Dans ce programme, R est le nombre de nœuds au bout de l'arbre :

```
R = 2 * N + 1
```

On calcule dans un premier temps les prix de l'action au bout de l'arbre en commençant par le prix minimal qui est égal à :

```
Stree(1) = S * (nd ^ (N))
```

Puis on calcule les autres prix au bout de l'arbre par ordre ascendant :

```
                For j = 2 To R
        Stree(j) = Stree(j - 1) * (nu)
Range("Stree1").Offset(j - 1, 0) = Stree(j)
                Next j
```

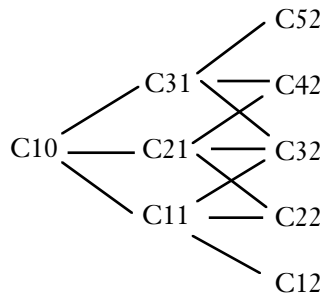
puisque nu = 1/nd.

Il s'ensuit le calcul des cash-flows correspondants du call européen au bout de l'arbre :

```
                For j = 1 To R
Ctree(j) = Application.Max(0, Stree(j) - K)
  Range("Ctreej1").Offset(j, N) = Ctree(j)
                Next j
```

Il faut ensuite actualiser ces cash-flows. Pour dégager le mécanisme d'actualisation à chaque nœud, nous allons reprendre l'arbre trinomial modélisé précédent : les états de la nature commencent à 1 plutôt qu'à 0.

FIGURE 10



Considérons le cas où N = 1, c'est-à-dire là où il y a trois nœuds. On constate que chaque nœud est l'actualisation des nœuds de la période (N = 2) correspondant au même état et ceux des deux états qui le suivent immédiatement. Par exemple, C11 est l'actualisation

des nœuds C12, C22 et C32. Si l'on désigne les états par j, chaque nœud d'état j est l'actualisation des nœuds de la période suivante pour les états j, j + 1 et j + 2. D'où la procédure suivante pour l'actualisation des cash-flows.

```
For i = N - 1 To 0 Step -1

    S = 2 * i + 1
    For j = 1 To S
Ctree(j) = disc * (pu * Ctree(j + 2) + pm * Ctree(j + 1) +
    pd * Ctree(j))
Range("ctreej1").Offset(j, i) = Ctree(j)
    Next j

    Next i

Range("call6") = Ctree(1)
```

Envisageons le cas précédent où N = 1, soit i = 1. Il y a alors 3 nœuds dans cet état :

```
S = 2*i + 1 = 3
```

On doit actualiser les cash-flows pour chacun de ces nœuds. D'où la boucle :

```
For j = 1 To S
    ...
Next j
```

Retournons à l'arbre modélisé de la figure 10. On commence à actualiser les cash-flows par le bas. En appliquant la procédure du programme, on a :

```
C11= disc*(pu*C32 + pm*C22 + pd*C12)
```

et ainsi de suite. C'est bien ce qu'il faut faire. Finalement, le prix recherché du call européen se trouve dans l'état 1 de la période 0, soit CTREE(1).

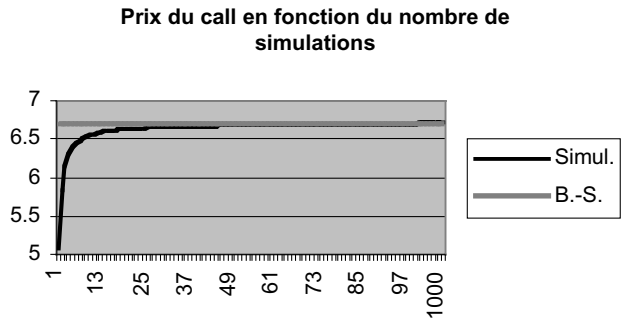
Pour les mêmes données que dans le problème précédent, on trouve un prix du call de 6,6932 $ contre 6,7080 pour Black et Scholes.

FIGURE 11

	A	B	C
16	Prix du calll		6.693224
17			
18			
19	S	100	
20	K	100	
21	T	0.25	
22	sig	0.3	
23	rf	0.06	
24	div	0	
25	N	100	

On constate à la figure 12 que le mécanisme de convergence est différent pour les modèles binomial et trinomial. Le prix de l'arbre trinomial converge vers la solution de Black et Scholes de façon continue sans cycles (zigzags).

FIGURE 12



Un tel mécanisme de convergence s'avère plus efficace.

Le tableau 4 présente l'arbre trinomial (modélisé) dans un chiffrier Excel pour N = 10 :

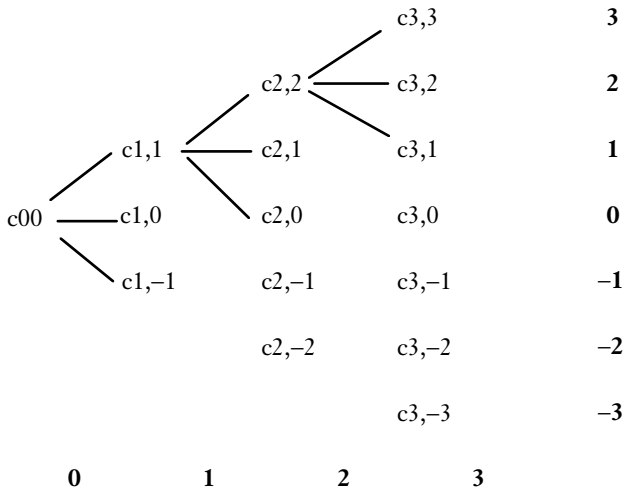
TABLEAU 4

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
18	6.556208	2.618015	0.706768	0.103291	0.005084	1.94E-18	0	0	0	0	0
19		6.169129	2.298327	0.537287	0.057634	0.00117	0	0	0	0	0
20		11.97366	5.762371	1.968987	0.379924	0.025521	1.15E-17	0	0	0	0
21			11.59522	5.331774	1.629704	0.239803	0.006935	0	0	0	0
22			19.61683	11.20359	4.871412	1.281041	0.12392	6.82E-17	0	0	0
23				19.33784	10.79778	4.372348	0.925782	0.041108	0	0	0
24				29.07795	19.06559	10.37736	3.820122	0.572368	4.04E-16	0	0
25					28.89329	18.8045	9.943716	3.189344	0.243681	0	0
26					39.80682	28.71875	18.5608	9.503103	2.431345	2.4E-15	0
27						39.65496	28.55463	18.3426	9.074806	1.444502	0
28						51.54829	39.50504	28.3997	18.15829	8.712654	1.42E-14
29							51.39931	39.35583	28.25027	18.00864	8.562774
30							64.31207	51.25011	39.2064	28.10062	17.85876
31								64.16287	51.10068	39.05675	27.95074
32								78.18132	64.01344	50.95103	38.90687
33									78.03189	63.86379	50.80115
34									93.25071	77.88224	63.71392
35										93.10106	77.73237
36										109.623	92.95119
37											109.4732
38											127.4099

2.2. Seconde procédure

Nous présentons dans cette section une procédure pour construire l'arbre trinomial qui respecte à la lettre le pseudo-code proposé par Clewlow et Strickland[6]. Ce pseudo-code repose sur une construction alternative de l'arbre trinomial, laquelle se retrouve à la figure 9. Désignons par i la sous-période de l'arbre et j, les états de la nature pour cette sous-période. Dans un arbre trinomial, j est compris entre –i et +i, tel que l'illustre la figure 9.1.

FIGURE 9.1



Par exemple, à la sous-période 1, les états de la nature sont compris entre –1 et +1 dans un arbre trinomial ; à la sous-période 2, entre –2 et +2 ; et ainsi de suite. Le tableau 3.1, qui est une version modifiée du tableau 3, présente le programme de la construction d'un tel arbre[7].

6. Clewlow et Strickland (1998), p. 54, figure 3.3.
7. Cette procédure nous a été suggérée par Pierre Rostan.

TABLEAU 3.1 **Programme de l'arbre trinomial conforme à la figure 9.1**

```
Sub tri()

Range("N1:Eq1000").ClearContents
X = 100
T = 1
S = 100
sigma = 0.2
r = 0.06
div = 0.03
N = 10

Dim i, j As Integer
Dim dt, nu, pu, pm, pd As Double

Dim c(), st() As Double
ReDim c(0 To N, -N To N)
ReDim st(-N To N)

dt = T / N
Range("dtt1") = dt
nu = Exp(sigma * Sqr(3 * dt))
Range("nu1") = nu
nd = 1 / nu
Range("nd1") = nd
ps = Sqr(dt / (12 * sigma ^ 2))
pu = ps * (r - div - sigma ^ 2 / 2) + 1 / 6
Range("pu1") = pu
pm = 2 / 3
Range("pm1") = pm
pd = - ps * (r - div - sigma ^ 2 / 2) + 1 / 6
Range("pd1") = pd
disc = Exp(-r * dt)
Range("disc1") = disc
ndN = nd ^ (N)
Range("ndN") = ndN
st(-N) = S * ndN
Range("st11").Offset(0, 0) = st(-N)

For j = -N + 1 To N

st(j) = st(j - 1) * nu
Range("st11").Offset(j + N, 0) = st(j)

Next j

For j = -N To N
```

TABLEAU 3.1 *(suite)*

```
c(N, j) = Application.max(0, st(j) - X)
Range("cjt1").Offset(-j, N) = c(N, j)

Next j

For i = N - 1 To 0 Step -1

For j = -i To i
c(i, j) = disc * (pu * c(i + 1, j + 1) + pm * c(i + 1, j) + pd *
c(i + 1, j - 1))
Range("cjt1").Offset(-j, i) = c(i, j)
Next j

Next i

Range("call1") = c(0, 0)


End Sub
```

Ce programme est quelque peu différent du précédent. De façon à ce que Visual Basic accepte des nombres négatifs pour i et j, qui servent de compteurs pour les boucles, le vecteur dans lequel seront stockés les prix de l'action au bout de l'arbre, désigné par st, et la matrice qui recevra les cash-flows du call, désignée par c, doivent être définis en conséquence.

On déclare tout d'abord ces vecteurs (ou matrices) par la commande suivante :

```
Dim c(), st() As Double
```

La commande *Double* signifiant que les nombres stockés dans les deux vecteurs peuvent se situer entre 4,94E-324 et 1,79E308 en valeur absolue. Puis on déclare la dimension de ces vecteurs :

```
ReDim c(0 To N, -N To N)
ReDim st(-N To N)
```

Cela signifie que l'indice i dans c_{ij} peut prendre des valeurs comprises entre 0 et N, ce qui représente les sous-périodes, et que l'indice j peut prendre des valeurs comprises entre –N et N pour ce qui concerne les états de la nature, cela en conformité avec la figure 9.1.

Comme st stocke les prix de l'action au bout de l'arbre, sa dimension s'étire de –N à N. Visual Basic acceptera alors que les compteurs des boucles du programme puissent prendre des valeurs négatives.

On remarquera que l'actualisation des cash-flows de l'option dans ce programme diffère du programme précédent. Elle est ici égale à :

```
For i = N - 1 To 0 Step -1

    For j = -i To i
c(i, j) = disc * (pu * c(i + 1, j + 1) + pm * c(i + 1, j) +
        pd * c(i + 1, j - 1))
Range("cjt1").Offset(-j, i) = c(i, j)
    Next j

Next i
```

Chaque cash-flow de l'état j d'une sous-période est l'actualisation des cash-flows des états (j – 1), j et (j + 1) de la sous-période suivante, comme on pourra s'en convaincre en examinant la figure 9.1, et non celle des états j, (j + 1) et (j + 2), comme c'était le cas pour la procédure précédente.

Soit les données suivantes : S = 100 ; K = 100 ; T = 1 ; σ = 0,2 ; rf = 0,06 ; div = 0, et N = 10. Selon l'arbre trinomial, le prix du call européen est alors de 10,78 $. L'arbre trinomial correspondant apparaît au tableau 4.1.

TABLEAU 4.1

										199.0514
									168.6185	168.0225
								141.4021	140.8093	140.2131
							117.0678	116.4785	115.8856	115.2891
						95.31646	94.73047	94.14094	93.54785	92.95119
					75.87956	75.29692	74.71077	74.12108	73.52784	72.93101
				58.51972	57.93807	57.35456	56.76827	56.17844	55.58505	54.98808
			43.08022	42.47511	41.87443	41.27878	40.68744	40.09748	39.50397	38.90687
		29.67101	28.9894	28.3071	27.62832	26.95928	26.30844	25.68505	25.09142	24.49421
	18.75985	18.00482	17.22761	16.42613	15.59862	14.74499	13.87027	12.99382	12.17429	11.57697
10.77972	10.06161	9.316504	8.538922	7.721048	6.851068	5.909839	4.8637	3.648068	2.128055	2.84E-14
	4.499095	3.919135	3.329678	2.73135	2.126381	1.520803	0.929803	0.391174	5.22E-15	0
		1.284071	0.969495	0.680611	0.426338	0.218564	0.071905	9.6E-16	0	0
			0.200333	0.111155	0.048935	0.013217	1.77E-16	0	0	0
				0.010605	0.00243	3.24E-17	0	0	0	0
					5.96E-18	0	0	0	0	0
						0	0	0	0	0
							0	0	0	0
								0	0	0
									0	0
										0

Pour ces données, la solution de Black et Scholes au prix du call européen est de 10,99 $. Si N = 30, le prix du call calculé à l'aide de l'arbre trinomial est de 10,92 $ et de 10,97 $ pour N = 100. La vitesse de convergence est donc rapide.

3. LA SIMULATION MONTE CARLO

Dans la section précédente, les probabilités neutres au risque furent définies de telle sorte qu'elles soient conformes au modèle de Black et Scholes. Elles sont arrimées sur l'espérance et la variance du processus lognormal du prix de l'action. La simulation Monte Carlo se veut une procédure équivalente. On y simule le mouvement lognormal du prix de l'action pour en arriver à calculer le prix de l'option. On suppose que le prix de l'action obéit au mouvement brownien géométrique suivant :

$$S_t = S_{t-1} e^{\mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \tag{11}$$

où $\varepsilon \sim N(0,1)$ et où $\mu = r - div$, div étant le taux de paiement du dividende, ici un taux continu. Le logarithme de S_t obéit alors à la distribution suivante :

$$\ln(S_t) \sim N\left(\left(\ln S + (r - div - \frac{1}{2}\sigma^2)\right)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}\right) \tag{12}$$

Par conséquent, si :

$$y = \ln(S) \tag{13}$$

on peut se servir du lemme d'Ito pour montrer que :

$$dy = \left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \tag{14}$$

Sachant que :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{15}$$

Il est facile de démontrer ce résultat, qui fait appel au lemme d'Ito. Soit une fonction F(x), où x est une variable aléatoire. En vertu du lemme d'Ito, on peut écrire :

$$dF = \frac{dF}{dx}dx + \frac{1}{2}b^2\frac{d^2F}{dx^2}dt \tag{16}$$

Soit S = X. L'équation (16) devient :

$$dF = \frac{dF}{dS}dS + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{d^2F}{dx^2}dt \tag{17}$$

Comme F = y = ln(S), cette fonction admet les dérivées première et seconde suivantes :

$$\frac{dF}{dS} = \frac{1}{S} \tag{18}$$

et

$$\frac{d^2F}{dS^2} = -\frac{1}{S^2} \tag{19}$$

D'où :

$$dF = \frac{1}{S}\left(\mu Sdt + \sigma Sdz\right) - \frac{1}{2}\sigma^2dt \tag{20}$$

$$dF = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \tag{21}$$

S'il y a un dividende :

$$\mu = r - div \tag{22}$$

3.1. Simulation Monte Carlo d'un call européen

Dans cette section, nous simulerons la plupart du temps le mouvement de S par son logarithme, lequel suit un mouvement brownien arithmétique et est distribué normalement. Soit :

$$x_t = \ln(S_t) \tag{23}$$

On peut écrire, en vertu du lemme d'Ito :

$$dx_t = \left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dz \tag{24}$$

En recourant à la discrétisation d'Euler, on obtient :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \Delta z \tag{25}$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{26}$$

où $\varepsilon \sim N(0,1)$.

* Ou en termes du prix de l'action :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \tag{27}$$

Pour générer un scénario du prix de l'action, on divise l'intervalle de simulation (0,T) en sous-intervalles :

$$\Delta t = \frac{T}{N} \tag{28}$$

Puis on calcule le prix de l'action à la fin de cet intervalle en générant des nombres aléatoires, comme nous le verrons. On génère un grand nombre de scénarios et on obtient autant de prix d'actions. Le prix du call européen est alors de :

$$C = e^{-rt} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} MAX(0, S_{T,j} - K) \tag{29}$$

où M est le nombre de simulations (scénarios). Sous les hypothèses retenues, cette simulation convergera vers la solution de Black et Scholes. Au tableau 5 est écrit un programme visant à calculer le prix d'un call européen en recourant à la simulation Monte Carlo.

TABLEAU 5 Programme Visual Basic du calcul du prix d'un call européen par la simulation Monte Carlo

```
Sub MonteCarl()

Sheet2.Activate
Range("G2:DT1000").ClearContents

' Cette procédure calcule le prix d'un call européen
' simulation Monte Carlo sans variable antithétiques


K = 100
T = 0.25
S = 100
sigma = 0.1
R = 0.06
div = 0#
N = 1000
M = 200
dt = T / N

' drift du processus stochastique du log du prix de l'action

nudt = (R - div - 0.5 * sigma ^ 2) * dt

' une partie du sigma du processus stochastique

sigsdt = sigma * Sqr(dt)
Dim St As Variant

' sum_ct nous permet de calculer la moyenne des simulations


sum_CT = 0

For j = 1 To M

' prix de départ

lnSt = Log(S)

' Les scénarios de chaque simulation
' Si non path-dependent, mieux vaut mettre N=1

For i = 1 To N
eps = Application.NormSInv(Rnd)

' processus stochastique du log du prix de l'action
```

TABLEAU 5 *(suite)*

```
lnSt = lnSt + nudt + sigsdt * eps

Range("stock").Offset(i, j) = lnSt
Next i

' On arrive à la fin d'un scénario. On calcule le prix final

St = Exp(lnSt)
Range("ST").Offset(j, 0) = St

' On calcule le cash-flow correspondant de l'option

CT = Application.Max(0, St - K)

' On cumule les cash-flows de façon à calculer la moyenne à la fin


sum_CT = sum_CT + CT

' Nouvelle itération

Next j

' On obtient la valeur du call


call_value = (sum_CT / M) * Exp(-R * T)

Range("call1") = call_value


End Sub
```

Considérons le programme apparaissant au tableau 5. On définit d'abord les données du problème. Puis on calcule ensuite le *drift* du log de S :

```
nudt = (R – div – 0.5 * sigma ^ 2) * dt
```

pour passer à la partie déterministe du sigma du processus stochastique du log de S. Elle sera par la suite multipliée par une variable normale.

```
sigsdt = sigma * Sqr(dt)
```

On se donne une variable pour cumuler les résultats des cash-flows de l'option associés aux divers scénarios de prix de l'action. Sa valeur est fixée initialement à 0.

```
sum_CT = 0
```

Puis on amorce les scénarios des prix de l'action. Il y a M

```
For j = 1 To M
    ...
Next j
```

On donne la valeur de départ au log du prix de l'action :

```
lnSt = Log (S)
```

S étant le prix actuel ou observé de l'action, ici 100. Il retournera à ce niveau au début de chaque scénario. Pour chaque scénario, on divise la période de simulation T en N sous-périodes, le prix de l'action évoluant de façon aléatoire de la sous-période 1 à la sous-période N. Le prix final à la période T sera le prix retenu pour ledit scénario. D'où la boucle imbriquée de chaque scénario :

```
For i = 1 To N
    ...
Next i
```

À l'intérieur de la boucle, on génère d'abord une variable aléatoire qui suit une N(0,1) en utilisant la fonction Excel *NormSInv* :

```
eps = Application.NormSInv(Rnd)
```

On peut alors écrire l'équation stochastique du log de S expliquée antérieurement :

```
lnSt = lnSt + nudt + sigsdt * eps
```

qui est bien sûr la version Visual Basic de la discrétisation d'Euler de dlnS, soit :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Et l'on continue d'itérer tant que N n'est pas atteint.

Il est à remarquer que la valeur de lnSt calculée à la fin d'une itération devient la valeur qui apparaît à la droite de l'équation de lnSt lors de l'itération suivante. Une fois la boucle terminée, on calcule le prix final de l'action pour ce scénario :

```
St = Exp(lnSt)
```

Puis le cash-flow correspondant de l'option :

```
CT = Application.Max(0, St - K)
```

On fait appel à la fonction *MAX* d'Excel pour le calculer. Et l'on cumule le cash-flow dans sum_CT de manière à déterminer la valeur moyenne des cash-flows de l'option des divers scénarios à la fin.

```
sum_CT = sum_CT + CT
```

Pour le premier scénario, sum_CT à la droite de l'équation prend une valeur de 0. Puis l'on s'engage dans un autre scénario du prix de l'action :

```
next j
```

Une fois les scénarios des prix de l'action terminés, on peut alors calculer le prix du call :

```
call_value = (sum_CT / M) * Exp(-R * T)
```

résultat que l'on stocke dans la cellule du chiffrier nommée call1 :

```
Range("call1") = call_value
```

Les données du problème se sont traduites par un prix du call de 2,64 $ après 200 simulations contre 2,81 $ pour le modèle de Black et Scholes. Comme on peut le constater, la convergence est plus lente qu'avec la binomiale, où la convergence s'obtient généralement après 30 simulations.

3.2. Simulation Monte Carlo d'un put asiatique

Le prix d'un call européen n'est pas conditionné par le chemin que suit le prix de son sous-jacent lors d'un scénario. En anglais, on dit qu'il n'est pas *path-dependent*. Dans ce cas, il vaut mieux fixer N à 1 même si, dans le programme précédent, nous l'avons établi à 1000 pour le complexifier.

Nous envisageons maintenant la détermination du prix d'un put asiatique, dont la valeur simulée est de :

$$P = e^{-rt} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} MAX(0 , K - \overline{S}_{T,j}) \tag{30}$$

où P désigne le prix du put et $\overline{S}_{T,j}$, la moyenne des prix obtenue lors de chaque scénario. Par conséquent, un put asiatique est fortement *path-dependent* et il faudra envisager un N assez important pour chaque scénario (M). Le programme Visual Basic du calcul du prix du put (tableau 6) ressemble beaucoup au précédent, sauf que c'est ici un put et que l'on fait la moyenne des prix à chaque scénario.

Dans le programme apparaissant au tableau 6, chaque scénario de prix prend la forme suivante :

```
                For j = 1 To pas
    randnsg = Application.NormSInv(Rnd)
S1g = S1g * Exp(rnmutg + randnsg * sigtg)
Range("prix1").Offset(j - 1, i - 1) = S1g
          sigsum = sigsum + S1g
                Next j
        sigmoyenne = sigsum / pas
```

Nous simulons ici directement sur le prix de l'action et non sur son log, c'est-à-dire :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \tag{31}$$

À chaque fois que l'on entre dans un scénario, la valeur de sigsum est nulle (placée devant la commande *For j = 1 To pas*). La variable sigsum sert à cumuler les prix du scénario de façon à calculer la moyenne des prix du scénario par la suite.

```
sigmoyenne = sigsum / pas
```

On calcule ensuite le cash-flow du put pour ce scénario :

```
payoff1g = Application.Max(iopt1 * (sigmoyenne - X1), 0)
```

où iopt1 = –1 comme cela est spécifié au début du programme, car on envisage ici le cas d'un put. Pour un call, iopt1 serait égal à 1. Le reste du programme a la même structure que le précédent. Le chiffrier de la simulation se retrouve au tableau 7.

TABLEAU 6 **Simulation Monte Carlo en Visual Basic pour déterminer le prix d'un put asiatique**

Sub simopt()

```
' Simulation Monte Carlo pour prix d'une option asiatique
Range("d4:iv6000").ClearContents
Range("option1").ClearContents
Dim iopt1, S1, X1, rf1, q1, T1, sigma1, nsimg1, pas

Dim rnmutg, sigtg, sumg, randnsg, S1g, payoff1g, sigsum, sigmoyenne
Dim i As Integer
Dim j As Integer

iopt1 = -1
 S1 = 80
 X1 = 85
 rf1 = 0.05
 q1 = 0
 T1 = 1
 sigma1 = 0.2
 pas = 100
 nsimg1 = 100

rnmutg = (rf1 - q1 - 0.5 * sigma1 ^ 2) * (T1 / pas)
sigtg = sigma1 * Sqr(T1 / pas)
sumg = 0

For i = 1 To nsimg1

S1g = S1

sigsum = 0
For j = 1 To pas

randnsg = Application.NormSInv(Rnd)
S1g = S1g * Exp(rnmutg + randnsg * sigtg)
Range("prix1").Offset(j - 1, i - 1) = S1g
sigsum = sigsum + S1g

Next j
sigmoyenne = sigsum / pas
Range("prix").Offset(i - 1, 0) = sigmoyenne

payoff1g = Application.Max(iopt1 * (sigmoyenne - X1), 0)
Range("cash").Offset(i - 1, 0) = payoff1g

sumg = sumg + payoff1g
Next i

option1 = Exp(-rf1 * T1) * sumg / nsimg1
Range("option1").Value = option1

End Sub
```

TABLEAU 7 **Simulation Monte Carlo pour calculer le prix d'un put asiatique**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Option asiatique**										
2											
3				**cash-flow**	**Moyenne prix**	**Évolution du prix pour chaque scénario**					
4	**Prix du put**	6.243406		0	87.21226147	80.89363	79.47352	80.0048	81.29427	78.66301	81.34553
5				20.99992	64.00008349	81.05377	79.4571	79.67758	78.69104	77.98075	83.12796
6				8.486971	76.51302949	81.40413	77.88773	80.52001	78.7858	77.66288	80.98382
7				0	87.22062125	80.53023	77.81133	79.07754	79.91538	76.10979	81.17866
8				12.36645	72.63354829	79.72288	76.82662	78.79427	81.30022	76.59851	80.85664
9				8.901971	76.09802853	80.95938	77.35632	78.98904	80.59083	74.67753	78.56726
10				4.62543	80.3745695	77.50262	77.5432	80.44015	83.77503	73.47937	78.39901
11				9.573768	75.42623162	78.63244	76.0157	80.62978	85.24882	74.24458	79.24431
12				9.301943	75.6980566	80.07596	78.42113	80.35987	86.05097	74.28346	79.26513
13				0	90.27073097	80.98688	79.07077	80.42054	88.36418	72.9748	78.91644
14				0	89.29455777	78.31612	79.11864	79.25307	90.45474	76.55921	81.50517
15				5.852535	79.14746523	78.00007	78.70342	79.75928	90.1018	76.47233	85.13046
16				7.992628	77.00737205	79.74651	76.79769	79.74254	88.06242	72.54599	85.55077
17				4.0952	80.90480026	81.07015	78.03752	80.51979	91.1109	72.29693	85.71394
18				0	94.43255726	80.57309	77.90288	82.51466	92.66748	71.51727	86.24281

Au tableau 7, les colonnes F et suivantes donnent l'évolution du prix de l'action pour chaque scénario. Pour sa part, la colonne E renferme la moyenne des prix de l'action pour chaque scénario. Dans la colonne D, on retrouve le cash-flow correspondant du put asiatique pour chaque scénario. Et à la cellule B4 apparaît le prix du put asiatique correspondant aux données du problème, soit 6,24 $.

Il est à noter que le mouvement brownien géométrique de l'action peut imprimer au prix de l'action différents profils, comme l'indique la figure 13.

Le mouvement brownien géométrique est donc d'une grande généralité puisqu'il reproduit tous les profils de prix observés dans la réalité.

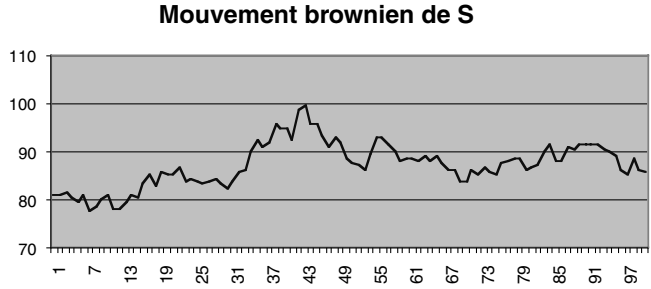
3.3. Introduction de variables antithétiques pour accélérer la convergence de la simulation

Contrairement aux arbres, la simulation Monte Carlo requiert un très grand nombre d'itérations avant que la convergence ne puisse s'obtenir. Une simulation Monte Carlo impose en effet moins de contraintes que la binomiale ou la trinomiale quant à la reproduction du mouvement brownien géométrique du prix de l'action. Considérons par exemple le cas d'une option d'achat européenne. Les mouvements de hausse et de baisse du sous-jacent, de même que les probabilités neutres au risque, doivent être définis de façon à ce que l'arbre binomial converge vers la solution analytique découverte par Black et Scholes. Une telle contrainte n'existe pas lors d'une simulation Monte Carlo. De plus, dans le cas de la binomiale, il y a actualisation des cash-flows de l'option à chaque nœud de l'arbre, ce qui rapproche davantage cette méthode du calcul en temps continu. Pour ce qui concerne la simulation Monte Carlo, la discrétisation d'Euler n'est qu'une première approximation au calcul continu.

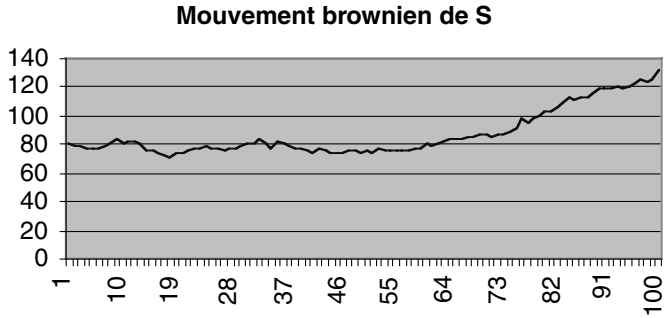
Pour pallier ce problème de convergence, on définit des variables aléatoires dites antithétiques (opposées) dont la corrélation est de –1. C'est-à-dire que pour chaque scénario du logarithme du prix de l'action, on aura les deux équations suivantes :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (32)$$

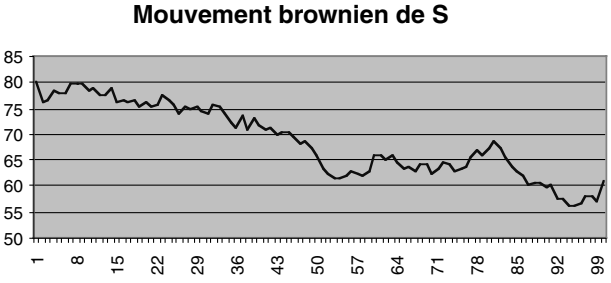
FIGURE 13 **Des fluctuations sans tendance manifeste**



Un décollage du prix non prévisible



Un affaissement imprévisible du prix de l'action



$$x_{t+\Delta t} = x_t + \left(r - div - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\Delta t - \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (33)$$

La même variable aléatoire ε est d'abord introduite avec un signe positif pour calculer le log de S puis avec un signe négatif. Il en résulte une corrélation de –1 entre les deux mouvements browniens, ce qui accélère la convergence. Le tableau 8 fait état d'une simulation Monte Carlo pour un call européen avec variables antithétiques.

Comme cela apparaît au tableau 8, on génère d'abord une variable normale que l'on applique en positif et en négatif au processus stochastique du logarithme du prix de l'action.

```
                For i = 1 To N
  eps = Application.NormSInv(Rnd)
lnSt1 = lnSt1 + nudt + sigsdt * eps
lnSt2 = lnSt2 + nudt - sigsdt * eps

' Range("stock").Offset(i, j) = lnSt

                Next i
```

Ici, N = 1 puisque le call européen n'est pas *path-dependent*. Puis l'on trouve les deux prix de l'action correspondants :

```
St1 = Exp(lnSt1)

St2 = Exp(lnSt2)
```

Le cash-flow du call est alors la moyenne pondérée des deux cash-flows associés aux deux prix trouvés :

```
CT = 0.5 * Application.Max(0, St1 - K) + 0.5 *
          Application.Max(0, St2 - K)
```

Le reste du programme est connu. Les données du problème se traduisent par un prix du call de 2,78 $ contre 2,81 $ pour la solution Black et Scholes, cela après 1000 itérations. Ce résultat s'avère plus satisfaisant que celui sans variables antithétiques (cas 3.1, où le prix trouvé est de 2,64 $ pour le même nombre d'itérations). Considérons les données suivantes.

$$S = 30\,;\ K = 25\,;\ r_f = 0.2\,;\ T = 0.5\,;\ \sigma = 0.3$$

TABLEAU 8 **Programme Visual Basic pour calculer le prix d'un call européen avec variables antithétiques (changements par rapport au tableau 5 en gras)**

```
Sub MonteCarlant()

Sheet3.Activate

K = 100
T = 0.25
S = 100
sigma = 0.1
R = 0.06
div = 0
N = 1
M = 1000
dt = T / N
nudt = (R - div - 0.5 * sigma ^ 2) * dt
sigsdt = sigma * Sqr(dt)
Dim stock As Variant
Dim St As Variant

sum_CT = 0
lnSt = Log(S)

For j = 1 To M

lnSt1 = Log(S)
lnSt2 = Log(S)

For i = 1 To N
eps = Application.NormSInv(Rnd)
lnSt1 = lnSt1 + nudt + sigsdt * eps
lnSt2 = lnSt2 + nudt - sigsdt * eps

Next i
St1 = Exp(lnSt1)

Range("ST1").Offset(j, 0) = St1

St2 = Exp(lnSt2)

Range("ST2").Offset(j, 0) = St2

CT = 0.5 * Application.Max(0, St1 - K) + 0.5 * Application.Max(0,
St2 - K)

sum_CT = sum_CT + CT

Next j

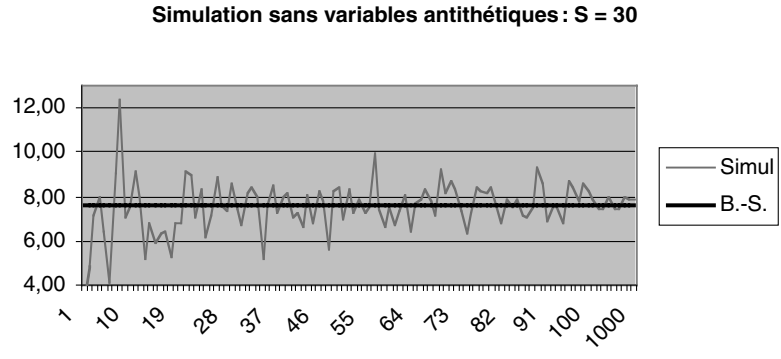
call_value = (sum_CT / M) * Exp(-R * T)

Range("call2") = call_value

End Sub
```

La simulation Monte Carlo du prix du call européen sans variables antithétiques se retrouve à la figure 14.

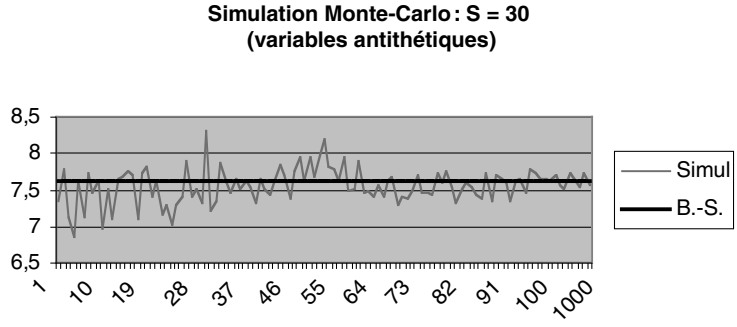
FIGURE 14



Tandis que celle avec variables antithétiques se lit à la figure 15.

Comme on peut le constater à la figure 15, la simulation avec variables antithétiques converge plus rapidement vers la cible Black et Scholes, soit 7,61 $. Elle fluctue beaucoup moins que celle sans variables antithétiques. L'intervalle de fluctuation avec variables antithétiques se situe en effet entre 7 $ et 8,5 $. Celui sans variables antithétiques est entre 4 $ et 12 $.

FIGURE 15



3.4. Factorisation de Cholesky et pricing d'options dont le sous-jacent est un écart (*spread*) d'indices boursiers dont les processus stochastiques sont corrélés[8]

La notion de factorisation de Cholesky

La factorisation de Cholesky consiste, dans le cas qui nous concerne, à trianguláriser la matrice des corrélations des variables aléatoires de processus stochastiques[9]. On se sert par la suite de cette matrice pour calculer des variables aléatoires corrélées. Soit l'équation différentielle suivante pour le log de S_i :

$$x_{i,t+\Delta t} = x_{i,t} + \left(r - div_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \right)\Delta t + \sigma_i \varphi_i \sqrt{\Delta t} \qquad (34)$$

et pour celle du log de S_j :

$$x_{j,t+\Delta t} = x_{j,t} + \left(r - div_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 \right)\Delta t + \sigma_j \varphi_j \sqrt{\Delta t} \qquad (35)$$

Les variables aléatoires φi et φj sont corrélées, c'est-à-dire :

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(\varphi_i, \varphi_j)}{\sigma_{\varphi_i}\sigma_{\varphi_j}} = Cov(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$\rho_{ij} = E\left[\left(\varphi_i - E(\varphi_i)\right)\left(\varphi_j - E(\varphi_j)\right) \right] = E(\varphi_i \varphi_j) \neq 0 \qquad (36)$$

8. Wilmott, P. (1998), *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*, New York, Wiley.

9. Plus précisément, quand la matrice A est de dimension (n × n), symétrique et définie positive, alors : A = LL′ où L est une matrice triangulaire (vers le bas) unique dont les éléments de la diagonale principale sont positifs, c'est-à-dire : $\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & ... & 0 \\ l_{12} & l_{22} & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ l_{1n} & l_{2n} & ... & l_{nn} \end{bmatrix}$. C'est la factorisation ou décomposition de Cholesky de la matrice A. Pour plus de détails, on consultera : Hendry, D.F. (1995), *Dynamic Econometrics*, *Advanced Texts in Econometrics*, Oxford, Oxford University Press.

puisque les deux variables sont distribuées normalement : N(0,1). Soit un grand nombre de prix d'actions dont les processus stochastiques sont corrélés. On a :

$$E\left(\varphi\varphi^{T}\right) = \Gamma \tag{37}$$

où Γ est la matrice des coefficients de corrélation. Comment générer des variables aléatoires corrélées ? Pour ce faire, il suffit : *i)* de générer des variables aléatoires N(0,1) non corrélées représentées par le vecteur ε ; puis *ii)* d'effectuer la transformation suivante :

$$\varphi = M\varepsilon \tag{38}$$

De telle sorte que :

$$MM^{T} = \Gamma \tag{39}$$

soit la triangularisation de Cholesky de la matrice Γ.

On a alors :

$$\varphi\varphi^{t} = M\varepsilon\varepsilon^{T}M^{T} \tag{40}$$

Prenons l'espérance de cette dernière expression :

$$E\left(\varphi\varphi^{T}\right) = ME\left(\varepsilon\varepsilon^{T}\right)M^{T} = MIM^{T} = MM^{T} = \Gamma \tag{41}$$

qui est bien la matrice de corrélation recherchée.

Illustrons la factorisation de Cholesky par la matrice de corrélation qui se trouve au tableau 9.

TABLEAU 9 **Matrice de corrélation de variables aléatoires**

	L	M	N	O
10	1	0.5	0.2	0.01
11	0.5	1	0.01	0.3
12	0.2	0.01	1	0.3
13	0.01	0.3	0.3	1

Nous voulons générer 4 variables aléatoires : z_{1c}, z_{2c}, z_{3c} et z_{4c} qui sont corrélées de la sorte. Pour y parvenir, nous effectuons la factorisation de Cholesky de cette matrice en faisant appel à la fonction ***Cholesky*** de *Poptools*, algorithme intégré à Excel 2000. Pour ce faire, on ombrage les cellules L16 à O19. Puis on écrit la formule :

```
= Cholesky(L10:O13)
```

suivie de *Ctrl+Maj+Entrée*.

On obtient la matrice qui apparaît à la figure 16.

FIGURE 16 **Factorisation de Cholesky**

	L	M	N	O
16	1	0	0	0
17	0.5	0.866025	0	0
18	0.2	-0.103923	0.974269	0
19	0.01	0.340637	0.342205	0.87565

C'est la matrice de Cholesky, soit la triangularisation de la matrice des corrélations.

Pour définir des variables aléatoires corrélées, on génère d'abord 4 variables aléatoires non corrélées : epsc1 à epsc4. On effectue par la suite l'opération suivante :

	A	B	C	D	E	F
14	Factorisation de Cholesky					
15						
16					multiplié par	
17	1	0	0	0	epsc1	
18	0.5	0.8660254	0	0	epsc2	
19	0.2	-0.103923	0.974269	0	epsc3	
20	0.01	0.3406367	0.3422053	0.87564959	epsc4	
21						

Les variables corrélées ont alors la structure suivante :

	A	B	C	D	E
32	z1c=epsc1				
33	z2c=.5epsc1+.8660epsc2				
34	z3c=.2epsc1-.1039epsc2+.9742epsc3				
35	z4c=.01epsc1+.3406epsc2+.3422epsc3+.8756epsc4				

Le programme Visual Basic qui se trouve au tableau 10 calcule quatre variables aléatoires dont la corrélation recherchée est la matrice antérieure.

TABLEAU 10 **Génération de 4 variables aléatoires corrélées par la factorisation de Cholesky**

```
Sub Choles1()

For j = 1 To 1000
epsc1 = Application.NormSInv(Rnd)
epsc2 = Application.NormSInv(Rnd)
epsc3 = Application.NormSInv(Rnd)
epsc4 = Application.NormSInv(Rnd)

z1c = epsc1
Range("z1c").Offset(j, 0) = z1c

z2c = 0.5 * epsc1 + 0.866 * epsc2
Range("z2c").Offset(j, 0) = z2c

z3c = 0.2 * epsc1 - 0.1039 * epsc2 + 0.9742 * epsc3
Range("z3c").Offset(j, 0) = z3c

z4c = 0.01 * epsc1 + 0.3406 * epsc2 + 0.3422 * epsc3 + 0.8756 *
epsc4
Range("z4c").Offset(j, 0) = z4c

Next j


End Sub
```

TABLEAU 11

	G	H	I	J
6	z1c	z2c	z3c	z4c
7	0.540424	0.342852	0.294854	-0.383023
8	-0.518805	0.394036	-2.322275	0.120547
9	0.894565	0.924082	-1.526334	-0.572589
10	1.092162	1.245886	-0.17971	1.728948
11	1.133253	-0.807865	1.9898	-0.272335
12	0.062375	0.66282	-1.633506	-0.097727
13	-0.078537	-0.497975	0.343833	0.258008
14	-0.631695	-0.822282	0.863206	0.937724
15	0.225393	2.017813	1.128479	0.556381
16	0.510404	2.033803	-0.787125	0.541678
17	-1.246069	2.187958	-0.141227	-0.634666
18	0.189588	-1.014773	-1.060852	-0.133777
19	-0.569582	-1.747107	-0.461226	-1.02731
20	-0.521611	1.151772	1.723543	1.033228
21	-0.587959	-1.15361	-0.972024	-0.350999
22	-0.227357	-0.304574	0.524327	-0.279632
23	0.340285	-0.535571	-0.716925	-0.395323
24	-1.400281	-0.791543	1.011896	-0.159614
25	0.789919	0.127916	-0.350038	0.939791

Comme on peut le constater au tableau 10, on génère d'abord quatre variables N(0,1) que l'on transforme par la suite par la matrice de Cholesky de façon à trouver la corrélation recherchée. La présentation d'une partie de ces vecteurs de variables dans le chiffrier associé à la macro *Choles1* est donnée au tableau 11.

La matrice de corrélation des variables simulées est la suivante :

	A	B	C	D
24	Corrélation des variables simulées			
25				
26	1.0	0.5	0.2	0.02
27	0.5	1.0	0.00	0.3
28	0.2	0.00	1.0	0.3
29	0.02	0.3	0.3	1.0

matrice évidemment très rapprochée de la matrice recherchée. Plus le nombre de variables simulées est important, plus la matrice de corrélation simulée se rapproche de la matrice recherchée puisque la démonstration de Cholesky est formulée en termes d'espérance mathématique, soit pour un très grand nombre d'observations.

Factorisation de Cholesky et pricing d'un spread européen avec volatilités stochastiques

Soit un spread européen écrit sur deux indices boursiers : S_1 et S_2. La valeur intrinsèque du spread est la suivante :

$$S_{T1} - S_{T2} - K \tag{42}$$

Les équations différentielles stochastiques des deux indices s'écrivent :

$$dS_1 = (r - div_1)S_1dt + \sigma_1 S_1 dz_1 \tag{43}$$

$$dS_2 = (r - div_2)S_2dt + \sigma_2 S_2 dz_2 \tag{44}$$

Les variances des rendements des deux indices obéissent pour leur part à un processus stochastique de retour vers la moyenne, c'est-à-dire :

$$dV_1 = \alpha_1\left(\overline{V}_1 - V_1\right)dt + \xi_1\sqrt{V_1}dz_3 \tag{45}$$

$$dV_2 = \alpha_2\left(\overline{V}_2 - V_2\right)dt + \xi_2\sqrt{V_2}dz_4 \tag{46}$$

où $\sigma_i = \sqrt{V_i}$.

Les variables aléatoires dz_i sont corrélées entre elles. Le tableau 12 présente une simulation Monte Carlo, toujours écrite en langage Visual Basic, visant à calculer le prix de ce spread.

Ce modèle requiert d'abord un certain calibrage. Les valeurs estimées ou observées en dehors du modèle sont les suivantes (entre parenthèses, on retrouve les symboles équivalents dans le programme) :

$K = 1$; $T = 1$; $r = 0{,}06$; $S_1 = 100$; $S_2 = 110$; $\sigma_1 = 0{,}2$; $\sigma_2 = 0{,}3$;
div1 = 0,03; div2 = 0,04 ; α_1(alpha1) = 1,0 ; α_2 (alpha2) = 2,0 ;
$\overline{V}_1$ (Vbar1) = 0,04 ; $\overline{V}_2$ (Vbar2) = 0,09 ;
ξ_1 (xi1) = 0,05 ; ξ_2 (xi2) = 0,06.

TABLEAU 12 Simulation Monte Carlo pour déterminer le prix d'un spread européen

```
Sub MonteCarloSpread3()
Sheet6.Activate
Dim T As Variant
Dim K As Variant

K = 1
T = 1
S1 = 100
S2 = 110
sig1 = 0.2
sig2 = 0.3
div1 = 0.03
div2 = 0.04
alpha1 = 1
alpha2 = 2

Vbar1 = 0.04
Vbar2 = 0.09
xi1 = 0.05
xi2 = 0.06
rf = 0.06
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Vt1 As Variant
Dim Vt2 As Variant

N = 1
M = 100

dt = T / N
sdt = Sqr(dt)
alpha1dt = alpha1 * dt
alpha2dt = alpha2 * dt
xi1sdt = xi1 * Sqr(dt)
xi2sdt = xi2 * Sqr(dt)


sum_CT = 0


lnS1 = Log(S1)
lnS2 = Log(S2)


For j = 1 To M

lnSt1 = lnS1
lnSt2 = lnS2
```

TABLEAU 12 *(suite)*

```
Vt1 = 0.04
Vt2 = 0.09


For i = 1 To N

epsc1 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
epsc2 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
epsc3 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
epsc4 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)

z1c = epsc1
Range("z1c1").Offset(j, 0) = z1c
z2c = 0.5 * epsc1 + 0.866 * epsc2
Range("z2c1").Offset(j, 0) = z2c
z3c = 0.2 * epsc1 - 0.1039 * epsc2 + 0.9742 * epsc3
Range("z3c1").Offset(j, o) = z3c
z4c = 0.01 * epsc1 + 0.3406 * epsc2 + 0.3422 * epsc3 + 0.8756 * epsc4
Range("z4c1").Offset(j, 0) = z4c


Vt1 = Vt1 + (alpha1dt * (Vbar1 - Vt1)) + (xi1sdt * Sqr(Vt1) * z3c)
Range("Vt1").Offset(j, 0) = Vt1
Vt2 = Vt2 + (alpha2dt * (Vbar2 - Vt2)) + (xi2sdt * Sqr(Vt2) * z4c)
Range("Vt2").Offset(j, 0) = Vt2

lnSt1 = lnSt1 + ((rf - div1 - 0.5 * Vt1) * dt) + (Sqr(Vt1) * sdt * z1c)
lnSt2 = lnSt2 + ((rf - div2 - 0.5 * Vt2) * dt) + (Sqr(Vt2) * sdt * z2c)

Next i

St1 = Exp(lnSt1)
Range("St1ss").Offset(j, 0) = St1
St2 = Exp(lnSt2)
Range("St2ss").Offset(j, 0) = St2

CT = Application.WorksheetFunction.Max(0, St1 - St2 - K)
Range("CT2s").Offset(j, 0) = CT

sum_CT = sum_CT + CT

Next j


call_value = (sum_CT / M) * (Exp(-rf * T))
Range("Call2s").Offset(0, 0) = call_value


End Sub
```

Ce modèle comporte également comme input la matrice de corrélation des quatre processus stochastiques, qui est la même que dans le cas précédent. Comme dans les autres programmes, on définit une variable qui cumulera les cash-flows de l'option à chaque scénario de manière à calculer le prix de l'option à la fin du programme par simple actualisation de la moyenne des cash-flows. Sa valeur est fixée initialement à 0 :

```
sum_CT = 0
```

Le programme s'engage ensuite dans une grande boucle :

```
For j = 1 To M
    ...
Next j
```

Chaque itération constitue un scénario de prix d'indices. Il en résulte des valeurs finales pour S_{1T} et S_{2T} qui servent directement à calculer les cash-flows finaux du spread. Pour chaque scénario de prix, on fixe les valeurs initiales des prix et des variances stochastiques à leur niveau observé (input) :

```
lnSt1 = lnS1
lnSt2 = lnS2
 Vt1 = 0.04
 Vt2 = 0.09
```

Puis le programme s'engage dans une boucle intermédiaire pour déterminer les prix des deux indices du scénario :

```
For i = 1 To N
    ...
Next i
```

Comme l'option n'est pas *path-dependent*, on fixe N à 1, c'est-à-dire que chaque scénario ne comportera qu'un seul prix pour chaque indice. On génère quatre variables N(0,1), une pour chaque équation du modèle :

```
epsc1 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
epsc2 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
epsc3 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
epsc4 = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
```

Puis on applique la transformation de Cholesky pour les corréler :

```
                    z1c = epsc1
            Range("z1c1").Offset(j, 0) = z1c
           z2c = 0.5 * epsc1 + 0.866 * epsc2
            Range("z2c1").Offset(j, 0) = z2c
z3c = 0.2 * epsc1 – 0.1039 * epsc2 + 0.9742 * epsc3
            Range("z3c1").Offset(j, o) = z3c
z4c = 0.01 * epsc1 + 0.3406 * epsc2 + 0.3422 * epsc3
                  + 0.8756 * epsc4
            Range("z4c1").Offset(j, 0) = z4c
```

On écrit les processus stochastiques de la variance des prix des deux indices :

```
Vt1 = Vt1 + (alpha1dt * (Vbar1 – Vt1))
      + (xi1sdt * Sqr(Vt1) * z3c)
    Range("Vt1").Offset(j, 0) = Vt1
Vt2 = Vt2 + (alpha2dt * (Vbar2 – Vt2))
      + (xi2sdt * Sqr(Vt2) * z4c)
    Range("Vt2").Offset(j, 0) = Vt2
```

que l'on introduit par la suite dans les processus stochastiques des prix des deux indices. Rappelons que :

$$\sigma_i = \sqrt{V_i}$$

Il s'ensuit :

```
lnSt1 = lnSt1 + ((rf – div1 – 0.5 * Vt1) * dt) + (Sqr(Vt1) *
                        sdt * z1c)
lnSt2 = lnSt2 + ((rf – div2 – 0.5 * Vt2) * dt) + (Sqr(Vt2) *
                        sdt * z2c)
```

Comme ici N = 1, ces deux logarithmes sont les logarithmes finaux des scénarios. On calcule alors les prix finaux des deux indices du scénario correspondant à ces logarithmes :

```
            St1 = Exp(lnSt1)
    Range("St1ss").Offset(j, 0) = St1
            St2 = Exp(lnSt2)
    Range("St2ss").Offset(j, 0) = St2
```

et l'on calcule le cash-flow du spread associé à ces deux indices :

```
CT = Application.WorksheetFunction.Max(0, St1 – St2 – K)
            Range("CT2s").Offset(j, 0) = CT
```

que l'on cumule dans sum_CT :

```
sum_CT = sum_CT + CT
```

Puis l'on se dirige vers un autre scénario de prix :

```
next j
```

Une fois les M scénarios terminés, on est en mesure de calculer le prix du spread par simple actualisation de la moyenne des cash-flows cumulés :

```
call_value = (sum_CT / M) * (Exp(-rf * T))
Range("Call2s").Offset(0, 0) = call_value
```

Le programme est alors terminé. Le tableau 13 donne l'apparence du chiffrier associé à ce programme :

Dans la colonne D apparaît le cash-flow du spread pour chaque scénario de prix des deux indices. Comme on peut le constater à la cellule B6, sous les inputs de ce modèle, le prix du spread est de 7,01 $.

TABLEAU 13 **Chiffrier de la simulation Monte Carlo du spread**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
5					**ST1**	**St2**	**z1**	**z2**	**z3**	**z4**	**lnST1**	**lnST2**	**VT1**	**VT2**
6	**Prix du spread**	7.01233		0	86.34107	92.53812	-0.848745	-0.434173	-0.479052	0.817738	4.458305	4.527621	0.035209	0.104719
7				26.92092	113.9119	85.99094	0.614627	-0.883871	-0.251584	-1.177746	4.735425	4.454242	0.037484	0.068801
8				0	80.50969	118.3298	-0.843947	0.326906	2.45956	2.061168	4.388378	4.773476	0.064596	0.127101
9				14.91401	122.7789	106.8649	0.935629	0.040218	0.455476	2.023921	4.810385	4.671566	0.044555	0.126431
10				0	116.764	115.9281	0.706393	0.255181	0.300305	-1.042007	4.760155	4.75297	0.043003	0.071244
11				0	102.7616	165.3425	0.098146	1.434241	0.894121	0.066882	4.632412	5.108019	0.048941	0.091204
12				17.14382	117.2361	99.09223	0.788623	-0.254928	-0.562982	0.177974	4.764189	4.596051	0.03437	0.093204
13				0	82.13166	99.83322	-0.995819	-0.222157	0.260405	0.342816	4.408324	4.603501	0.042604	0.096171
14				0	104.5729	129.7387	0.174276	0.632334	0.202063	0.034427	4.649885	4.865523	0.042021	0.09062
15				28.70589	107.123	77.41714	0.292957	-1.162105	0.094832	-0.499315	4.673978	4.349208	0.040948	0.081012
16				0	91.75611	143.8796	-0.527019	0.97225	-0.503149	0.090901	4.519134	4.968977	0.034969	0.091636
17				1.732027	155.7068	152.9748	1.953158	1.107334	1.027587	0.994637	5.047975	5.030273	0.050276	0.107903
18				0	103.4669	113.4581	0.128786	0.194768	0.864855	0.737583	4.639251	4.731434	0.048649	0.103276
19				11.65837	149.482	136.8236	1.618973	0.766847	2.195811	1.016758	5.007176	4.918693	0.061958	0.108302
20				0	115.2962	139.9355	0.816524	0.974871	-1.699904	-1.202459	4.747504	4.941182	0.023001	0.068356
21				0	94.50373	125.6633	-0.296716	0.509199	0.590979	0.95702	4.548639	4.833606	0.04591	0.107226
22				10.21278	131.1167	119.904	1.184997	0.374398	1.04406	-0.444616	4.876088	4.786691	0.050441	0.081997
23				0	117.8682	118.026	0.75051	0.32147	0.320494	-0.904237	4.769567	4.770905	0.043205	0.073724
24				0	104.3904	134.1632	0.168853	0.768936	0.822918	-0.484739	4.648138	4.899057	0.048229	0.081275
25				15.99796	113.1295	96.13159	0.671898	-0.44513	-1.52289	-1.028325	4.728534	4.565718	0.024771	0.07149
26				0	156.9768	271.1683	2.232828	2.902151	-0.110083	0.754801	5.056098	5.60274	0.038899	0.103586
27				0	105.2919	116.9761	0.207685	0.290139	0.338983	0.861294	4.656737	4.76197	0.04339	0.105503
28				0	82.7838	88.01013	-0.945099	-0.700166	0.352594	-0.394954	4.416232	4.477452	0.043526	0.082891
29				0	109.723	173.5051	0.482808	1.604845	-1.600675	-0.018543	4.697959	5.156207	0.023993	0.089666
30				8.446869	103.1051	93.65824	0.107252	-0.471973	0.366648	-0.246972	4.635749	4.539652	0.043666	0.085555
31				0	77.6692	93.8202	-1.217209	-0.399733	0.559604	0.688183	4.352459	4.54138	0.045596	0.102387

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge, The MIT Press.

BLACK, F. et M. SCHOLES (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, mai-juin, p. 637-659.

BRYIS, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives : Theory, Application and Practice*, New York, Wiley Frontiers in Finance.

CLEWLOW, L. et C. STRICKLAND (1998), *Implementing Derivative Models*, Chichester, Wiley.

COX, J.C., S.A. ROSS et M. RUBINSTEIN (1979), « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, p. 229-263.

HENDRY, D.F. (1995), *Dynamic Econometrics, Advanced Texts in Econometrics*, Oxford, Oxford University Press.

HULL, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

JACKSON M. et M. STAUTON (2001), *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*, New York, Wiley.

NEFTCI, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Londres, Academic Press.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001a), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, CRG, 13-2001, mai.

RACICOT F.-É. et R. THÉORET (2001b), *Le calcul numérique en ingénierie financière. Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation et étude d'un cas : l'algorithme de Newton comme solution à l'arbre binomial de Black, Derman et Toy*, CRG, 28-2001.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001c), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril.

RACICOT F.-É. et R. THÉORET (2001d), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

ROSTAN, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire.

RUBINSTEIN, M. (1994), « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, p. 771-818.

WILMOTT, P. (2000), *On Quantitative Finance*, volumes 1 et 2, New York, Wiley.

CHAPITRE

8

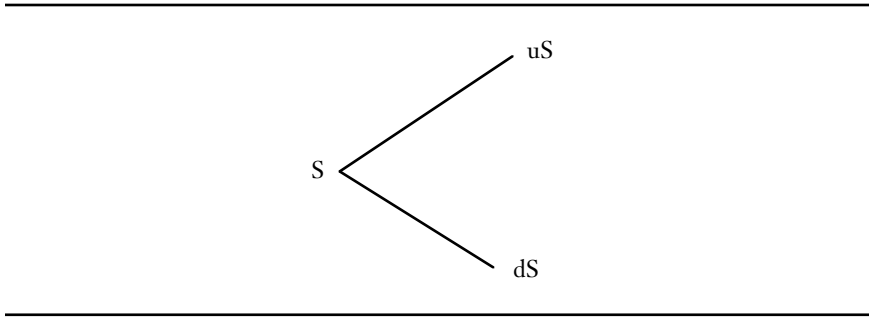
ARBRES BINOMIAUX ADDITIFS ET MULTIPLICATIFS POUR ÉVALUER LES OPTIONS AMÉRICAINES CLASSIQUES SUR ACTIONS PORTANT DIVIDENDE[1]

Peu de chercheurs se sont jusqu'ici intéressés à fournir des programmes qui permettent de déterminer les prix d'options américaines classiques écrites sur des actions munies de dividendes. Dans ce chapitre,

1. Nous avons recouru à des exemples numériques apparaissant dans le manuel de Clewlow et Strickland (1998) pour établir les programmes qui apparaissent dans ce chapitre. Ces auteurs n'ont pas fourni de programmes écrits en pseudo-code pour les cas d'options américaines classiques. Nous présentons donc ces programmes dans ce chapitre. Voir : Clewlow L. et C. Strickland (1998), *Implementing Derivatives Models*, Chichester, Wiley. Nous avons également tiré profit des lectures suivantes pour établir ces programmes : Jackson, M. et M. Stauton (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley ; Benninga, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge (Mass.), The MIT Press. Nos autres références sont : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001a), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, CRG, 13-2001, mai ; Racicot F.-É. et R. Théoret (2001b), *Le calcul numérique en ingénierie financière. Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation et étude d'un cas : l'algorithme de Newton comme solution à l'arbre binomial de Black, Derman et Toy*, CRG, 28-2001 ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001c), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril ; Racicot F.-É. et R. Théoret (2001d), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille: titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec ; Rostan, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire ; Hull, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall ; Hull, J.C. (1998), *Introduction to Futures and Options Markets*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall ; Wilmott, P. (2000), *On Quantitative Finance*, volumes 1 et 2, New York, Wiley.

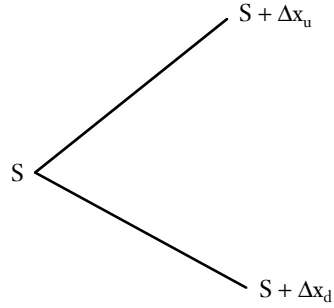
nous fournissons au lecteur plusieurs programmes que nous avons écrits dans le langage Visual Basic d'Excel. À l'intérieur de ces programmes, nous recourons à la méthode de l'arbre binomial additif[2] pour déterminer les prix d'options d'achat et de vente américaines. Nous envisageons trois cas. Dans le premier, il existe une seule date ex-dividende à l'intérieur de la période durant laquelle l'option a cours. Le dividende qui est versé sur l'action sous-jacente à l'option est ponctuel et proportionnel au prix de l'action. Dans les deux autres cas, le dividende est un cash-flow nominal (montant forfaitaire) connu à l'avance. Dans l'un de ces cas, il existe une seule date ex-dividende et dans l'autre, deux dates ex-dividende.

Un arbre binomial peut être additif ou multiplicatif. Dans le cas de l'arbre multiplicatif, le prix de l'action suit un mouvement multiplicatif dans l'arbre :



Nous analysons plus particulièrement le cas de l'arbre multiplicatif à l'intérieur de l'annexe 1. Dans ce chapitre, nous faisons usage de l'arbre additif dans lequel l'évolution du prix suit un mouvement additif, comme son nom l'indique et comme l'illustre le schéma suivant :

2. L'annexe 8.1 présente les programmes correspondants pour l'arbre binomial multiplicatif.



Les variations à la hausse et à la baisse du prix de l'action de même que les probabilités neutres au risque de ces mouvements doivent être définies de façon à ce que le logarithme du prix de l'action sous-jacente suive un mouvement géométrique brownien. On a donc :

$$\Delta x_u = \sqrt{\sigma^2 \Delta t + \nu^2 \Delta t^2} \tag{1}$$

où :

$$\nu = r - 0{,}5\sigma^2 \tag{2}$$

r étant le taux sans risque et σ^2, la variance du prix de l'action. Par ailleurs,

$$\Delta x_d = -\Delta x_u \tag{3}$$

et

$$p_u = 0{,}5 + 0{,}5 \frac{\nu \Delta t}{\Delta x} \tag{4}$$

p_u étant la probabilité d'un mouvement de hausse du prix de l'action et p_d, la probabilité d'un mouvement de baisse. Certes, la probabilité de baisse du prix de l'action est égale à :

$$p_d = 1 - p_u \tag{5}$$

On dispose maintenant de tous les éléments pour construire un arbre binomial additif de prix d'options américaines classiques (calls et puts) portant dividende. Mais auparavant, nous devons spécifier dans quelles conditions une option américaine sera exercée[3].

Un call américain dont l'action sous-jacente ne porte aucun dividende ne sera jamais exercé. Il vaut en effet toujours plus que sa valeur intrinsèque, alors que l'exercice le ramène à sa valeur intrinsèque. La valeur d'un call américain écrit sur une action sans dividende est donc égale à celle d'un call européen qui repose sur les mêmes paramètres. Mais la situation est différente pour un call dont le sous-jacent porte un dividende. Supposons qu'il existe deux dates ex-dividende durant la durée d'un call. t_1 et t_2 sont les instants qui précèdent immédiatement ces dates ex-dividende. Considérons d'abord t_2, soit la date ex-dividende la plus éloignée. Si l'investisseur exerce à cette date, il reçoit :

$$S(t_2) - K \tag{6}$$

où K est le prix d'exercice ou de levée de l'option.

Si, par ailleurs, l'option n'est pas exercée, le prix de l'action diminue à :

$$S(t_2) - \text{Div} \tag{7}$$

où Div est le dividende de l'action.

La borne inférieure du prix de l'option est alors de :

$$S(t_2) - \text{Div} - Ke^{-r_f(T-t_2)} \tag{8}$$

où T désigne la durée de l'option.

Si la valeur de l'option non exercée est supérieure à la valeur exercée, l'investisseur n'exercera pas. On a dans ce cas :

$$S(t_2) - \text{Div} - Ke^{-r_f(T-t_2)} \geq S(t_2) - K \tag{9}$$

3. Pour plus de détails à ce sujet, on consultera : Racicot et Théoret (2000d), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, chap. 6, de même que les références qui apparaissent dans ce chapitre.

ou, en mettant le dividende en évidence :

$$\text{Div} \leq K\left(1 - e^{r_f(T-t_2)}\right) \tag{10}$$

Si le dividende n'excède pas la valeur donnée par l'équation (10), l'investisseur n'exercera pas à la date t_2.

Par ailleurs, si :

$$\text{Div} > K\left(1 - e^{-r_f(T-t_2)}\right) \tag{11}$$

l'investisseur exercera si le prix de l'action est suffisamment élevé. Cette inégalité a d'autant plus de chance de se réaliser que t_2 se rapproche de T et que le dividende est important.

Déplaçons-nous maintenant vers la première date, soit t_1. Si l'investisseur exerce à cette date, il recevra :

$$S(t_1) - K \tag{12}$$

S'il n'exerce pas, le prix de l'action diminue à $S(t_1)$ – Div. La borne inférieure du prix de l'option est alors de :

$$S(t_1) - \text{Div} - Ke^{r_f(t_2-t_1)} \tag{13}$$

Si par ailleurs :

$$\text{Div} > K\left(1 - e^{r_f(t_2-t_1)}\right) \tag{14}$$

il peut alors être optimal d'exercer à la date t_1.

La dernière égalité est approximativement égale à :

$$\text{Div} > Kr_f(t_2 - t_1) \tag{15}$$

Si X est égal à K, on peut alors écrire :

$$\frac{\text{Div}}{S} > r_f(t_2 - t_1) \tag{16}$$

Pour que l'exercice soit optimal, il faudrait donc que le taux de distribution du dividende soit supérieur au taux sans risque calculé sur la période qui sépare t_1 et t_2, ce qui est difficilement réalisable puisque le taux de distribution du dividende est généralement plutôt limité. En résumé, pour ce qui concerne le cas d'un call américain,

le seul temps où il y a lieu de considérer l'exercice est généralement l'instant qui précède la dernière date ex-dividende à se produire durant la durée du call.

1. Cas d'un dividende ponctuel qui est proportionnel au prix de l'action

Considérons le cas d'un put américain dont l'action sous-jacente paie un dividende un certain nombre de mois après l'émission de l'option mais avant sa date d'échéance. Ce dividende est connu à l'avance et est proportionnel au prix de l'action sous-jacente à l'option. Pour fixer les idées, supposons les données suivantes pour le put :

S : prix de l'action sous-jacente : 45 $
K : prix d'exercice du put : 45 $
T : durée de l'option : 1
sig : écart-type du rendement de l'action : 0,25
rf : taux sans risque : 0,06

L'arbre binomial comprend trois périodes et la date du paiement du dividende est fixée à la deuxième période. Lors du paiement du dividende, le prix de l'action baisse du montant suivant :

$$\Delta S = -\text{div}_p S \tag{17}$$

où S est le prix de l'action au nœud de l'arbre où se produit la baisse et div_p, le pourcentage du dividende versé exprimé en termes du prix de l'action. Comme il s'agit ici d'un put américain, on doit vérifier à chaque nœud si la valeur intrinsèque du put, soit :

$$K - S \tag{18}$$

excède la valeur donnée par l'actualisation des cash-flows de l'option à ce nœud. La valeur que prendra le cash-flow de l'option à un nœud sera le maximum de ces deux montants. Il faut donc appliquer la règle d'exercice à chaque nœud. Le dividende proportionnel est ici fixé 4 % et est versé à la période 2 de l'arbre, c'est-à-dire au 2/3 de l'année (il y a 3 périodes). La sous-routine que nous avons écrite en langage Visual Basic (Excel 2000, version anglaise) se retrouve au tableau 1.

TABLEAU 1 **Sous-routine Visual Basic de l'évaluation d'un put américain par la méthode de l'arbre binomial additif (dividende proportionnel)**

```
Sub Calloption2()
Sheet1.Activate
Range("g4:EE2000").ClearContents

K = 45
T = 1
s = 45
sig = 0.25
rf = 0.06
N = 3
divp = 0.04
dtdiv = 2
iopt = -1


Dim j As Integer
Dim i As Integer
Dim St() As Variant
ReDim St(N)
Dim Cashf() As Variant
ReDim Cashf(N)
Dim cf() As Variant
ReDim cf(N)


dt = T / N
Range("dtb").Offset(0, 0) = dt

nu = rf - (0.5 * sig ^ 2)
Range("nub").Offset(0, 0) = nu

dxu = Sqr(sig ^ 2 * dt + (nu * dt) ^ 2)
Range("dxub").Offset(0, 0) = dxu

dxd = -dxu
Range("dxdb").Offset(0, 0) = dxd

pu = 1 / 2 + 1 / 2 * (nu * dt) / dxu
Range("pub").Offset(0, 0) = pu

pd = 1 - pu
Range("pdb").Offset(0, 0) = pd

disc = Exp(-rf * dt)
Range("discb").Offset(0, 0) = disc
```

TABLEAU 1 *(suite)*

```
St(0) = s * (1 - divp) * Exp(N * dxd)
Range("St0").Offset(0, 0) = St(0)

For j = 1 To N
   St(j) = St(j - 1) * Exp(dxu - dxd)
      Range("St0").Offset(j, 0) = St(j)
Next j

For j = 0 To N
   Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt * (St(j) - K))
      Range("cashf").Offset(j, N) = Cashf(j)
Next j

For i = (N - 1) To 0 Step -1

   For j = 0 To i
   Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))

      If i >= dtdiv Then
         St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
         cf(j) = St(j)
      Else
         St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
         cf(j) = St(j) / (1 - divp)

      End If


   Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j), iopt *
   (cf(j) - K))
      Range("cashf").Offset(j, i) = Cashf(j)

   Next j

Next i

Range("call3") = Cashf(0)


End Sub
```

Examinons en détail cette sous-routine. On y déclare d'abord l'input du problème qui fut donné auparavant. La variable dtdiv est la période de paiement du dividende, définie par rapport à N, soit le nombre de pas de l'arbre. iopt est une variable qui nous permet de calculer le prix d'un put ou d'un call dans le programme. Elle prendra une valeur de +1 si c'est un call et de –1 si c'est un put. Comme nous le verrons ultérieurement, cette variable est utilisée lors de l'actualisation des cash-flows de l'option.

Puis on définit i et j comme des entiers, qui sont les compteurs des boucles du programme :

```
Dim j As Integer
Dim i As Integer
```

De la même façon, on définit les vecteurs qui serviront à stocker les résultats du programme :

```
Dim St() As Variant
    ReDim St(N)
Dim Cashf() As Variant
    ReDim Cashf(N)
Dim cf() As Variant
    ReDim cf(N)
```

Comme la syntaxe l'indique, ces vecteurs sont de dimension N. Puis le programme calcule les constantes qui servent à construire l'arbre dont les formules furent données auparavant. On calcule d'abord les prix de l'action au bout de l'arbre en commençant par le prix minimal (état 0) :

```
St(0) = s * (1 - divp) * Exp(N * dxd)
  Range("St0").Offset(0, 0) = St(0)
```

Comme la date ex-dividende est passée, il faut multiplier le prix actuel de l'action (S) par (1 – divp) avant de l'amener à l'extrémité de l'arbre en recourant à dxd. On calcule par la suite les autres prix au bout de l'arbre par ordre croissant :

```
          For j = 1 To N
St(j) = St(j - 1) * Exp(dxu - dxd)
Range("St0").Offset(j, 0) = St(j)
          Next j
```

Ces prix nous servent à calculer les cash-flows du put à l'échéance :

```
                    For j = 0 To N
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt *
                     (St(j) - K))
        Range("cashf").Offset(j, N) = Cashf(j)
                    Next j
```

La variable iopt prend ici une valeur de –1 puisque nous traitons le cas d'un put. En effet à l'échéance d'un put, le cash-flow est de :

```
Cashf = MAX (0, K - S) (19)
```

Puis le programme s'engage dans une grande boucle de façon à actualiser les cash-flows de l'option de la fin de l'arbre jusqu'au début, ce qui déterminera le prix du put :

```
For i = N -1 To 0 step -1
                ...
            Next i
```

Pour une période donnée (i), on calcule le cash-flow actualisé à chaque nœud :

```
                    For j = 0 To i
Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))
                     ...
                    Next j
```

Mais pour chacun de ces nœuds, on doit vérifier si la règle d'exercice s'applique, car il s'agit ici d'une option américaine. Nous recourons à la boucle : *If… Else… End If* pour la vérifier.

```
        If i >= dtdiv Then
St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
       cf(j) = St(j)
            Else
St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
cf(j) = St(j) / (1 - divp)
            End If
```

Si la date ex-dividende est passée, nous n'avons pas à modifier le prix de l'action, car il est déjà dégonflé pour le dividende.

```
        If i >= dtdiv Then
    St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
          cf(j) = St(j)
```

Nous reculons donc le prix de l'action d'une période puisque nous sommes présentement à la période (N – 1) de l'arbre. À remarquer que nous stockons le résultat dans cf(j) et non dans St(j). En effet, quand nous nous situerons avant la date ex-dividende, nous devrons réintégrer le dividende actualisé dans le prix de l'action. Si nous stockons alors directement le résultat du prix de l'action dans le vecteur St(j), nous cumulerons continuellement le dividende alors qu'il n'est versé qu'une fois. Le prix de l'action s'enflerait alors à mesure que l'on recule dans l'arbre, ce qui donnerait des prix insensés pour les options, notamment pour les calls dont les prix se dirigeraient vers la stratosphère. Le vecteur cf(j) nous permet donc de corriger le prix de l'action pour le dividende. C'est comme si on calculait d'abord l'arbre des prix de l'action sans prendre en compte le dividende et qu'on corrigeait ensuite cet arbre pour le dividende. L'outil pour y arriver est le vecteur cf(j).

Par ailleurs, si l'on se situe avant la date ex-dividende, il faut rajouter le dividende proportionnel au prix, soit en langage Visual Basic :

```
            Else
    St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
    cf(j) = St(j) / (1 - divp)
```

Et on applique la règle d'exercice. Le cash-flow d'un nœud est le maximum du cash-flow actualisé et de la valeur intrinsèque à ce nœud.

```
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j),
                  iopt * (cf(j) - K))
        Range("cashf").Offset(j, i) = Cashf(j)
```

On passe à un autre nœud tout en restant à l'intérieur de la même période :

```
            next j
```

Une fois terminés les nœuds d'une période, on refait le même processus pour la période précédente :

```
            next i
```

Finalement, le prix du put est le cash-flow de l'état 0 (un seul état) de la période 0, soit le cash-flow de l'option au tout début de l'arbre :

```
Range("call3") = Cashf(0)
```

Sous les données actuelles du programme, le prix du put est de 4,31 $.

L'arbre binomial de l'actualisation des cash-flows du put se retrouve au tableau 2.

TABLEAU 2

	J	K	L	M
11	4.317256	7.612103	12.65273	17.00924
12		1.595438	3.486301	7.618156
13			0	0
14				0

Si l'on avait fixé N à 30 (la date ex-dividende est alors fixée à 20), on aurait obtenu une valeur de 4,14 $ pour le put. La vitesse de convergence s'avère donc rapide. Certes, si l'on rehausse le taux du dividende, disons de 4 % à 6 %, la valeur du put est rehaussée. En effet, le dividende fait diminuer le prix le jour ex-dividende et un put bénéficie de la baisse du prix de l'action. Dans le cas précédent, le prix du put augmenterait de 4,14 $ à 4,54 $ à la suite de la hausse du taux du dividende selon la sous-routine.

La sous-routine précédente permet de calculer le prix d'un call américain en fixant au départ la variable iopt à 1 (plutôt qu'à –1 pour le cas d'un put). Si N = 30 et dtdiv = 20, ce pour un taux du dividende de 4 %, le prix du call est alors de 4,98 $. Un relèvement du taux du dividende, disons de 4 % à 6 %, fait diminuer la valeur du call de 4,98 $ à 4,82 $. Le prix découlant de la formule de Black et Scholes pour le call européen correspondant sans dividendes est de 5,78 $. Si l'on fixe le taux du dividende à 0 % dans le programme précédent (N = 30), on obtient une valeur de 5,74 $ pour le call américain, qui se confond alors avec le call européen. La vitesse de convergence de notre sous-routine est donc rapide.

2. Cas d'un seul dividende fixe (montant forfaitaire nominal)

Attardons-nous à une option dont l'action sous-jacente est munie d'un dividende nominal fixe versé périodiquement. La date ex-dividende de l'un de ces dividendes se situe à l'intérieur de la durée de l'option. Pour traiter ce problème, la procédure normale consiste à éclater le prix de l'action en deux parties : *i)* une partie déterministe, soit le dividende actualisé de la date ex-dividende jusqu'au nœud où l'on se trouve dans l'arbre ; *ii)* une partie stochastique, désignée par $\tilde{S}$, dont l'écart-type σ est connu. Soit à désigner par τ la date ex-dividende. À une période donnée t de l'arbre, le prix de l'action est donc égal à :

$$S_t = \tilde{S}_t \tag{19}$$

si $t > \tau$, c'est-à-dire après la date ex-dividende, et à :

$$S_t = \tilde{S}_t + De^{r_f(\tau - t)} \tag{20}$$

si $t \leq \tau$, c'est-à-dire jusqu'à la date ex-dividende, puisque les investisseurs qui détiennent l'action ont droit au dividende jusqu'à la date ex-dividende. La sous-routine du programme du prix d'un call américain écrit sur une action munie d'un dividende apparaît au tableau 3[4].

La sous-routine que l'on retrouve au tableau 3 calcule le prix d'un call américain (iopt = 1) dont la date ex-dividende se situe à la période 1,5 alors que N = 3, soit au milieu de l'année. En termes d'années, la date ex-dividende est de :

```
tau = (dtdiv / N) * T
```

où T est la durée de l'option en fractions d'année (0,25 pour un trimestre, etc.). Cette variable servira par la suite à actualiser les cash-flows de l'option. On calcule les prix de l'action au bout de l'arbre en commençant par le plus faible :

```
St(0) = (s - (Div * Exp(-rf * tau))) * Exp(N * dxd)
```

4. À l'annexe 8.2, on retrouve la fonction correspondante écrite en Visual Basic.

TABLEAU 3 **Sous-routine de la détermination du prix d'une option américaine (call ou put) avec une seule date ex-dividende (dividende fixe)**

```
Sub Calloption3()
Sheet2.Activate
K = 45
T = 1
s = 45
sig = 0.25
rf = 0.06
N = 3
Div = 1.5


Dim j As Integer
Dim i As Integer
Dim St() As Variant
ReDim St(N)
Dim Cashf() As Variant
ReDim Cashf(N)
Dim cf() As Variant
ReDim cf(N)


dtdiv = 2
tau = (dtdiv / N) * T
iopt = 1


dt = T / N
Range("dtb2").Offset(0, 0) = dt

nu = rf - (0.5 * sig ^ 2)
Range("nub2").Offset(0, 0) = nu

dxu = Sqr(sig ^ 2 * dt + (nu * dt) ^ 2)
Range("dxub2").Offset(0, 0) = dxu

dxd = -dxu
Range("dxdb2").Offset(0, 0) = dxd

pu = 1 / 2 + 1 / 2 * (nu * dt) / dxu
Range("pub2").Offset(0, 0) = pu

pd = 1 - pu
Range("pdb2").Offset(0, 0) = pd
```

TABLEAU 3 *(suite)*

```
disc = Exp(-rf * dt)
Range("discb2").Offset(0, 0) = disc

St(0) = (s - (Div * Exp(-rf * tau))) * Exp(N * dxd)
Range("St02").Offset(0, 0) = St(0)

For j = 1 To N
   St(j) = St(j - 1) * Exp(dxu - dxd)
      'Range("St02").Offset(j, 0) = St(j)
Next j

For j = 0 To N
   Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt * (St(j) - K))
   Range("cashf2").Offset(j, N) = Cashf(j)
Next j

For i = (N - 1) To 0 Step -1

   For j = 0 To i
   Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))

   If i > dtdiv Then
      St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
      cf(j) = St(j)
   Else
      discdiv = Div * Exp(-rf * (tau - i * dt))
      St(j) = (St(j) / Exp(dxd))
      cf(j) = St(j) + discdiv

   End If


   Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j), iopt *
   (cf(j) - K))
      Range("cashf2").Offset(j, i) = Cashf(j)

   Next j

Next i

Range("call4") = Cashf(0)


End Sub
```

Comme la date ex-dividende est passée, il faut retrancher au prix actuel de l'action le dividende actualisé de la date 0 à la date ex-dividende (tau) avant de lui appliquer le terme exponentiel qui permet de projeter le prix actuel au bout de l'arbre dans l'état 0 (prix minimal). On procède comme auparavant pour calculer les autres prix de l'action au bout de l'arbre. Puis on calcule les cash-flows de l'option au bout de l'arbre :

```
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt *
                    (St(j) - K))
```

Comme c'est un call, iopt = 1. Puis on actualise ces cash-flows jusqu'au début de l'arbre :

```
            For i = (N - 1) To 0 Step -1
                    For j = 0 To i
Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))
                        Next j
                        Next i
```

Il faut toutefois vérifier si la règle d'exercice s'applique. On recourt ici à la boucle : *If… Else… End If* pour ce faire. Si la date du dividende est passée, alors l'action exclut le dividende :

```
                If i > dtdiv Then
            St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
                  cf(j) = St(j)
```

Jusqu'à la date ex-dividende, le prix de l'action à un nœud inclut le dividende actualisé de la date ex-dividende jusqu'à ce nœud :

```
                        Else
    discdiv = Div * Exp(-rf * (tau - i * dt))
            St(j) = (St(j) / Exp(dxd))
              cf(j) = St(j) + discdiv

                        End If
```

On notera la procédure d'actualisation du dividende. À la date ex-dividende exprimée en fractions d'année, on soustrait i * dt dans la formule de l'actualisation. En effet, plus on s'éloigne de la date ex-dividende, c'est-à-dire plus i diminue, plus l'actualisation du dividende devient importante. Puis, à un nœud donné, on applique la règle d'exercice :

```
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j), iopt
                    * (cf(j) - K))
```

Et on itère comme dans le cas précédent pour en arriver finalement au prix de l'option.

```
Range("call4") = Cashf(0)
```

Sous les données qui apparaissent dans le programme, le prix du call américain est de 5,34 $ contre 5,78 $ pour la solution B.-S. sans dividendes et 4,89 $ pour la solution B.-S. avec dividendes[5]. L'arbre binomial des cash-flows du call apparaît au tableau 4.

TABLEAU 4

	J	K	L	M
9	5.341145	1.457787	0	0
10		8.944321	2.789658	0
11			14.67309	5.338363
12				22.22722

Pour les mêmes données, le prix du put est de 4,00 $. Toujours pour le call, si on augmente N à 30 pour plus de précision (dtdiv = 20), le prix du call est de 5,02 $ qui est à comparer avec la solution B.-S. avec dividendes de 4,89 $. Le call américain vaut en effet toujours plus que le call européen du fait de l'option d'exercice du premier.

Mettons dans notre collimateur la vitesse de convergence de l'arbre binomial. Soit les données suivantes pour le call :

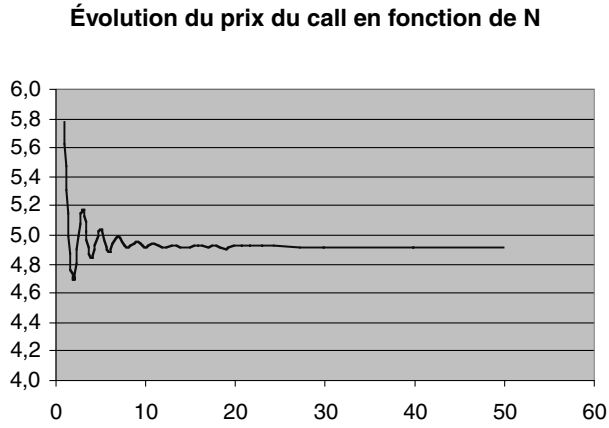
S = 45
K = 45
T = 1
sig = 0,25
rf = 0,06
Div = 1,5

5. Pour calculer le prix d'un call européen avec dividende par la formule de B.-S., il suffit de retrancher le dividende actualisé du prix de l'action et d'appliquer ensuite la formule de B.-S. en utilisant ce prix corrigé pour le prix de l'action. La fonction Visual Basic du call européen avec deux dividendes fixes apparaît à l'annexe 8.3.

La date ex-dividende se situe au milieu de la période. La figure 1 traduit l'évolution du prix de ce call en fonction du nombre de pas dans l'arbre.

On remarque que la convergence s'avère très rapide. Dès N = 10, la valeur du call tend à se stabiliser à 4,92 $. Par conséquent, la présence d'un dividende accélère la vitesse de convergence de l'arbre binomial.

FIGURE 1



3. CAS DE DEUX DIVIDENDES FIXES

Nous nous tournons maintenant vers le cas de la présence de deux dates ex-dividende au cours de la durée de l'option. Le dividende est même nature que le cas précédent. La sous-routine apparaissant au tableau 5 calcule le prix d'une telle option européenne.

Dans la sous-routine du tableau 5, on déclare les deux dates ex-dividende puis on les exprime en fractions d'année :

```
dtdiv1 = 2
dtdiv2 = 5

tau1 = (dtdiv1 / N) * T
tau2 = (dtdiv2 / N) * T
```

TABLEAU 5 **Sous-routine Visual Basic de la détermination du prix d'une option américaine avec deux dates ex-dividende (dividendes fixes)**

```
Sub Calloption4()
Sheet3.Activate
Range("A11:bc10000").ClearContents
Dim K, T, s, sig, rf, N, div1, div2, tau1, tau2
Dim iopt, dt, nu, nd, dxu, dxd, pu, pd, disc, discdiv2, discdiv1
Dim dtdiv1 As Integer
Dim dtdiv2 As Integer

K = 45
T = 0.5
s = 45
sig = 0.4472
rf = 0.07
N = 6
div1 = 0.7
div2 = 0.7

Dim j As Integer
Dim i As Integer
Dim St() As Variant
ReDim St(N)
Dim Cashf() As Variant
ReDim Cashf(N)
Dim cf() As Variant
ReDim cf(N)
Dim Cafj() As Variant
ReDim Cafj(N)

dtdiv1 = 2
dtdiv2 = 5

tau1 = (dtdiv1 / N) * T
tau2 = (dtdiv2 / N) * T
iopt = -1

dt = T / N
Range("dtb3").Offset(0, 0) = dt

nu = rf - (0.5 * sig ^ 2)
Range("nub3").Offset(0, 0) = nu

dxu = Sqr(sig ^ 2 * dt + (nu * dt) ^ 2)
Range("dxub3").Offset(0, 0) = dxu

dxd = -dxu
Range("dxdb3").Offset(0, 0) = dxd

pu = 1 / 2 + 1 / 2 * (nu * dt) / dxu
Range("pub3").Offset(0, 0) = pu

pd = 1 - pu
Range("pdb3").Offset(0, 0) = pd
```

TABLEAU 5 *(suite)*

```
disc = Exp(-rf * dt)
Range("discb3").Offset(0, 0) = disc

St(0) = (s - (div1 * Exp(-rf * tau1)) - (div2 * Exp(-rf * tau2))) *
Exp(N * dxd)
Range("St03").Offset(0, 0) = St(0)

For j = 1 To N
   St(j) = St(j - 1) * Exp(dxu - dxd)
      Range("St03").Offset(j, 0) = St(j)
Next j

For j = 0 To N
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt * (St(j) - K))
Range("cashf3").Offset(j, N) = Cashf(j)
Next j

For i = (N - 1) To 0 Step -1

   For j = 0 To i

      Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))
         Range("cahfj").Offset(j, i) = Cashf(j)

   If i > dtdiv2 Then
      St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
      cf(j) = St(j)
         Range("cfj").Offset(j, i) = cf(j)

   ElseIf i > dtdiv1 And i <= dtdiv2 Then
      discdiv2 = div2 * Exp(-rf * (tau2 - i * dt))

      St(j) = (St(j) / Exp(dxd))
      cf(j) = St(j) + discdiv2
      Range("cfj").Offset(j, i) = cf(j)

   Else
      discdiv1 = div1 * Exp(-rf * (tau1 - i * dt))
         Range("discdiv1").Offset(j, i) = discdiv1
      discdiv2 = div2 * Exp(-rf * (tau2 - i * dt))

      St(j) = (St(j) / Exp(dxd))
      cf(j) = St(j) + discdiv2 + discdiv1
         Range("cfj").Offset(j, i) = cf(j)

   End If

      Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j), iopt *
      (cf(j) - K))
         Range("cashf3").Offset(j, i) = Cashf(j)
      Cafj(j) = iopt * (cf(j) - K)
   Next j

Next i

Range("call5") = Cashf(0)

End Sub
```

Pour déterminer les cash-flows de l'option au bout de l'arbre, le prix de l'action doit être dégonflé des deux dividendes actualisés de la date ex-dividende respective jusqu'au début de l'arbre :

```
St(0) = (s - (div1 * Exp(-rf * tau1)) - (div2 * Exp(-rf *
                tau2))) * Exp(N * dxd)
```

Par la suite, il faut construire l'arbre du prix de l'action qui comporte une date ex-dividende supplémentaire. Pour y arriver, on se sert de la boucle :

```
If... Then
   ...
ElseIf... Then
   ...
Else

End If
```

Lorsque la deuxième date ex-dividende est passée, le prix de l'action n'emmagasine plus aucun dividende :

```
If i > dtdiv2 Then
St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
cf(j) = St(j)
```

Par contre, tout juste après la première date ex-dividende et ce jusqu'à la seconde date, le prix de l'action incorpore le second dividende actualisé :

```
ElseIf i > dtdiv1 And i <= dtdiv2 Then
discdiv2 = div2 * Exp(-rf * (tau2 - i * dt))

St(j) = (St(j) / Exp(dxd))
cf(j) = St(j) + discdiv2
```

Finalement, jusqu'à la première date ex-dividende, le prix de l'action comprend les deux dividendes actualisés :

```
Else
discdiv1 = div1 * Exp(-rf * (tau1 - i * dt))
Range("discdiv1").Offset(j, i) = discdiv1
discdiv2 = div2 * Exp(-rf * (tau2 - i * dt))

St(j) = (St(j) / Exp(dxd))
cf(j) = St(j) + discdiv2 + discdiv1
```

Sous les données qui apparaissent au début du programme, le prix de l'option d'achat est de 5,59 $ pour N = 6. L'arbre de l'évolution des cash-flows du call se retrace au tableau 6.

TABLEAU 6

	I	J	K	L	M	N	O
12	5.592404	2.44177	0.648415	0	0	0	0
13		8.934152	4.335061	1.330167	0	0	0
14			13.82142	7.510314	2.72872	0	0
15				20.5466	12.5703	5.597729	0
16					29.08296	19.96813	11.48325
17						38.90465	28.12597
18							49.67244

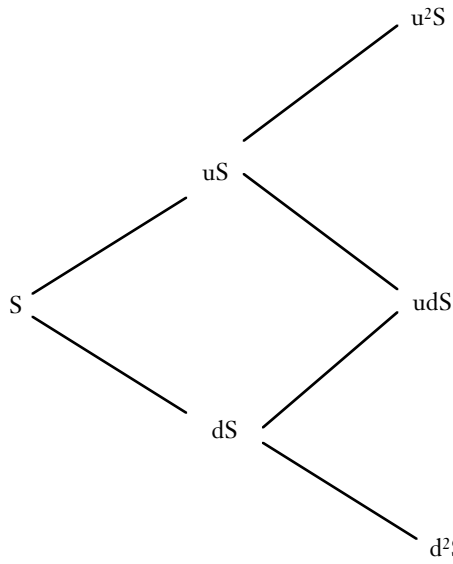
Si l'on augmente le nombre de pas à 60 (N = 60, dtdiv1 = 20, dtdiv2 = 60), le prix de l'option passe à 5,66 $. La convergence est donc rapide. La solution B.-S. avec dividendes est pour sa part de 5,56 $.

ANNEXE 8.1

Calcul des prix d'options américaines par arbres binomiaux multiplicatifs

Au lieu de suivre un processus additif, le prix de l'action suit maintenant un processus multiplicatif dans l'arbre binomial. La hausse du prix de l'action à un nœud est de uS et sa baisse, de dS, tel que le montre la figure A1.

FIGURE A1



Les probabilités de hausse et de baisse du prix de l'action doivent être choisies de façon à être compatibles avec le modèle de Black et Scholes. La solution de l'arbre binomial doit en effet converger vers le modèle de B.-S. pour un call européen. Dans le modèle de B.-S., le prix de l'action obéit à une distribution lognormale. Pour être compatible, le multiple de hausse du prix de l'action doit être de :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (21)$$

où σ désigne la volatilité du rendement de l'action et où Δt représente l'intervalle de temps dans lequel on a divisé la durée de l'option (T – t). Par ailleurs, le multiple de baisse d doit être de :

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{22}$$

La probabilité correspondante, neutre au risque, de hausse du prix de l'action, désignée par p, est de :

$$p = \frac{e^{r\times dt} - d}{u - d} \tag{23}$$

la probabilité de baisse étant bien sûr égale à (1 – p).

1. ARBRE BINOMIAL MULTIPLICATIF : UNE SEULE DATE EX-DIVIDENDE

Par rapport à l'arbre additif, les changements sont les suivants. D'abord les constantes u, d, pu et pd qui viennent d'être données. Puis le calcul de St(0), soit le prix minimal de l'action au bout de l'arbre, s'effectue comme suit :

```
St(0)= (S - ( Div * exp ( -rf * tau))) (d^N)
```

Le calcul des autres prix au bout de l'arbre diffère également :

```
St(j) = St(j-1) * (u/d)
```

de même que le calcul des prix de l'action dans la boucle *If* :

```
St(j) = St(j)/d
```

Comme ils reproduisent les mêmes processus stochastiques, les arbres multiplicatifs et additifs donnent par ailleurs les mêmes résultats. Le tableau A1 fournit la sous-routine de la détermination du prix d'une option américaine avec une seule date ex-dividende, calcul effectué à l'aide de l'arbre binomial multiplicatif.

Sous les données du problème, le prix du call est de 5,33 $, soit le même prix que celui obtenu pour l'arbre additif.

TABLEAU A1 Programme Visual Basic de l'arbre binomial multiplicatif : une seule date ex-dividende

```
Sub Calloptionmult()
Sheet4.Activate
K = 45
T = 1
s = 45
sigma = 0.25
rf = 0.06
N = 3
Div = 1.5


Dim j As Integer
Dim i As Integer
Dim St() As Variant
ReDim St(N)
Dim Cashf() As Variant
ReDim Cashf(N)
Dim cf() As Variant
ReDim cf(N)


dtdiv = 2
tau = (dtdiv / N) * T
iopt = 1


dt = T / N
Range("dtm").Offset(0, 0) = dt

u = Exp(sigma * Sqr(dt))
Range("um").Offset(0, 0) = u

d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
Range("dm").Offset(0, 0) = d


pu = (Exp(rf * dt) - d) / (u - d)
Range("pum").Offset(0, 0) = pu

pd = 1 - pu
Range("pdm").Offset(0, 0) = pd

disc = Exp(-rf * dt)
Range("discm").Offset(0, 0) = disc
```

TABLEAU A1 *(suite)*

```
St(0) = (s - (Div * Exp(-rf * tau))) * (d ^ N)
Range("St02m").Offset(0, 0) = St(0)

For j = 1 To N
   St(j) = St(j - 1) * (u / d)
      Range("St02m").Offset(j, 0) = St(j)
Next j

For j = 0 To N
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt * (St(j) - K))
Range("cashf2m").Offset(j, N) = Cashf(j)
Next j

For i = (N - 1) To 0 Step -1

For j = 0 To i
Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))

If i > dtdiv Then
St(j) = St(j) / d
cf(j) = St(j)
Else
discdiv = Div * Exp(-rf * (tau - i * dt))
St(j) = St(j) / d
cf(j) = St(j) + discdiv


End If


Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j), iopt *
(cf(j) - K))
Range("cashf2m").Offset(j, i) = Cashf(j)

Next j

Next i

Range("option1") = Cashf(0)


End Sub
```

2. ARBRE BINOMIAL MULTIPLICATIF : DEUX DATES EX-DIVIDENDE

TABLEAU A2 **Programme Visual Basic de l'arbre binomial multiplicatif : deux dates ex-dividende**

```
Sub Calloption8()
Sheet5.Activate
Range("E1:bc10000").ClearContents

Dim dtdiv1 As Integer
Dim dtdiv2 As Integer

K = 45
T = 0.5
s = 45
sigma = 0.4472
rf = 0.07
N = 6
div1 = 0.7
div2 = 0.7

Dim j As Integer
Dim i As Integer
Dim St() As Variant
ReDim St(N)
Dim Cashf() As Variant
ReDim Cashf(N)
Dim cf() As Variant
ReDim cf(N)
Dim Cafj() As Variant
ReDim Cafj(N)

dtdiv1 = 2
dtdiv2 = 5

tau1 = (dtdiv1 / N) * T
tau2 = (dtdiv2 / N) * T
iopt = 1

dt = T / N
Range("dtmm").Offset(0, 0) = dt

u = Exp(sigma * Sqr(dt))
Range("umm").Offset(0, 0) = u

d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
Range("dmm").Offset(0, 0) = d

pu = (Exp(rf * dt) - d) / (u - d)
Range("pumm").Offset(0, 0) = pu
```

TABLEAU A2 *(suite)*

```
pd = 1 - pu
Range("pdmm").Offset(0, 0) = pd

disc = Exp(-rf * dt)

St(0) = (s - (div1 * Exp(-rf * tau1)) - (div2 * Exp(-rf * tau2))) *
(d ^ N)
Range("St03m").Offset(0, 0) = St(0)

For j = 1 To N
   St(j) = St(j - 1) * (u / d)
      Range("St03m").Offset(j, 0) = St(j)
Next j

For j = 0 To N
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt * (St(j) - K))
Range("cashf3m").Offset(j, N) = Cashf(j)
Next j

For i = (N - 1) To 0 Step -1

For j = 0 To i

Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))

If i > dtdiv2 Then
   St(j) = St(j) / d
   cf(j) = St(j)

ElseIf i > dtdiv1 And i <= dtdiv2 Then
   discdiv2 = div2 * Exp(-rf * (tau2 - i * dt))

   St(j) = St(j) / d
   cf(j) = St(j) + discdiv2

   Else
      discdiv1 = div1 * Exp(-rf * (tau1 - i * dt))

      discdiv2 = div2 * Exp(-rf * (tau2 - i * dt))

      St(j) = St(j) / d
      cf(j) = St(j) + discdiv2 + discdiv1

End If

Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j), iopt *
(cf(j) - K))
Range("cashf3m").Offset(j, i) = Cashf(j)
Cafj(j) = iopt * (cf(j) - K)
Next j

Next i

Range("option3") = Cashf(0)

End Sub
```

ANNEXE 8.2

Programme Visual Basic d'une fonction qui calcule la valeur d'une option américaine (put ou call) dans le cas d'une seule date ex-dividende à l'aide de l'arbre binomial additif

La fonction du tableau A3 exige que la valeur de chaque variable qui apparaît dans la parenthèse de la fonction soit spécifiée avant de mettre en branle la fonction.

TABLEAU A3 **Fonction Visual Basic du calcul du prix d'une option américaine : arbre binomial additif**

```
Function optbinodiv(K, T, s, sig, rf, N, Div, iopt, dtdiv)


Dim j As Integer
Dim i As Integer
Dim St() As Variant
ReDim St(N)
Dim Cashf() As Variant
ReDim Cashf(N)
Dim cf() As Variant
ReDim cf(N)


tau = (dtdiv / N) * T


dt = T / N

nu = rf - (0.5 * sig ^ 2)

dxu = Sqr(sig ^ 2 * dt + (nu * dt) ^ 2)


dxd = -dxu

pu = 1 / 2 + 1 / 2 * (nu * dt) / dxu

pd = 1 - pu

disc = Exp(-rf * dt)
```

TABLEAU A3 *(suite)*

```
St(0) = (s - (Div * Exp(-rf * tau))) * Exp(N * dxd)

For j = 1 To N
    St(j) = St(j - 1) * Exp(dxu - dxd)

Next j

For j = 0 To N
Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(0, iopt * (St(j) - K))

Next j

For i = (N - 1) To 0 Step -1

For j = 0 To i
Cashf(j) = disc * (pu * Cashf(j + 1) + pd * Cashf(j))

If i > dtdiv Then
St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
cf(j) = St(j)

Else
discdiv = Div * Exp(-rf * (tau - i * dt))
St(j) = St(j) / (Exp(dxd))
cf(j) = St(j) + discdiv

End If


Cashf(j) = Application.WorksheetFunction.Max(Cashf(j), iopt *
(cf(j) - K))


Next j

Next i

optbinodiv = Cashf(0)


End Function
```

ANNEXE 8.3

Fonction Visual Basic de la formule de Black et Scholes avec deux versements de dividendes

La fonction apparaissant au tableau A4 calcule le prix d'un call européen avec deux dates ex-dividende, t1 et t2, qui s'observent au cours de la durée de l'option. Les dividendes respectifs qui sont versés à ces dates sont égaux à div1 et à div2.

TABLEAU A4 **Fonction Visual Basic de la formule de Black et Scholes ajustée pour deux dividendes**

```
Function dOnediv(s, X, T, t1, t2, div1, div2, rf, sigma)
PVdiv = div1 * Exp(-rf * t1) + div2 * Exp(-rf * t2)
s1 = s - PVdiv
Num = Log(s1 / X) + (rf + 0.5 * sigma ^ 2) * T
dOnediv = Num / (sigma * Sqr(T))
End Function

Function CallOptionBSdiv(s, X, T, t1, t2, div1, div2, rf, sigma)
PVdiv = div1 * Exp(-rf * t1) + div2 * Exp(-rf * t2)
s1 = s - PVdiv
CallOptionBSdiv = s1 * Application.NormSDist(dOnediv(s, X, T, t1,
t2, div1, _
div2, rf, sigma)) - X * Exp(-T * rf) * _
Application.NormSDist(dOnediv(s, X, T, t1, t2, div1, div2, rf,
sigma) - _
sigma * Sqr(T))
End Function
```

Certes, cette fonction peut également servir à calculer le prix d'un call européen sans dividende en faisant égaler t1, t2, div1 et div2 à 0.

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

BLACK, F. et M. SCHOLES (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, mai-juin, p. 637-659.

BRYIS, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives : Theory, Application and Practice*, New York, Wiley Frontiers in Finance.

CLEWLOW L. et C. STRICKLAND (1998), *Implementing Derivatives Models*, Chichester, Wiley.

COX, J.C., S.A. ROSS et M. RUBINSTEIN (1979), « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, p. 229-263.

DEITEL, H.M., P.J. DEITEL et T.R. NIETO (1999), *Visual Basic 6 : How to Program*, New York, Prentice Hall.

GREEN, J. (1999), *Excel 2000 VBA Programmer's Reference*, Birmingham, Wrox Press Ltd.

HENDRY, D.F. (1995), *Dynamic Econometrics, Advanced Texts in Econometrics*, Oxford, Oxford University Press.

HULL, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

HULL, J.C. (1998), *Introduction to Futures and Options Markets*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

JACKSON, M. et M. STAUTON (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley.

NEFTCI, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Londres, Academic Press.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001a), *De la construction d'arbres binomiaux et trinomiaux des prix des produits dérivés et de ses rapports avec la simulation de Monte Carlo : une excursion dans la programmation Visual Basic*, CRG, 30-2001, octobre.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001b), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, CRG, 13-2001, mai.

RACICOT F.-É. et R. THÉORET (2001c), *Le calcul numérique en ingénierie financière. Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation et étude d'un cas : l'algorithme de Newton comme solution à l'arbre binomial de Black, Derman et Toy*, CRG, 28-2001.

RACICOT F.-É. et R. THÉORET (2001d), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

ROSTAN, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire.

RUBINSTEIN, M. (1994), « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, juillet, p. 771-818.

WALKENBACH, J. (2000), *Microsoft Excel 2000 Power Programming with VBA*, New York, Hungry Minds.

WILMOTT, P. (2000), *On Quantitative Finance*, volumes 1 et 2, New York, Wiley.

WILMOTT, P. (1998), *Derivatives*, New York, Wiley.

PARTIE

4

QUELQUES APPLICATIONS

CHAPITRE

9

DES ARBRES BINOMIAUX DE TAUX D'INTÉRÊT DES MODÈLES DE BLACK, DERMAN ET TOY ET DE HO ET LEE À L'ÉVALUATION D'OPTIONS SUR TAUX D'INTÉRÊT DANS LE CADRE DE LA PROGRAMMATION VISUAL BASIC

Selon Jackson et Staunton (2001), « *the BDT* [*Black*, *Derman et Toy*] *tree*, *a development of the simple lognormal tree*, *is the most popular choice among the practitioners*[1] ». Clewlow et Strickland (1998) abondent dans le même sens, en y ajoutant quelques modèles : « *Although the list of models*[2] *that we look at in this chapter is by no means exhaustive*, *anecdotal evidence suggests that they are currently the most widely used models by*

1. Jackson, M. et M. Stauton (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley, p. 223.

2. Soit les modèles suivants : Ho, T.S.Y. et S.B. Lee (1986), « Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims », *Journal of Finance*, vol. 41, p. 1011-1029 ; Hull, J. et A. White (1993a), « One Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivatives Securities », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, p. 235-254 ; Hull, J. et A. White (1993b), « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives*, vol. 1, p. 21-32 ; Black, F., E. Derman et W. Toy (1990), « A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options », *Financial Analysts Journal*, janvier-février, p. 33-39 ; Black, F. et P. Karasinski (1991), « Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal », *Financial Analysts Journal*, juillet-août, p. 52-59 ; Hull, J. et A. White (1994a), « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I : Single-factor Models », *The Journal of Derivatives*, automne, p. 7-16 ; Hull, J. et A. White (1994b), « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II : Two-factor Models », *The Journal of Derivatives*, hiver, p. 37-48.

practitioners and academics […] *These models are popular with the practitioner community because of their ease of calibration*[3]. »

Dans ce chapitre, nous continuons d'analyser l'un de ces modèles que nous avons considéré dans nos chapitres précédents, soit le modèle de Black, Derman et Toy. Nous utilisons l'arbre binomial de taux d'intérêt programmé dans nos chapitres antérieurs pour évaluer les calls et les puts européens et américains dont les sous-jacents sont soit une obligation à coupon zéro[4], soit une obligation munie de coupons. Nous développons les programmes appropriés en recourant à l'application Visual Basic d'Excel 2000 (version anglaise). Puis nous nous tournons vers le modèle de Ho et Lee (1986)[5] pour rédiger les programmes, toujours dans le langage Visual Basic, des options suivantes de taux d'intérêt : cap[6], floor[7] et swap. Mais avant de nous attaquer à ces programmes, nous rappelons la méthode classique pour déterminer les prix d'options européennes sur taux d'intérêt, laquelle est associée au modèle de Black (1976)[8].

1. Le modèle de Black[9]

Black a adapté, en 1976, son fameux modèle, soit celui de Black et Scholes, de façon à ce qu'il puisse déterminer les prix d'un grand nombre d'options européennes sur taux d'intérêt. Contrairement à ceux des options américaines, les prix des options européennes ne dépendent pas de la dynamique ou du chemin des taux d'intérêt[10]. On peut donc déterminer leur prix de façon analytique plutôt que de recourir à une modélisation de l'arbre des taux d'intérêt.

3. Clewlow, L. et C. Strickland (1998), *Implementing Derivative Models*, Chichester, Wiley, p. 208.
4. Ou à coupons détachés.
5. Ho et Lee (1986), *op. cit.*
6. Soit un plafond de taux d'intérêt.
7. Soit un plancher de taux d'intérêt.
8. Black, F. (1976), « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, vol. 3, janv.-mars, p. 167-179.
9. Pour plus de détails, voir : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, p. 400-401. Une excellente référence à ce sujet est : Clewlow et Strickland, *op. cit.*, p. 188-194.
10. C'est-à-dire qu'elles ne sont pas *path-dependent*, en anglais.

Dans le modèle de Black, la formule du prix d'un call sur une obligation à coupon zéro dont la valeur nominale est fixée à 1 $ est la suivante :

$$c(T,s) = P(T)\left[P_F(T,s)N(d_1) - XN(d_2)\right] \tag{1}$$

Dans cette équation, c désigne le prix du call ; T, la durée du call et s, la durée de l'obligation sous-jacente. P(T) est le facteur d'actualisation[11] de la période 0 à la période T défini comme :

$$P(T) = e^{-r_f T} \tag{2}$$

r_f étant le taux sans risque et X, le prix d'exercice de l'option. PF est pour sa part le prix à terme de l'obligation, égal à :

$$P_F(T,s) = \frac{P(s)}{P(T)} \tag{3}$$

Le prix à terme de l'obligation pour la période comprise entre T et s (s > T) est en effet le rapport des deux prix au comptant des obligations de durées respectives s et T.

$N(d_1)$ et $N(d_2)$ sont les probabilités cumulatives sous la normale jusqu'à d_1 et d_2, définis comme suit :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P_F}{X}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T)}{\sigma\sqrt{T}} \tag{4}$$

$$d_2 = d_2 - \sigma\sqrt{T} \tag{5}$$

σ étant la volatilité du prix à terme.

On se rend compte que l'équation de Black est une simple adaptation du modèle de Black et Scholes. Le prix de l'action a été remplacé par le prix à terme de l'obligation. De plus, P_F et X sont actualisés, alors que dans l'équation de Black et Scholes, seul X l'est, puisque S est le prix actuel de l'action. À remarquer que, dans l'équation de Black, le prix à terme P_F peut être remplacé par le taux à

11. On dit encore que c'est une obligation à coupon zéro d'échéance T et qui verse 1 $ à son échéance.

terme. Le prix d'exercice X est alors remplacé par le taux d'exercice. Le modèle de Black peut donc être utilisé pour évaluer des options européennes d'achat et de vente sur obligations, des caps et des floors européens ainsi que des swaps européens, entre autres.

Il fut d'usage, pendant un certain temps, de formuler l'équation de Black directement en termes du prix de l'obligation à coupon zéro, soit le sous-jacent du call européen (ou du put européen)[12]. Cette procédure revenait à transposer directement le modèle de Black et Scholes du monde des actions au monde des obligations en remplaçant S (prix de l'action) dans l'équation de Black et Scholes par B (prix de l'obligation). L'équation de Black s'écrit alors :

$$C(T, s) = B(s)N(d_1) - e^{-r_f T}N(d_2) \qquad (6)$$

où B(s) représente le prix de l'obligation à coupon zéro d'échéance s. Si l'obligation comporte des coupons, on suit la même procédure que pour les dividendes dans le cas d'une action. On soustrait du prix de l'obligation la valeur actualisée des coupons qui seront versés à l'intérieur de la durée de l'option. Et on se sert par la suite de ce prix corrigé pour formuler l'équation de Black et Scholes.

Pour évidente qu'elle puisse paraître, cette procédure présente toutefois une faiblesse. En effet, à l'inverse de l'action, l'obligation comporte une échéance. La volatilité du prix de l'obligation diminue à mesure que l'on se rapproche de sa date d'échéance. C'est pour prendre en compte cette dimension de l'obligation que les chercheurs préfèrent substituer au prix de l'obligation son prix à terme dans l'équation de Black. Au demeurant, si l'on formule l'équation du portefeuille d'obligations et de liquidités qui reproduit l'option sur taux d'intérêt, l'échéance de l'obligation diminuera au fur et à mesure que l'on se dirigera vers la date d'échéance de l'option. Or, un tel portefeuille est essentiel selon la méthode suivie par Black et Scholes pour déterminer le prix d'une option. Du fait de cette diminution de la durée de l'obligation, l'introduction du prix à terme dans l'équation du call (ou du put) sur une obligation plutôt que le prix au comptant semble une simple question de cohérence.

12. Hull, J.C. (1989), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 1re édition, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall.

La fonction Visual Basic qui apparaît au tableau 1 calcule le prix d'un call de durée T écrit sur l'obligation à coupon 0 de durée s qui verse 1 $ à son échéance. Le taux d'intérêt au comptant associé à la période T est rT et celui correspondant à la période s est désigné par rs. La volatilité du prix à terme est de sigmaf. Les explications quant à la construction du programme sont incluses dans le tableau 1.

TABLEAU 1 **Programme Visual Basic de la formule de Black pour une option européenne sur obligation**

```
Function callobgBlack(rT, rs, s, T, sigmaf, xf)

' On définit P comme un vecteur de dimension s. Notez la syntaxe.

Dim P() As Double
ReDim P(0 To s)

' On calcule les prix des obligations à coupons 0
' d'échéance T et s.
' On suppose ici des taux différents pour s et T

P(T) = Exp(-rT * T)
P(s) = Exp(-rs * s)

' On calcule le prix à terme
PF = P(s) / P(T)

' On calcule d1
Num1 = Log(PF / xf) + (sigmaf ^ 2 / 2) * T
donef = Num1 / (sigmaf * Sqr(T))

' On calcule N(d1)
Ndonef = Application.NormSDist(donef)

' On calcule d2 et N(d2)
dtwof = donef - sigmaf * Sqr(T)
Ndtwof = Application.NormSDist(dtwof)

' On calcule le prix du call sur l'obligation
callobgBlack = P(T) * (PF * Ndonef - xf * Ndtwof)

End Function
```

TABLEAU 2

	A	B	C	D	E	F	G	H
13	**Calcul d'un call européen sur obligation**							
14								
15	rT	0.03						
16	rs	0.03						
17	s	5						
18	T	1						
19	sigmaf	0.1						
20	xf	0.75						
21								
22	**Prix du call**		0.134403663	**<=callobgBlack(b15,b16,b17,b18,b19,b20)**				
23								
24								

TABLEAU 3

	A	B	C	D	E	F	G	H
13	**Calcul d'un call européen sur obligation**							
14								
15	rT	0.05						
16	rs	0.05						
17	s	5						
18	T	1						
19	sigmaf	0.1						
20	xf	0.75						
21								
22	**Prix du call**		0.073182225	**<=callobgBlack(b15,b16,b17,b18,b19,b20)**				
23								

Le tableau 2 montre comment s'incorpore cette fonction dans un chiffrier Excel pour les données qui sont compilées dans le chiffrier, en supposant une structure à terme des taux d'intérêt horizontale à 3 %.

Pour les données du tableau 2, le prix du call est de 0,1344 $. Supposons maintenant une hausse des taux d'intérêt à 5 %. Le chiffrier correspondant se retrouve au tableau 3.

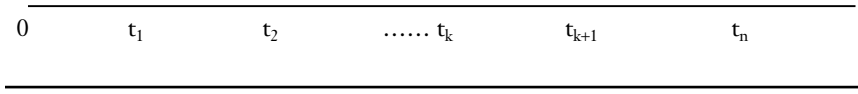
On constate qu'une hausse de taux d'intérêt fait diminuer le prix du call sur obligation, contrairement au cas du call sur action. En effet, il existe une relation inverse entre le prix d'une obligation et les taux d'intérêt. Cet effet domine la relation positive indirecte qui existe entre le prix d'un call et le taux d'intérêt, laquelle résulte du phénomène de l'actualisation du prix d'exercice.

Considérons maintenant la détermination du prix d'un cap européen, toujours dans le cadre de l'équation de Black. À l'échéance d'un cap, sa valeur est la suivante :

$$CAP = MAX(0, R - R_{cap})\Delta\tau L \tag{7}$$

où R est le taux d'intérêt qui prévaut à l'échéance du cap ; R_{cap}, le taux d'exercice du cap ; $\Delta\tau$, la durée du cap et L, le principal notionnel qui sert à calculer les cash-flows du cap. Le cap est en jeu si : $R > R_{cap}$ puisqu'il sert de couverture contre des hausses de taux d'intérêt. Sinon, il est hors-jeu. En fait, un cap est un portefeuille de caplets, chaque caplet couvrant une période spécifique de temps.

Soit l'intervalle suivant de temps de 0 à t_n, divisé en sous-périodes d'égale longueur :



Le cap est ici un portefeuille de caplets d'égale durée qui couvre la période s'étirant de t_1 à t_n. La période comprise entre 0 et t_1 n'est pas couverte puisque le taux d'intérêt de ladite période est connu. Nous voulons évaluer le caplet qui couvre la période comprise entre t_k et t_{k+1}.

Toujours en appliquant la formule de Black, le prix d'un caplet européen est de :

$$caplet(t_k, t_{k+1}) = P(t_k)\left[f(t_k, t_{k+1})N(d_1) - R_{cap}N(d_2)\right]\Delta\tau L \tag{8}$$

où f(.) désigne le taux *forward* entre t_k et t_{k+1} ; L est le principal notionnel du cap et $\Delta\tau$ est égal à $(t_{k+1} - t_k)$ puisque les taux d'intérêt sont exprimés sur une base annuelle.

Par ailleurs,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f(0, t_k, t_{k+1}}{R_{cap}}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_k)}{\sigma\sqrt{t_k}} \tag{9}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_k} \tag{10}$$

Le taux *forward* entre t_k et t_{k+1} se calcule à partir de la formule suivante :

$$f(t_k, t_{k+1}) = \frac{\ln\left(\frac{P(t_k)}{P(t_{k+1})}\right)}{t_{k+1} - t_k} \tag{11}$$

Le programme que l'on peut lire au tableau 4 détermine le prix d'un cap à partir de la formule de Black.

TABLEAU 4 **Programme Visual Basic de la détermination du prix d'un cap à l'aide de la formule de Black**

```
Sub callcapBlack1()
rk = 0.05
rk1 = 0.05
T = 0.75
s = 1
sigma = 0.1
Rcap = 0.045
L = 1
M = 12
M1 = 9
M2 = 12

Dim P() As Variant
ReDim P(0 To M)
P(M1) = Exp(-rk * T)
Range("Ptk") = P(M1)
P(M2) = Exp(-rk1 * s)
Range("ptk1") = P(M2)
v = P(M1) / P(M2)
Range("sss") = v
f = Log(v) / (s - T)

Range("ftk") = f
Num1 = Log(f / Rcap) + (sigma ^ 2 / 2) * T
donef = Num1 / (sigma * Sqr(T))
Ndonef = Application.NormSDist(donef)
dtwof = donef - sigma * Sqr(T)
Ndtwof = Application.NormSDist(dtwof)
call1 = P(M1) * (f * Ndonef - Rcap * Ndtwof) * (s - T) * L
Range("call1") = call1
End Sub
```

Pour illustrer ce programme, supposons que nous voulons déterminer le prix d'un cap entre le 9e (M1) et le 12e mois (M2). Le taux au comptant du 9e mois (rk) est de 4 % et le taux du 12e mois (rk1), également de 4 %. La volatilité du taux à terme (sigma) est de 0,5. Le taux d'exercice du cap se situe à 4,5 %. Le principal notionnel du cap s'établit à 10 millions de dollars. Le résultat apparaît au tableau 5.

Pour les données du tableau 5, la valeur du cap est de 12247,26 $. Si l'on réduit le taux d'exercice du cap, la valeur du cap s'en trouve évidemment rehaussée. Au tableau 6, le taux d'exercice du cap a été abaissé à 3 %. La valeur du cap a augmenté à 29710,39 $.

TABLEAU 5

	A	B	C	D	E	F	G	H
26	**Calcul d'un cap européen**							
27								
28	rk	0.04						
29	rk1	0.04						
30	M1	9						
31	M2	12						
32	M	12						
33	sigma	0.5						
34	Rcap	0.045						
35	L	10000000						
36								
37								
38								
39	**Prix du cap**		12247.26	**<=callcapBlack(b28,b29,b30,b31,b32,b33,b34,b35)**				

TABLEAU 6

	A	B	C	D	E	F	G	H
26	**Calcul d'un cap européen**							
27								
28	rk	0.04						
29	rk1	0.04						
30	M1	9						
31	M2	12						
32	M	12						
33	sigma	0.5						
34	Rcap	0.03						
35	L	10000000						
36								
37								
38								
39	**Prix du cap**		29710.39	**<=callcapBlack(b28,b29,b30,b31,b32,b33,b34,b35)**				

Retournons au tableau 5 et supposons des anticipations à la hausse de taux d'intérêt, c'est-à-dire que le taux au comptant du 12e mois est supérieur au taux du 9e mois (rk1 > rk). Il s'ensuit alors une valeur accrue pour le cap, car la probabilité d'exercice augmente dans ce cas. Cela se confirme au tableau 7 où le taux du 12e mois a été relevé à 5 %.

Par ailleurs des attentes à la baisse de taux d'intérêt (rk1 < rk) produisent l'effet inverse, car cela réduit la probabilité d'exercice du cap, comme cela transpire du tableau 8.

TABLEAU 7 **Des attentes à la hausse de taux d'intérêt**

	A	B	C	D	E	F	G	H
26	**Calcul d'un cap européen**							
27								
28	rk	0.04						
29	rk1	0.05						
30	M1	9						
31	M2	12						
32	M	12						
33	sigma	0.5						
34	Rcap	0.045						
35	L	10000000						
36								
37								
38								
39	**Prix du cap**		87569.08	**<=callcapBlack(b28,b29,b30,b31,b32,b33,b34,b35)**				

TABLEAU 8 **Des attentes à la baisse de taux d'intérêt**

	A	B	C	D	E	F	G	H
26	**Calcul d'un cap européen**							
27								
28	rk	0.04						
29	rk1	0.035						
30	M1	9						
31	M2	12						
32	M	12						
33	sigma	0.5						
34	Rcap	0.045						
35	L	10000000						
36								
37								
38								
39	**Prix du cap**		367.13	**<=callcapBlack(b28,b29,b30,b31,b32,b33,b34,b35)**				

2. OPTIONS SUR OBLIGATIONS

Dans nos chapitres antérieurs[13], nous avons traduit l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy en langage Visual Basic. Nous avons également expliqué la structure de ce modèle. Il reste à examiner comment on peut se servir de cet arbre pour déterminer les arbres de prix d'obligations, puis d'options écrites sur ces obligations. Nous abordons par la suite le modèle de Ho et Lee de façon à présenter des programmes écrits en Visual Basic de nature à déterminer les prix de caps, de floors et de swaps sur taux d'intérêt, toujours en tirant parti de l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy.

2.1. Options écrites sur des obligations à coupon zéro

Au tableau 9 se retrouve l'input du programme qui suit, soit la structure à terme des taux d'intérêt au comptant ainsi que la structure à terme de leur volatilité respective.

TABLEAU 9

	A	B	C	D
1		**Taux**	**Prix**	**Volatilité**
2	1	0.1	0.9048374	
3	2	0.11	0.8025188	0.19
4	3	0.12	0.6976763	0.18
5	4	0.125	0.6065307	0.17
6	5	0.13	0.5220458	0.16
7	6	0.14	0.4317105	0.15
8	7	0.145	0.3624024	0.13
9	8	0.15	0.3011942	0.12
10	9	0.155	0.247833	0.11
11	10	0.16	0.2018965	0.1
12	11	0.165	0.1628379	0.09
13	12	0.17	0.1300287	0.08

13. Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001b), *Le calcul numérique en ingénierie financière. Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation et étude d'un cas : l'algorithme de Newton comme solution à l'arbre binomial de Black, Derman et Toy*, CRG, 28-2001 ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001c), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril. Notons que nous nous sommes inspirés de Jackson et Staunton (2001) et de Clewlow et Strickland (1998) pour programmer l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy.

Le tableau 10 renferme le programme Visual Basic de la construction de l'arbre binomial du prix d'une obligation de 12 ans conforme au tableau 8. Il fait appel à la fonction *BinZeroRateTree* que nous avons expliquée au chapitre 5 et que nous reproduisons dans l'annexe du présent chapitre.

TABLEAU 10 **Programme Visual Basic de l'arbre binomial du prix d'une obligation à coupon zéro**

```
Sub prixobg()

Sheet2.Activate

Dim i As Integer, n As Integer

Dim vvec() As Variant

Set zpvec = Range("zpvec")
Set volvec = Range("volvec")

L = Range("L")
delt = Range("delt")

n = zpvec.Rows.Count

p = 0.5
pstar = 1 - p

ReDim vvec(1 To n + 1, 1 To n + 1)

For i = 1 To n + 1
vvec(i, n + 1) = 100
Range("vvec1").Offset(i, n) = vvec(i, n + 1)
Next i

Rmat = BinZeroRateTree(zpvec, volvec, L, delt)

For j = n To 1 Step -1

   For i = 1 To j
      vvec(i, j) = (p * vvec(i, j + 1) + pstar * vvec(i + 1, j + 1))
      * Exp(-Rmat(i, j) * delt)
      Range("vvec1").Offset(i, j - 1) = vvec(i, j)
      Next i
   Next j

End Sub
```

Ce programme appelle quelques commentaires. Nous faisons d'abord lire l'input du programme, c'est-à-dire le vecteur des taux de rendement, que nous avons nommé zpvec dans le chiffrier, et le vecteur correspondant des volatilités, appelé volvec.

```
Set zpvec = Range("zpvec")
Set volvec = Range("volvec")
```

Nous faisons également lire la valeur nominale de l'obligation, L, ici fixée à 100 $, de même que la longueur du pas de l'arbre, delt, établie à un an.

```
L = Range("L")
delt = Range("delt")
```

La commande qui suit sert à compter le nombre de lignes du vecteur zpvec, chiffre égal au nombre de taux d'intérêt retenu.

```
n = zpvec.Rows.Count
```

Puis, nous fixons la probabilité de hausse de taux d'intérêt, pstar, ainsi que la probabilité de baisse, p, respectivement à 0,5.

```
p = 0.5
pstar = 1 - p
```

Nous recourons à n pour fixer la dimension du vecteur vvec, qui servira à l'actualisation des cash-flows de l'obligation de 12 ans.

```
ReDim vvec(1 To n + 1, 1 To n + 1)
```[14]

Puis nous spécifions la valeur à l'échéance des cash-flows de l'obligation, c'est-à-dire à la période n + 1[15], pour les divers états qui s'y retrouvent, dont le nombre est également de n + 1 puisque l'on se situe dans un arbre binomial. La valeur de ces cash-flows est bien sûr égale à L quel que soit l'état.

```
For i = 1 To n + 1
vvec(i, n + 1) = 100
Range("vvec1").Offset(i, n) = vvec(i, n + 1)
Next i
```

14. Comme nous sommes en base 1, nous aurions pu écrire : Redim vvec(n + 1, n + 1) puisque le début du vecteur est de 1 par défaut lorsque l'on recourt à la base 1.

15. N'oublions pas en effet que nous sommes en base 1 et non en base 0 dans le programme Visual Basic.

On calcule l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy en faisant appel à fonction *BinZeroRateTree*.

```
Rmat = BinZeroRateTree(zpvec, volvec, L, delt)
```

Nous nous servons de ces taux pour actualiser les cash-flows de l'obligation de la fin de l'arbre jusqu'au début.

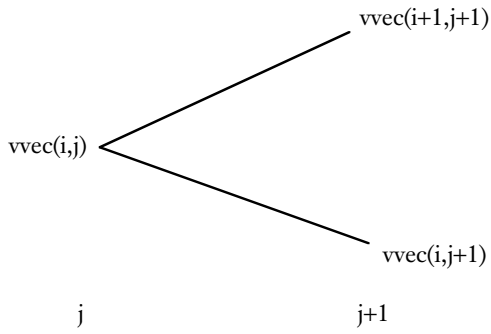
```
For j = n To 1 Step -1

    For i = 1 To j
vvec(i, j) = (p * vvec(i, j + 1) + pstar * vvec(i + 1, j +
    1)) * Exp(-Rmat(i, j) * delt)
Range("vvec1").Offset(i, j - 1) = vvec(i, j)
    Next i

    Next j
```

On commence l'actualisation à la période n (j = n), les cash-flows de la période (n + 1) étant connus. Nous avons n nœuds à cette période et nous calculons les cash-flows actualisés de l'obligation pour chacun de ces nœuds (For i = 1 to j). Pour un nœud donné (i,j), i désignant l'état de la nature et j la période, la valeur actualisée du cash-flow qui s'y trouve est vvec(i,j). Elle est égale à la valeur espérée, actualisée par le taux Rmat(i,j), des deux cash-flows situés aux extrémités des branches attachées à ce nœud, soit vvec(i,j + 1) et vvec(i + 1, j + 1). La figure 1 illustre cette actualisation.

FIGURE 1



L'actualisation des cash-flows pour la période n étant terminée, nous reculons d'une période pour actualiser les cash-flows de cette période et ainsi de suite jusqu'au début de l'arbre. Nous avons alors calculé le prix de l'obligation.

```
For j = n To 1 Step -1
        ...
Next j
```

Le tableau 11 représente l'arbre binomial du prix de l'obligation à coupon zéro de 12 ans calculé à partir du programme précédent[16].

L'arbre binomial du prix de l'obligation à coupon zéro étant établi, nous pouvons nous attaquer aux programmes de la détermination des prix d'options européennes écrites sur de telles obligations. La procédure suivie pour construire les arbres d'options est la même que celle des obligations. Il suffit de déterminer les cash-flows de l'option à la fin de l'arbre, lesquels sont connus, et de calculer leur valeur actualisée espérée en reculant dans l'arbre jusqu'au début. On obtient alors le prix de l'option.

Considérons d'abord le cas d'un call européen de deux ans écrit sur une obligation à coupon zéro de trois ans. La structure à terme des taux de même que leur volatilité, soit l'input du modèle, se lit au tableau 12.

La sous-routine Visual Basic servant à calculer le prix d'une telle option se retrouve au tableau 13.

On construit dans un premier temps l'arbre des cash-flows de l'obligation de trois ans en suivant la procédure qui vient d'être expliquée. Sous les données du problème actuel, l'arbre des cash-flows de l'obligation de trois ans se situe au tableau 14.

16. À remarquer que le prix de l'obligation à 12 ans, résultant de la construction de l'arbre, soit 13 $, est bien égal au prix observé pour cette obligation qui se retrouve au tableau 9. En effet, l'arbre binomial de BDT doit reproduire les prix observés des obligations de diverses échéances de même que leur volatilité.

TABLEAU 11 **Arbre binomial du prix de l'obligation à coupon 0 de 12 ans**

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
3	13.00	11.01	9.59	8.78	8.30	8.34	9.78	11.62	15.10	21.48	33.34	55.94	100.00
4		17.73	15.80	14.56	13.75	13.59	15.08	17.11	20.92	27.67	39.59	60.96	100.00
5			23.31	21.67	20.50	20.07	21.44	23.48	27.38	34.18	45.76	65.58	100.00
6				29.62	28.13	27.41	28.52	30.43	34.21	40.77	51.70	69.80	100.00
7					36.17	35.18	35.95	37.62	41.12	47.23	57.31	73.62	100.00
8						42.98	43.39	44.77	47.87	53.41	62.51	77.03	100.00
9							50.56	51.62	54.29	59.19	67.27	80.06	100.00
10								58.02	60.25	64.48	71.56	82.73	100.00
11									65.67	69.27	75.39	85.09	100.00
12										73.55	78.78	87.14	100.00
13											81.76	88.93	100.00
14												90.49	100.00
15													100.00

TABLEAU 12

	A	B	C	D
3		Taux	Prix	Volatilité
4				
5	1 an	0.1	0.904837	0.2
6	2 ans	0.11	0.802519	0.19
7	3 ans	0.12	0.697676	0.18

TABLEAU 13 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'une option européenne sur obligation à coupon zéro**

```
Sub optiontaux()

Sheet3.Activate

Dim i As Integer, n As Integer

Dim vvec() As Variant
Dim calleuro() As Variant

Set zpvec1 = Range("zpvec1")
Set volvec1 = Range("volvec1")

L = Range("L")
delt = Range("delt")

n = zpvec1.Rows.Count

p = 0.5
pstar = 1 - p
k = 88
iopt = 1


ReDim vvec(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim calleuro(1 To n + 1, 1 To n + 1)


For i = 1 To n + 1
vvec(i, n + 1) = 100
Range("vvec2").Offset(i, n) = vvec(i, n + 1)
Next i
```

TABLEAU 13 *(suite)*

```
Rmat = BinZeroRateTree(zpvec1, volvec1, L, delt)

   For j = n To 1 Step -1

      For i = 1 To j
         vvec(i, j) = (p * vvec(i, j + 1) + pstar * vvec(i + 1, j +
         1)) _
         * Exp(-Rmat(i, j) * delt)

         Range("vvec2").Offset(i, j - 1) = vvec(i, j)
      Next i
   Next j

For i = 1 To n

calleuro(i, n) = Application.Max(0, iopt * (vvec(i, n) - k))

Range("calleuro").Offset(i, n - 1) = calleuro(i, n)


Next i

For j = n - 1 To 1 Step -1

      For i = 1 To j
         calleuro(i, j) = (p * calleuro(i, j + 1) + pstar * _
         calleuro(i + 1, j + 1)) * Exp(-Rmat(i, j) * delt)

         Range("calleuro").Offset(i, j - 1) = calleuro(i, j)
      Next i
   Next j


End Sub
```

TABLEAU 14 **Arbre des cash-flows de l'obligation de trois ans**

	H	I	J	K
7	69.76763	73.43691	82.20338	100
8		80.77341	87.22089	100
9			90.90177	100
10				100

Puis on établit les cash-flows du call au bout de l'arbre.

```
                    For i = 1 To n
calleuro(i, n) = Application.Max(0, iopt * (vvec(i, n) - k))
     Range("calleuro").Offset(i, n - 1) = calleuro(i, n)

                    Next i
```

Comme il s'agit ici d'un call, iopt est égal à (+1). Il s'agirait d'un put si iopt était fixé à (–1). Pour chaque nœud au bout de l'arbre, le cash-flow du call est le maximum des deux nombres suivants : *i)* 0 ; *ii)* l'écart entre le prix de l'obligation à ce nœud et le prix d'exercice du call. L'actualisation subséquente des cash-flows de l'option obtempère au même processus que celui de l'obligation.

```
                For j = n - 1 To 1 Step -1

                    For i = 1 To j
    calleuro(i, j) = (p * calleuro(i, j + 1) + pstar * _
      calleuro(i + 1, j + 1)) * Exp(-Rmat(i, j) * delt)

     Range("calleuro").Offset(i, j - 1) = calleuro(i, j)
                    Next i
                    Next j
```

Sous les données du problème, le prix du call européen est de 0,59 $. Le prix du put correspondant (iopt = –1) est de 1,45 $.

Si l'option est américaine, lors de l'actualisation des cash-flows de l'option, il faut vérifier à chaque nœud si la valeur intrinsèque de l'option excède le cash-flow actualisé à ce nœud. Le cash-flow dudit nœud est le maximum de ces deux montants, comme cela ressort des quelques lignes suivantes que l'on doit ajouter au programme précédent lorsqu'il s'agit d'une option américaine.

```
                For j = n - 1 To 1 Step -1

                    For i = 1 To j
    callamer(i, j) = (p * callamer(i, j + 1) + pstar * _
      callamer(i + 1, j + 1)) * Exp(-Rmat(i, j) * delt)

  callamer(i, j) = Application.Max(callamer(i, j), iopt *
                       (vvec(i, j) - k))

     Range("callamer").Offset(i, j - 1) = callamer(i, j)
                    Next i
                    Next j
```

Sous les données actuelles, le prix du call américain est de 0,59 $ et celui du put américain, de 18,23 $[17].

2.2. Options écrites sur des obligations avec coupons

Une obligation avec coupons peut être considérée comme un portefeuille d'obligations à coupon zéro. Il est d'ailleurs pratique courante de détacher les coupons d'une obligation pour ainsi la vendre en pièces détachées comme autant d'obligations à coupon zéro, soit chacun des coupons et la valeur nominale de l'obligation[18]. Par conséquent, pour construire l'arbre binomial d'une obligation munie de coupons, il suffit de construire l'arbre binomial de chacune de ses constituantes, qui sont autant d'obligations à coupon zéro, et de faire par la suite la somme de ces arbres pour obtenir la valeur de l'obligation avec coupons[19].

Nous voulons construire l'arbre binomial d'une option de deux ans écrite sur une obligation de trois ans munie d'un coupon annuel de 10 % et dont la valeur nominale est de 100 $. Au tableau 15, on retrouve la structure à terme observée des taux de rendement et de leur volatilité.

Le tableau 16 présente l'arbre binomial de taux d'intérêt pour n = 3.

---

17. On remarque que le prix du call ne change pas lorsque l'on passe d'une option européenne à une option américaine, mais que le prix du put enregistre un bond important. On se souviendra que le prix d'un call européen écrit sur une action qui ne verse pas de dividende est égal à celui du call américain correspondant. En effet, un call américain écrit sur une action ne versant pas de dividende ne sera jamais exercé. Tel n'est pas le cas pour un put. La valeur intrinsèque d'un put excède en effet sa valeur donnée par l'équation de Black et Scholes s'il est suffisamment en jeu. Un put américain vaut alors plus qu'un put européen. On applique le même raisonnement pour un call et un put écrits sur une obligation à coupon zéro.

18. On parle de *stripped bonds*, en anglais.

19. Pour plus de détails à ce sujet, on consultera : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001d), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

TABLEAU 15

	A	B	C	D
1	**Input**			
2		**Taux**	**Prix**	**Volatilité**
3				
4	1 an	0.1	0.904837	0.2
5	2 ans	0.11	0.802519	0.19
6	3 ans	0.12	0.697676	0.18

TABLEAU 16

	A	B	C	D
10	**Arbre des taux**			
11				
12		10.00%	14.28%	19.60%
13			9.77%	13.67%
14				9.54%

Le programme de la construction de l'arbre binomial des cash-flows de l'obligation à 3 ans et des calls européen et américain à deux ans écrits sur cette obligation se lit au tableau 17.

Le programme s'ouvre sur une déclaration des variables ou vecteurs qui serviront aux calculs subséquents. Puis l'on procède à l'actualisation du premier coupon, en suivant la procédure expliquée dans la section précédente.

```
c = 10

For i = 1 To n - 1
 ps1(i, n - 1) = c
Range("ps1").Offset(i, n - 2) = ps1(i, n - 1)
Next i
```

On recourt au vecteur *ps1()* pour enregistrer les résultats. La première opération est d'inscrire au bout de l'arbre les cash-flows finaux de cette première obligation à coupon zéro, soit les coupons de 10 $.

TABLEAU 17 Programme Visual Basic de l'évaluation de calls (puts) européen et américain écrits sur une obligation munie de coupons

```
Sub prixobgcoup()
Sheet4.Activate
Dim i As Integer, n As Integer
Dim ps1() As Variant
Dim ps2() As Variant
Dim ps3() As Variant
Dim ps4() As Variant
Dim ps5() As Variant
Dim calleuro() As Variant
Dim callamer() As Variant

Set zpvec2 = Range("zpvec2")
Set volvec2 = Range("volvec2")
L = Range("L")
delt = Range("delt")
n = zpvec2.Rows.Count
p = 0.5
pstar = 1 - p
iopt = 1
k = 95
ReDim ps1(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim ps2(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim ps3(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim ps4(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim ps5(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim calleuro(1 To n + 1, 1 To n + 1)
ReDim callamer(1 To n + 1, 1 To n + 1)

c = 10
For i = 1 To n - 1
ps1(i, n - 1) = c
Range("ps1").Offset(i, n - 2) = ps1(i, n - 1)
Next i

Rmat = BinZeroRateTree(zpvec2, volvec2, L, delt)
   For j = n - 2 To 1 Step -1
        For i = 1 To j
           ps1(i, j) = (p * ps1(i, j + 1) + pstar * ps1(i + 1, j +
           1)) * _
           Exp(-Rmat(i, j) * delt)
           Range("ps1").Offset(i, j - 1) = ps1(i, j)
```

TABLEAU 17 *(suite)*

```
       Next i
     Next j

For i = 1 To n
ps2(i, n) = c
Range("ps2").Offset(i, n - 1) = ps2(i, n)
Next i

   For j = n - 1 To 1 Step -1
        For i = 1 To j
           ps2(i, j) = (p * ps2(i, j + 1) + pstar * ps2(i + 1, j +
           1)) * _
           Exp(-Rmat(i, j) * delt)
           Range("ps2").Offset(i, j - 1) = ps2(i, j)
        Next i
     Next j

For i = 1 To n + 1
ps3(i, n + 1) = c + 100
Range("ps3").Offset(i, n) = ps3(i, n + 1)
Next i

   For j = n To 1 Step -1
        For i = 1 To j
           ps3(i, j) = (p * ps3(i, j + 1) + pstar * ps3(i + 1, j +
           1)) * _
           Exp(-Rmat(i, j) * delt)
           Range("ps3").Offset(i, j - 1) = ps3(i, j)
        Next i
     Next j

For j = n + 1 To 1 Step -1
For i = 1 To j
ps4(i, j) = ps1(i, j) + ps2(i, j) + ps3(i, j)
Range("ps4").Offset(i, j - 1) = ps4(i, j)
Next i
Next j

For j = n + 1 To 2 Step -1
For i = 1 To j
ps5(i, j) = ps4(i, j) - c
Range("ps5").Offset(i, j - 1) = ps5(i, j)
Next i
Next j
ps5(1, 1) = ps4(1, 1)
Range("ps5").Offset(1, 0) = ps5(1, 1)
```

TABLEAU 17 *(suite)*

```
For i = 1 To n
calleuro(i, n) = Application.Max(0, iopt * (ps5(i, n) - k))
Range("calleuro1").Offset(i, n - 1) = calleuro(i, n)
Next i
   For j = n - 1 To 1 Step -1
        For i = 1 To j
           calleuro(i, j) = (p * calleuro(i, j + 1) + pstar * _
           calleuro(i + 1, j + 1)) * Exp(-Rmat(i, j) * delt)
           Range("calleuro1").Offset(i, j - 1) = calleuro(i, j)
        Next i
     Next j
For i = 1 To n
callamer(i, n) = Application.Max(0, iopt * (ps5(i, n) - k))
Range("callamer1").Offset(i, n - 1) = callamer(i, n)
Next i
   For j = n - 1 To 1 Step -1
        For i = 1 To j
           callamer(i, j) = (p * callamer(i, j + 1) + pstar * _
           callamer(i + 1, j + 1)) * Exp(-Rmat(i, j) * delt)
     callamer(i, j) = Application.Max(callamer(i, j), iopt *
     (ps5(i, j) - k))
           Range("callamer1").Offset(i, j - 1) = callamer(i, j)
        Next i
     Next j
For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
Range("rmat1").Offset(i, j) = Rmat(i, j)
Next i
Next j
End Sub
```

Puis on calcule l'arbre binomial de taux d'intérêt en invoquant la fonction *BinZeroRateTree*, taux qui servent par la suite à actualiser le premier coupon, toujours selon la méthode décrite précédemment.

```
Rmat = BinZeroRateTree(zpvec2, volvec2, L, delt)
For j = n - 2 To 1 Step -1
```

```
                    For i = 1 To j
ps1(i, j) = (p * ps1(i, j + 1) + pstar * ps1(i + 1, j + 1)) * _
                    Exp(-Rmat(i, j) * delt)

          Range("ps1").Offset(i, j - 1) = ps1(i, j)
                    Next i
                    Next j
```

Le résultat de ce premier calcul est l'arbre suivant du premier coupon.

	H	I	J
3	**Actualisation premier coupon**		
4			
5	9.048374	10	
6		10	

On procède de la sorte pour les deux autres coupons ainsi que pour la valeur nominale. On obtient les arbres suivants.

	H	I	J
12	**Actualisation second coupon**		
13			
14	8.025188	8.668995	10
15		9.069414	10
16			10

	H	I	J	K	L
19	**Actualisation troisième coupon + valeur nominale**				
20					
21					
22	76.7444	80.7806	90.42372	110	
23		88.85075	95.94298	110	
24			99.99195	110	
25				110	

On somme ensuite les trois arbres de façon à obtenir la valeur de l'obligation à trois ans.

```
For j = n + 1 To 1 Step -1

        For i = 1 To j
ps4(i, j) = ps1(i, j) + ps2(i, j) + ps3(i, j)
  Range("ps4").Offset(i, j - 1) = ps4(i, j)
                Next i
                Next j
```

L'arbre qui en résulte apparaît au tableau 18.

TABLEAU 18

	H	I	J	K
27	**Somme des trois arbres**			
28				
29	93.81796	99.44959	100.4237	110
30		107.9202	105.943	110
31			109.992	110
32				110

Il faut alors soustraire l'intérêt couru de 10 $ à tous les nœuds, sauf le premier.

```
For j = n + 1 To 2 Step -1
      For i = 1 To j
 ps5(i, j) = ps4(i, j) - c
Range("ps5").Offset(i, j - 1) = ps5(i, j)
                Next i
                Next j

    ps5(1, 1) = ps4(1, 1)
Range("ps5").Offset(1, 0) = ps5(1, 1)
```

ce qui nous donne l'arbre final des cash-flows de l'obligation.

	H	I	J	K
34	**Retrait de l'intérêt couru**			
35				
36				
37	93.81796	89.44959	90.42372	100
38		97.92016	95.94298	100
39			99.99195	100
40				100

Le calcul des prix des calls européen et américain écrits sur cette obligation s'effectuent exactement comme dans la section précédente. Les arbres de ces deux catégories de calls pour un prix d'exercice de 95 $ se retrouvent au tableau 19.

TABLEAU 19

	H	I	J
43	**Call euro. 2 ans (K = 95$)**		
44			
45	1.402523	0.408736	0
46		2.691319	0.942984
47			4.99195

	H	I	J
49	**Call amér. 2 ans (K = 95$)**		
50			
51			
52	1.506057	0.408736	0
53		2.920164	0.942984
54			4.99195

Comme on peut le constater, le prix du call américain, à hauteur de 1,50 $, est plus élevé que celui du call européen correspondant, soit 1,40 $. Cela est normal puisque l'obligation sous-jacente verse des cash-flows intermédiaires, des coupons, en plus de sa valeur nominale. On rappelle qu'il n'est jamais avantageux d'exercer un call écrit

sur un sous-jacent qui ne comporte pas de revenus intermédiaires. Mais ici, comme le sous-jacent verse de tels cash-flows, à chaque fois que ces cash-flows sont versés, la valeur du sous-jacent diminue d'autant, ce qui se traduit par une diminution de la valeur du call. Le détenteur doit alors déterminer s'il doit exercer ou non à chaque fois qu'un coupon est versé[20].

On constate au tableau 19 que le call américain comporte un cash-flow plus important que son homologue européen à l'état 1 de la période 2 : 2,92 $ contre 2,69 $. En effet, à ce nœud, la valeur intrinsèque du call est plus élevée que le cash-flow actualisé. Il y a donc lieu d'exercer, ce qui ne peut se faire que dans le cas du call américain. C'est pourquoi le call américain vaut davantage que son homologue européen. L'option d'exercer a donc une valeur positive pour un call écrit sur un sous-jacent qui verse des cash-flows intermédiaires.

3. Options sur taux d'intérêt : cap, floor et swap

Pour construire les programmes de telles options sur taux d'intérêt, nous mettons à contribution le modèle de Ho et Lee (1986). Ce modèle met de l'avant la notion de titre pur[21]. Par définition, un titre pur verse un dollar si un état particulier de la nature se réalise et zéro autrement. Dans le contexte de l'arbre binomial, les états possibles sont représentés par les divers nœuds. Pour montrer comment on évalue les titres purs, recourons à l'arbre binomial des taux d'intérêt du tableau 20, où la période est l'année.

20. Pour plus de détails à ce sujet, voir : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001a), *Arbres binomiaux additifs et multiplicatifs pour évaluer les options américaines classiques sur actions portant dividende*, CRG, novembre ; Racicot, F.-É. et R. Théoret (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec

21. *State price*, en anglais.

TABLEAU 20

	A	B	C	D
2	**Structure des taux continus**			
3				
4		10.00%	14.28%	19.60%
5			9.77%	13.67%
6				9.54%

TABLEAU 21

	A	B	C	D
10	**Facteurs d'actualisation périodiques**			
11				
12		0.9048	0.8669	0.8220
13			0.9069	0.8722
14				0.9090

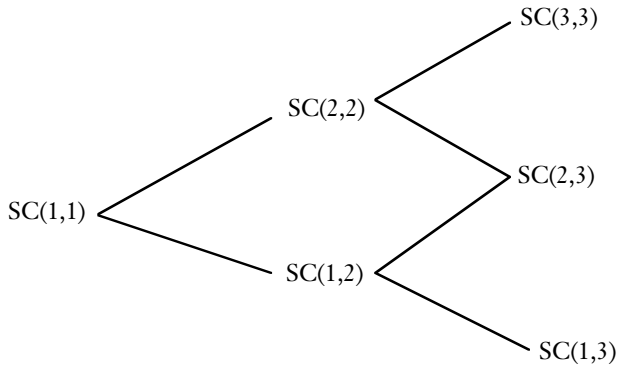
Pour établir les prix des titres purs à chaque nœud de l'arbre, nous devons d'abord calculer les facteurs d'actualisation à chaque nœud, qui sont en fait les prix d'obligations à coupon 0 d'une période, ici d'un an, dont les taux de rendement respectifs sont ceux associés aux nœuds et dont la valeur nominale est de 1 $. Comme les taux qui constituent le tableau 20 sont calculés sur une base continue, on se sert de la formule e^{-r_c} pour calculer les facteurs d'actualisation, r_c étant le taux continu du nœud considéré. Le tableau 21 fournit les facteurs d'actualisation périodiques associés à l'arbre du tableau 20.

Par exemple, le facteur d'actualisation qui apparaît dans la cellule C12 du tableau 21 se calcule comme suit :

$$e^{-0,1428} = 0,8669 \qquad (12)$$

On peut alors calculer les prix des titres purs. À chaque période, nous comptabilisons les états de la nature à partir de 1, soit celui situé au nœud extrême inférieur de l'arbre. Par exemple, la cellule B12 représente l'état 1 de la période 1 ; la cellule C12, l'état 2 de la

FIGURE 2 **Arbre des prix des titres purs : deux périodes**



période 2, et ainsi de suite[22]. Le couplet (i,j) désigne l'état i de la période j. Un titre pur sera désigné par SC(i,j) et un facteur d'actualisation, par p(i,j). L'arbre symbolique des titres purs pour deux périodes est tracé à la figure 2.

Calculons d'abord SC(1,1), le prix du titre pur de l'état 1 de la période 1, soit la période courante. L'état 1 étant unique et certain, SC(1,1) = 1 $[23]. Déplaçons-nous maintenant vers la période 2. Nous avons alors deux titres purs : SC(1,2) et SC(2,2). SC(1,2) est égal à :

$$SC(1,2) = 0,5 \times 1\$ \times 0,9048 = 0,4524\$ \qquad (13)$$

En effet, qu'est-ce qu'un investisseur est prêt à payer pour un dollar reçu dans l'état 1 de la période 2 ? Si ce dollar était certain, il serait prêt à payer sa valeur actualisée, soit (1 $ × 0,9048). Mais

22. Nous calculons les périodes et les états de la sorte, car nous nous positionnons en base 1 (*Option Base 1* apparaissant au tout début d'un programme Visual Basic) pour construire nos programmes. Nous pourrions également nous positionner en base 0. Tous les compteurs débuteraient alors à 0, par défaut.

23. C'est pourquoi l'on enclenche le calcul des prix des titres purs au début de l'arbre et non à la fin, puisque le prix du titre pur de la période courante est connu.

comme le versement de ce dollar ne comporte qu'une probabilité de 0,5, il n'est prêt qu'à payer sa valeur actualisée espérée, soit la formule (13). Le prix de SC(2,2) est par ailleurs le même que SC(1,2).

Allons maintenant à la période 3 qui comporte trois états, donc trois titres purs à évaluer : SC(1,3), SC(2,3) et SC(3,3). Nous devons ici distinguer les deux nœuds extrêmes SC(1,3) et SC(3,3) du nœud intermédiaire SC(2,3), ce dernier étant au confluent de deux nœuds antérieurs. Calculons d'abord la valeur des titres purs aux deux nœuds extrêmes. En appliquant la même procédure que celle utilisée lors de la période précédente, on a :

$$SC(1,3) = 0,5 \times 0,9069 \times 0,4524 = 0,2052\,\$ \qquad (14)$$

$$SC(2,3) = 0,5 \times 0,8669 \times 0,4524 = 0,1961 \qquad (15)$$

Par ailleurs SC(2,3) est relié à deux nœuds antérieurs. Sa valeur est donc égale à :

$$(0,5 \times p(1,2) \times SC(1,2)) + (0,5 \times p(2,2) \times SC(2,2)) = 0,4013 \qquad (16)$$

Par conséquent, lors du calcul des prix des titres purs dans le programme Visual Basic, il faudra distinguer les nœuds extrêmes des nœuds intermédiaires. Pour le nœud extrême inférieur d'une période donnée (i = 1), la formule générale du prix d'un titre pur sera :

$$SC(i,\ j) = 0,5 \times p(i,\ j-1) \times SC(i,\ j-1) \qquad (17)$$

Pour sa part, la formule du nœud extrême supérieur d'une période est de :

$$SC(i,\ j) = 0,5 \times p(i-1,\ j-1) \times SC(i-1,\ j-1) \qquad (18)$$

Finalement, la formule des nœuds intermédiaires est la suivante :

$$\begin{aligned} SC(i,\ j) = {} & (0,5 \times p(i,\ j-1) \times SC(i,\ j-1)) \\ & + (0,5 \times p(i-1,\ j-1) \times SC(i-1,\ j-1)) \end{aligned} \qquad (19)$$

3.1. Cap et floor

Une fois les prix des titres purs calculés, il est facile de déterminer le prix d'un cap (ou d'un floor) associé à une structure à terme donnée de taux d'intérêt et de volatilités correspondantes[24]. Pour tout nœud (i,j) de l'arbre des taux d'intérêt, la valeur d'un cap sera :

$$\text{cap} = p(i,j) \times SC(i,j) \times MAX(0,\ r_{eff}(i,j) - r_{cap}) \qquad (20)$$

D'abord, deux détails institutionnels. Comme la valeur d'un cap est encaissée avec un retard d'une période, il faut ajouter p(i,j), soit le facteur d'actualisation associé au nœud (i,j), dans la formule du prix du cap. Ensuite, le taux d'exercice du cap (r_{cap}) est calculé sur une base effective et non continue. Comme les taux de l'arbre binomial sont calculés sur une base continue, il faut les convertir en taux effectifs avant de les introduire dans la fonction *MAX*. Pour ce faire, on recourt à la formule de conversion suivante :

$$r_{eff} = e^{r_c} - 1 \qquad (21)$$

où r_c est un taux continu et r_{eff}, le taux effectif correspondant. Finalement, pour déterminer le prix du cap, on somme sa valeur à tous les nœuds.

Par ailleurs, pour calculer le prix d'un floor, il suffit de multiplier l'écart de taux d'intérêt dans la fonction *MAX* par une variable, disons iopt, qui prend la valeur (+1) si c'est un cap et (–1) si c'est un floor. Le programme de la détermination du prix du cap (ou du floor) apparaît au tableau 22.

---

24. Certes, les titres purs peuvent également servir à calculer les prix d'options classiques, comme les calls et les puts sur obligations. À titre d'exemple, la valeur d'un call européen peut être calculée directement à partir des cash-flows à l'échéance de l'arbre du call, pondérés par leurs titres purs respectifs, ceux-ci étant en effet équivalents à des probabilités escomptées. En vertu de cette approche, le prix d'un call européen est égal à : $C(0,0) = \sum_i SC(i,T)MAX(0, P_s(i,T) - K)$ où C(0,0) représente le prix du call européen au moment de son émission ; SC(i,T), le prix du titre pur au nœud i de la période T de l'arbre, soit la date d'échéance du call, et $P_s(i,T)$, le prix de l'obligation correspondant. Pour plus de détails sur cette approche, voir : Clewlow et Strickland (1998), p. 246-248.

TABLEAU 22 Programme Visual Basic du prix d'un cap (ou d'un floor)

```
Sub cap()



Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim p() As Variant
Dim SC() As Variant
Dim rmatef() As Variant
Dim sum_cap As Variant


Set zpvec = Range("zpvec")
Set volvec = Range("volvec")
L = Range("L")
delt = Range("delt")
k = 0.12
iopt = 1


n = zpvec.Rows.Count
ReDim p(1 To n, 1 To n)
ReDim SC(1 To n, 1 To n)
ReDim rmatef(1 To n, 1 To n)

Rmat = BinZeroRateTree(zpvec, volvec, L, delt)

For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
Range("rmat1").Offset(i, j) = Rmat(i, j)
Next i
Next j


For j = 1 To n
For i = 1 To j
p(i, j) = Exp(-Rmat(i, j))
Range("pij").Offset(i, j) = p(i, j)
Next i
Next j


SC(1, 1) = 1
Range("SC1").Offset(1, 1) = SC(1, 1)

For j = 2 To n
```

TABLEAU 22 *(suite)*

```
For i = 1 To j

If i = 1 Then
SC(i, j) = 0.5 * p(i, j - 1) * SC(i, j - 1)
Range("SC1").Offset(i, j) = SC(i, j)

ElseIf i = j Then
SC(i, j) = 0.5 * p(i - 1, j - 1) * SC(i - 1, j - 1)
Range("SC1").Offset(i, j) = SC(i, j)

Else


SC(i, j) = 0.5 * p(i, j - 1) * SC(i, j - 1) + _
0.5 * p(i - 1, j - 1) * SC(i - 1, j - 1)
Range("SC1").Offset(i, j) = SC(i, j)

End If

Next i

Next j


For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
rmatef(i, j) = Exp(Rmat(i, j)) - 1
Range("Rmatef").Offset(i, j) = rmatef(i, j)
Next i
Next j

sum_cap = 0

For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
sum_cap = sum_cap + p(i, j) * SC(i, j) * Application.Max(0, iopt *
(rmatef(i, j) - k))
Next i
Next j

sum_cap = sum_cap - p(1, 1) * SC(1, 1) * Application.Max(0, iopt *
(rmatef(1, 1) - k))

Range("cap") = sum_cap


End Sub
```

Comme à l'accoutumée, le programme lit l'input, définit les variables ou vecteurs qui serviront à stocker les résultats et calcule l'arbre des taux d'intérêt continus à l'aide de la méthode de Black, Derman et Toy, c'est-à-dire par le canal de la fonction *BinZeroRateTree*.

```
Rmat = BinZeroRateTree(zpvec, volvec, L, delt)
```

Puis l'on calcule l'arbre des facteurs d'actualisation périodiques, les p(i,j), essentiels à la fixation des prix des titres purs.

```
                For j = 1 To n
                For i = 1 To j
        p(i, j) = Exp(-Rmat(i, j))
Range("pij").Offset(i, j) = p(i, j)
                  Next i
                  Next j
```

Comme nous l'avons relaté auparavant, il faut distinguer, pour une période donnée, trois cas[25] pour calculer les prix des titres purs : le nœud extrême inférieur, le nœud extrême supérieur et les nœuds intermédiaires. Pour traduire ces trois choix en langage Visual Basic, nous faisons appel à des *If* imbriqués (*nested*). La structure générale de la commande est la suivante :

```
If... Then
   ...
ElseIf... Then
   ...
  Else
   ...
End If
```

Pour calculer les prix des titres purs, nous avons introduit dans le programme les commandes suivantes qui parlent d'elles-mêmes étant donné les remarques que nous avons émises antérieurement à leur sujet.

```
SC(1, 1) = 1
Range("SC1").Offset(1, 1) = SC(1, 1)

For j = 2 To n

For i = 1 To j
```

25. En excluant bien sûr SC(1,1) qui est égal à 1.

```
                    If i = 1 Then
        SC(i, j) = 0.5 * p(i, j - 1) * SC(i, j - 1)
            Range("SC1").Offset(i, j) = SC(i, j)
                  ElseIf i = j Then
    SC(i, j) = 0.5 * p(i - 1, j - 1) * SC(i - 1, j - 1)
            Range("SC1").Offset(i, j) = SC(i, j)
                    Else
      SC(i, j) = 0.5 * p(i, j - 1) * SC(i, j - 1) + _
          0.5 * p(i - 1, j - 1) * SC(i - 1, j - 1)
            Range("SC1").Offset(i, j) = SC(i, j)
                    End If
                    Next i
                    Next j
```

Nous calculons par la suite l'arbre binomial des taux d'intérêt effectifs, qui n'est qu'une simple transposition de celui des taux d'intérêt continus. Comme nous l'avons expliqué auparavant, nous devons calculer à chaque nœud de l'arbre l'écart entre le taux d'intérêt dudit nœud et le taux d'exercice du cap, qui est exprimé sur une base effective. Une conversion des taux continus en taux effectifs s'impose donc pour calculer cet écart de taux d'intérêt.

```
                For j = n To 1 Step -1
                    For i = 1 To j
            rmatef(i, j) = Exp(Rmat(i, j)) - 1
        Range("Rmatef").Offset(i, j) = rmatef(i, j)
                    Next i
                    Next j
```

Finalement, nous calculons le prix du cap en utilisant la formule (20). Nous définissons d'abord un compteur, fixé initialement à zéro, qui nous servira à accumuler les cash-flows du cap aux nœuds où le cap est en jeu. Puis nous procédons en recherchant les nœuds où la valeur des cash-flows du cap est positive et en cumulant ces valeurs.

```
                    sum_cap = 0

                For j = n To 1 Step -1
                    For i = 1 To j
```

```
sum_cap = sum_cap + p(i, j) * SC(i, j) * Application.Max(0,
                iopt * (rmatef(i, j) – k))
                          Next i
                          Next j
```

La valeur finale de sum_cap représente le prix du cap. Nous devons cependant éliminer la valeur du cap au premier nœud, au cas où le cap y serait en jeu. L'émission d'un cap ne saurait en effet concerner la période actuelle puisque le taux au comptant est alors connu. Certes, on aurait pu éliminer ce cash-flow, si tant est qu'il soit positif, en fixant la borne inférieure de j à 2, c'est-à-dire en écrivant dans le programme :

```
For j = n to 2 Step -1
```

Sous les hypothèses de travail du programme, la valeur du cap est de 3,7988 % par dollar de principal notionnel. En fixant iopt à (–1) dans le programme, on obtient la valeur du floor correspondant, soit 1,0850 %.

3.2. Swap

Un swap est un contrat qui vise à échanger des cash-flows dans le futur selon une formule prédéterminée. Dans le cas qui nous intéresse, il s'agit d'un échange de cash-flows (intérêts) reliés à une dette à taux fixe contre des cash-flows associés à une dette à taux variable (flottant).

En effet, supposons qu'un emprunteur ait contracté une dette à taux variable qu'il veut échanger contre une dette à taux fixe. Il peut en effet avoir un avantage comparatif sur le marché des fonds à taux variables en regard de ceux à taux fixes[26]. Ou encore, il peut anticiper une forte hausse des taux d'intérêt et vouloir geler ses conditions

26. C'est habituellement le cas pour un emprunteur qui présente une cote de crédit inférieure, les écarts de rendements entre les risques supérieurs et les risques inférieurs ayant tendance à s'élargir à un rythme croissant au fur et à mesure que les cotes de crédit s'abaissent. Un emprunteur qui dispose d'une cote de crédit élevée a donc un avantage comparatif dans le compartiment des emprunts à taux fixe et celui qui dispose d'une cote de crédit faible, un avantage comparatif dans le compartiment des emprunts à taux flottant.

d'emprunt aux taux actuels. Pour ce faire, il contacte un intervenant qui est dans la situation opposée : il a contracté une dette à taux fixe et veut la convertir en une dette à taux variable.

L'entente est alors la suivante. La partie qui dispose d'une dette à taux variable paiera l'intérêt fixe sur la dette de sa contrepartie et recevra de celle-ci l'intérêt variable qui s'applique à sa propre dette. La contrepartie effectuera les opérations inverses. L'entente ne vise pas la valeur nominale de la dette, qui n'est pas échangée. Les parties s'entendent sur un principal dit notionnel, qui servira de base au calcul des cash-flows d'intérêt échangés, qui seuls font partie de la transaction[27].

Pour la partie qui paie le taux d'intérêt fixe, un swap est l'équivalent d'une position en compte (*long*) dans un cap et d'une position à découvert (*short*) dans un floor, le taux d'intérêt fixe du swap faisant office de taux d'exercice. Le taux d'intérêt est alors bloqué au taux fixe du swap pour la partie à taux fixe. Lorsque les taux d'intérêt augmentent au-delà du taux d'intérêt d'exercice du swap, la partie à taux fixe reçoit une compensation de la partie à taux variable de telle sorte que le taux payé par la partie à taux fixe se rétablisse au taux d'exercice. *La partie à taux fixe a donc une position en compte dans le cap.* Si par ailleurs les taux diminuent en deçà du taux d'intérêt d'exercice du swap, la partie à taux fixe devra compenser la partie à taux variable de telle sorte que le taux d'intérêt que paie la partie à taux fixe soit relevé au taux d'exercice. *La partie à taux fixe dispose donc d'une position à découvert dans un floor dont le taux d'exercice est le taux fixe du swap*[28].

27. Pour les détails institutionnels concernant le marché des swaps, on consultera : Brown, K.C. et Smith, D.J., *Interest Rate and Currency Swaps : A Tutorial*, The Research Foundation of the Institute of Chartered Financial Analysts, 1995. Voir aussi : Théoret et Racicot (2000), *Traité de gestion de portefeuille*, *op. cit.*, chap. 9.

28. Le lecteur en conclura facilement qu'un swap est l'équivalent d'un contrat *forward* qui plafonne le taux d'intérêt à un certain niveau (*forward rate agreement* ou *FRA).* En se couvrant avec un swap, la partie à taux fixe gèle le taux d'intérêt qu'elle paie au taux d'exercice. Elle ne peut plus jouir d'une baisse de taux d'intérêt, comme cela serait dans le cas d'une option, ici un cap. La position à découvert dans un floor qui est la sienne obstrue toute baisse de taux d'intérêt en deçà du taux d'exercice.

Le taux fixe du swap, qui fait office de taux d'exercice, est fixé initialement à un niveau tel que la valeur du swap soit nulle. C'est-à-dire, pour la partie à taux fixe :

$$\text{Swap} = \text{cap} - \text{floor} = 0 \tag{22}$$

Nous voulons déterminer ce taux d'exercice dans le cas du problème précédent. Pour ce faire, nous recourons à l'algorithme de Newton pour calculer le taux d'exercice qui annule la fonction *swap*[29]. Le programme dont nous nous servons pour calculer le taux fixe du swap se retrouve au tableau 23.

TABLEAU 23 **Programme Visual Basic pour déterminer le taux d'exercice d'un swap de taux d'intérêt**

```
Sub swap()
Sheet2.Activate
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim p() As Variant
Dim SC() As Variant
Dim rmatef() As Variant
Dim sum_cap As Variant
Dim swap As Variant
Dim swap1 As Variant
Dim fdashswap As Variant
Dim k As Variant

Set zpvec = Range("zpvec")
Set volvec = Range("volvec")
L = Range("L")
delt = Range("delt")
k = 0.12
radj1 = 0.001
atol1 = 0.01
```

29. Pour un rappel des algorithmes d'optimisation et de leur utilisation, on consultera : Racicot F.-É. et R. Théoret (2001b), *Le calcul numérique en ingénierie financière. Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation et étude d'un cas : l'algorithme de Newton comme solution à l'arbre binomial de Black, Derman et Toy*, CRG, 28-2001.

TABLEAU 23 *(suite)*

```
n = zpvec.Rows.Count
ReDim p(1 To n, 1 To n)
ReDim SC(1 To n, 1 To n)
ReDim rmatef(1 To n, 1 To n)

Rmat = BinZeroRateTree(zpvec, volvec, L, delt)

For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
Range("rmat2").Offset(i, j) = Rmat(i, j)
Next i
Next j

For j = 1 To n
For i = 1 To j
p(i, j) = Exp(-Rmat(i, j))
Range("pij2").Offset(i, j) = p(i, j)
Next i
Next j

SC(1, 1) = 1
Range("SC2").Offset(1, 1) = SC(1, 1)

For j = 2 To n

For i = 1 To j

If i = 1 Then
SC(i, j) = 0.5 * p(i, j - 1) * SC(i, j - 1)
Range("SC2").Offset(i, j) = SC(i, j)

ElseIf i = j Then
SC(i, j) = 0.5 * p(i - 1, j - 1) * SC(i - 1, j - 1)
Range("SC2").Offset(i, j) = SC(i, j)

Else

SC(i, j) = 0.5 * p(i, j - 1) * SC(i, j - 1) + _
0.5 * p(i - 1, j - 1) * SC(i - 1, j - 1)
Range("SC2").Offset(i, j) = SC(i, j)

End If

Next i

Next j

For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
rmatef(i, j) = Exp(Rmat(i, j)) - 1
Range("Rmatef2").Offset(i, j) = rmatef(i, j)
Next i
Next j

Do
```

TABLEAU 23 *(suite)*

```
sum_cap = 0
sum_floor = 0

For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
sum_cap = sum_cap + p(i, j) * SC(i, j) * Application.Max(0,
rmatef(i, j) - k)
sum_floor = sum_floor + p(i, j) * SC(i, j) * Application.Max(0, k -
rmatef(i, j))

Next i
Next j

sum_cap = sum_cap - p(1, 1) * SC(1, 1) * Application.Max(0,
rmatef(1, 1) - k)
sum_floor = sum_floor - p(1, 1) * SC(1, 1) * Application.Max(0, k -
rmatef(1, 1))

swap = sum_cap - sum_floor

k1 = k + radj1

sum_cap1 = 0
sum_floor1 = 0

For j = n To 1 Step -1
For i = 1 To j
sum_cap1 = sum_cap1 + p(i, j) * SC(i, j) * Application.Max(0,
rmatef(i, j) - k1)
sum_floor1 = sum_floor1 + p(i, j) * SC(i, j) * Application.Max(0,
k1 - rmatef(i, j))

Next i
Next j

sum_cap1 = sum_cap1 - p(1, 1) * SC(1, 1) * Application.Max(0,
rmatef(1, 1) - k1)
sum_floor1 = sum_floor1 - p(1, 1) * SC(1, 1) * Application.Max(0,
k1 - rmatef(1, 1))

swap1 = sum_cap1 - sum_floor1

fdashswap = (swap1 - swap) / radj1

k = k - (swap / fdashswap)

Loop While Abs(swap) > atol1

Range("tex") = k

Range("cap2") = sum_cap
Range("floor2") = sum_floor
Range("swap2") = swap

End Sub
```

Lors de la déclaration des variables, nous fixons une valeur à la variable *radj1* qui sert à calculer l'approximation numérique de la dérivée première de la fonction à annuler, ici la fonction swap. De la même façon, nous fixons une valeur au seuil de tolérance de l'algorithme, nommé atol, en deçà duquel l'approximation de la fonction est jugée satisfaisante.

De manière à mettre en branle l'algorithme de Newton, nous nous servons de la grande boucle suivante :

```
Do
...
Loop While Abs(swap) > atol
```

Le programme reviendra au début de la boucle et refera tous les calculs tant que la valeur absolue de la fonction swap excède le seuil de tolérance, soit atol. Comme dans le programme précédent, nous calculons la valeur du cap et du floor, ce qui nous permet de calculer la valeur du swap par simple soustraction.

```
sum_cap = 0
sum_floor = 0

For j = n To 1 Step -1
    For i = 1 To j
sum_cap = sum_cap + p(i, j) * SC(i, j) * Application.Max(0,
    rmatef(i, j) - k)
    sum_floor = sum_floor + p(i, j) * SC(i, j) *
        Application.Max(0, k - rmatef(i, j))

    Next i
    Next j

sum_cap = sum_cap - p(1, 1) * SC(1, 1) * Application.Max(0,
    rmatef(1, 1) - k)
    sum_floor = sum_floor - p(1, 1) * SC(1, 1) *
        Application.Max(0, k - rmatef(1, 1))

swap = sum_cap - sum_floor
```

Nous faisons subir un petit accroissement au taux d'exercice, de l'ordre de radj1, de manière à trouver de façon numérique la dérivée première de la fonction swap, dérivée qui constitue un input de l'algorithme de Newton.

```
                k1 = k + radj1

                 sum_cap1 = 0
                sum_floor1 = 0

            For j = n To 1 Step -1
                For i = 1 To j
  sum_cap1 = sum_cap1 + p(i, j) * SC(i, j) *
     Application.Max(0, rmatef(i, j) - k1)
sum_floor1 = sum_floor1 + p(i, j) * SC(i, j) *
     Application.Max(0, k1 - rmatef(i, j))

                Next i
                Next j

  sum_cap1 = sum_cap1 - p(1, 1) * SC(1, 1) *
     Application.Max(0, rmatef(1, 1) - k1)
sum_floor1 = sum_floor1 - p(1, 1) * SC(1, 1) *
     Application.Max(0, k1 - rmatef(1, 1))

        swap1 = sum_cap1 - sum_floor1
```

On a donc recalculé la valeur du swap à la suite de la modification du taux d'exercice du cap et du floor. L'expression numérique de la dérivée de la fonction swap, fdashswap, s'écrit comme suit :

```
fdashswap = (swap1 - swap) / radj1
```

laquelle entre directement dans l'équation de Newton :

```
k = k - (swap / fdashswap)
```

Puis, comme il a été dit auparavant, la boucle *Do … While* tourne tant que la fonction swap dépasse le seuil de tolérance.

Sous les données du présent problème, le taux d'exercice du swap est de 13,81 %. Le prix du cap est alors de 2,16 %, lui-même évidemment identique au prix du floor.

4. LA DÉCOMPOSITION DE JAMSHIDIAN[30]

Nous avons vu antérieurement, dans le cadre du modèle de Black, Derman et Toy, comment déterminer le prix d'une option sur une obligation munie de coupons. Il suffit alors de considérer chaque

30. Pour cette section, nous nous inspirons surtout de Jackson et Staunton (2001) et de Clewlow et Strickland (1998).

cash-flow, coupon ou valeur nominale, de l'obligation sous-jacente comme autant d'obligations à coupon zéro. Il faut par la suite construire les arbres de chacun de ces cash-flows et les additionner. On obtient alors l'arbre de l'obligation avec coupons qui inclut l'intérêt couru. En soustrayant l'intérêt couru, on obtient l'arbre de l'évolution du prix de l'obligation. On peut alors recourir à la procédure de Black, Derman et Toy pour déterminer le prix de l'option.

Jamshidian[31] a proposé une autre procédure qui jouit d'une grande popularité dans le monde académique et financier. Soit un call européen d'échéance T écrit sur une obligation qui verse des coupons annuels ci et qui rembourse une valeur nominale L à son échéance. L'échéance de l'obligation est de s années (s > T). Jamshidian a démontré qu'un call sur une obligation avec coupons peut être décomposé en une série de calls sur des obligations à coupon zéro, celles-ci étant constituées des cash-flows résiduels de l'obligation une fois l'option échue. Ainsi, le call sur une obligation avec coupons confère autant d'options sur les cash-flows de l'obligation une fois l'option échue. Le prix d'un call (c_{obg}) sur une obligation avec coupons est donc égal à :

$$c_{obg}(t, T) = \sum_{i=T+1}^{s} cf_i c(t, T, s_i, K_i) \qquad (23)$$

Dans cette expression, t représente la date à laquelle est évalué le call, habituellement fixée à 0 ; T est la durée de l'option ; cf_i représente les cash-flows résiduels de l'obligation, s_i étant la date de paiement de ces cash-flows. Par ailleurs, c_i représente un call sur cf_i, le prix d'exercice étant K_i. Le call sur l'obligation avec coupons est donc la somme pondérée des calls sur chacun des cash-flows de l'obligation qui seront versés après la date d'échéance de l'option.

---

31. À cet effet, voir : Jamshidian, F. (1989), « An Exact Bond Option Formula », *The Journal of Finance*, vol. 44, mars, p. 205-209 ; Jamshidian, F. (1991a), « Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models », *Journal of Fixed Income*, vol. 1, p. 62-74 ; Jamshidian, F. (1991b), « Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model », *Research in Finance*, vol. 9, p. 131-170. Dans cette section, nous faisons également appel aux références suivantes : Hull, J. et A. White (1990), « Pricing Interest-rate-derivative Securities », *The Review of Financial Studies*, vol. 3, n° 4, p. 573-592 ; Musiela, M. et M. Rutkowski (1998), *Martingale Methods in Financial Modelling*, New York, Springer-Verlag.

Reste à déterminer le prix d'exercice de chacune de ces options dont le call sur l'obligation avec coupons est la somme pondérée. Selon Jamshidian, il faut trouver un taux d'intérêt r* tel que l'égalité suivante est réalisée :

$$\sum_{i=T+1}^{s} cf_i P\left(r^*, T, s_i\right) = K \tag{24}$$

Dans cette équation, P(.) est le facteur d'actualisation des cash-flows cf_i. Il est calculé à partir de l'équation du prix de l'obligation à coupon zéro dont la valeur nominale est de 1. Son expression dépend du modèle utilisé pour calculer le prix du call. Il faut donc actualiser chaque cash-flow cf_i de s_i à T au taux d'intérêt qui réalise l'égalité entre la somme des cash-flows actualisés de l'obligation, cash-flows qui sont versés après la date d'échéance T, et le prix d'exercice du call sur l'obligation avec coupons. On peut alors écrire :

$$K_i = cf_i P\left(r^*, T, s_i\right) \tag{25}$$

K_i est le prix d'exercice du call sur le cash-flow cf_i. Certes, la somme des K_i est égale au prix d'exercice du call sur l'obligation munie de coupons :

$$\sum_{i=T+1}^{n} K_i = K \tag{26}$$

C'est là l'essentiel de la décomposition de Jamshidian. Reprenons cette décomposition en portant cette fois-ci une attention particulière à ses aspects mathématiques. Soit un portefeuille constitué d'obligations à coupon zéro dont chacune a une valeur cf_i et une échéance s_i, i variant de 1 à n. On veut évaluer un call européen sur ce portefeuille d'obligations dont le prix d'exercice est de K et l'échéance, de T ($s_i > T$). Le prix C d'un tel call est de :

$$C = P\left(r, t, T\right) E\left[\max\left(0, \tilde{P}_a - K\right)\right] \tag{27}$$

E étant l'opérateur de l'espérance et $\tilde{P}_a = \sum_{i=1}^{n} cf_i P\left(r, T, s_i\right)$.

On peut alors effectuer la décomposition suivante, appelée décomposition de Jamshidian :

$$\max\left[0, \sum_{i=1}^{n} cf_i P(r, T, s_i) - K\right] = \sum_{i=1}^{n} cf_i \max\left[0, P(r, T, s_i) - K_i\right] \qquad (28)$$

On peut montrer que cette décomposition découle de ce que tous les P(.) sont des fonctions décroissantes de r. Si $r < r^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} cf_i P(r, T, s_i) > K \quad \text{et} \quad P(r, T, s_i) > K_i \qquad (29)$$

Le call sera donc exercé à l'échéance si $r(T) < r^*$. L'inverse de la relation (29) tient quand $r > r^*$. La décomposition est donc réussie car K_i joue le même rôle dans le portefeuille de calls que K dans le portefeuille d'obligations à coupon zéro.

L'équation (27) peut donc être réécrite comme suit :

$$C = \sum_{i=1}^{n} cf_i c(r, t, T, s_i, K_i) \qquad (30)$$

Un call sur un portefeuille d'obligations à coupon zéro équivaut donc à un portefeuille de calls sur chacune de ces obligations à coupon zéro. Selon Hull et White (1990), chacun de ces calls peut être considéré comme une option d'échanger K_i unités d'une obligation à coupon zéro qui échoit au temps T contre une unité d'une obligation à coupon zéro qui échoit au temps s_i.

Nous voulons maintenant montrer comment on peut traduire cette décomposition en langage Visual Basic. Pour ce faire, il faut sélectionner un modèle stochastique de détermination des taux d'intérêt. Nous utilisons ici le modèle monofactoriel de Vasicek[32]. Dans ce modèle, le taux d'intérêt à court terme obéit à un mouvement stochastique de retour vers un niveau moyen (*mean-reverting process*). L'équation différentielle du taux d'intérêt à court terme (r) s'écrit comme suit :

$$dr = a(b - r) + \sigma_r dz \qquad (31)$$

32. Vasicek, O.A. (1977), « An Equilibrium Characterisation of the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, vol. 5, p. 177-188.

Dans cette équation, b représente le niveau moyen à long terme du taux d'intérêt et a, la vitesse d'ajustement vers ce niveau moyen. σ_r est la volatilité du taux d'intérêt à court terme et dz est le mouvement brownien habituel dont l'équation est la suivante :

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{32}$$

où $\varepsilon \sim N(0,1)$. L'espérance de dz est nulle :

$$E(dz) = E\left(\varepsilon\sqrt{dt}\right) = \sqrt{dt}E(\varepsilon) = 0 \tag{33}$$

alors que sa variance est de dt :

$$V(dz) = E(dz^2) = E(\varepsilon^2 dt) = dtE(\varepsilon^2) = dt \tag{34}$$

puisque ε obéit à une distribution normale standard. Vasicek (1977) a démontré que son équation de taux d'intérêt donne lieu à une forme analytique pour le prix d'une obligation à coupon zéro qui verse un dollar à sa date d'échéance s, c'est-à-dire[33] :

$$P(t,s) = A(t,s)e^{\left[-B(t,s)r(t)\right]} \tag{35}$$

---

33. À remarquer que le prix du risque que l'on peut définir comme suit : $\lambda = \dfrac{\mu - r}{\sigma_P}$, où μ est le *drift* de l'équation différentielle du prix de l'obligation, n'apparaît pas dans les expressions analytiques des prix de l'obligation et du call du modèle modifié de Vasicek retenu par Jackson et Staunton (2001) et que nous reproduisons dans le texte pour les fins de l'écriture des programmes Visual Basic. Le prix du risque est le rendement excédentaire du prix de l'obligation dégonflé par l'écart-type du logarithme du prix de l'obligation, soit une mesure de son risque. Lorsque l'on recourt à la technique basée sur l'arbitrage pour couvrir une obligation, on ne saurait trouver la couverture idéale que l'on obtient dans le cas de l'option, car l'option est un produit dérivé et l'obligation ne l'est pas. Le prix du risque subsiste alors dans l'équation différentielle stochastique du prix de l'obligation associée à l'absence d'arbitrage et dont la solution est la forme analytique du prix de l'obligation. Cette équation différentielle est la suivante : $\dfrac{\partial P}{\partial t} + \left[a(b - r) - \sigma_r\lambda\right]\dfrac{\partial P}{\partial r} + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$. Cette équation inclut bien le prix du risque comme argument, ce qui n'était pas le cas dans l'équation différentielle de Black et Scholes qui ne retenait que le taux sans risque comme variable de rendement. Il s'ensuit que la solution analytique du prix de l'obligation inclut également le prix du risque. La même remarque vaut pour l'expression analytique du prix du call, car elle est basée sur une équation différentielle stochastique qui a la même forme générale que celle du prix de l'obligation. Seule la borne

où :

$$B(t,s) = \frac{1 - e^{[-a(s-t)]}}{a} \tag{36}$$

$$A(t,s) = e^{\frac{[B(t,s)-(s-t)](a^2b-\sigma_r^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma_r^2 B(t,s)^2}{4a}} \tag{37}$$

On remarquera que le prix de l'obligation à coupon zéro ne dépend pas des niveaux de s et t comme tels mais plutôt de leur écart. Et comme l'obligation à coupon zéro verse 1 $ à son échéance, la fonction P(.) fait également figure de facteur d'actualisation des dollars de la période s à la période t. On recourra fréquemment à cette fonction d'actualisation pour calculer les prix d'options sur obligations dans le cadre du modèle de Vasicek.

---

change pour la solutionner. L'expression originale de la fonction A(t,s) de Vasicek est en effet de : $A(t,s) = e^{\frac{[B(t,s)-(s-t)](a\phi-\sigma_r^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma_r^2 B(t,s)^2}{4a}}$, où $\phi = ab - \lambda\sigma$. Pour obtenir l'expression (15), il faut donc poser que $\lambda = 0$. Mais, il n'est point besoin de supposer que le prix du risque est nul pour obtenir les expressions analytiques de Vasicek. Comme le soutiennent Hull et White (1990), si $\lambda(t,r)$ est le prix du risque, pour qu'il y ait absence d'arbitrage selon le théorème de Girsanov, il faut que : $E\left[e^{1/2\int_0^T \lambda^2 ds}\right] < \infty$. Après certaines manipulations, on peut alors faire disparaître le prix du risque des expressions analytiques du modèle de Vasicek, qui deviennent plus complexes toutefois. Selon Musiela et Rutkowski (1998, p. 287), le rendement instantané d'une obligation diffère normalement du taux sans risque r. Le rendement additionnel est justement la prime de risque. Mais comme l'analyse se base strictement sur l'absence d'arbitrage entre les titres primaires et les produits dérivés, c'est-à-dire que l'on se campe dans un contexte d'équilibre partiel, l'on est incapable d'identifier la prime de risque, qui relève d'un cadre d'équilibre général. Il est cependant possible de trouver une mesure de probabilité qui élimine le prix du risque. Toujours selon Musiela et Rutkowski (1998, p. 155), l'on est confronté au même problème lorsque l'on veut se donner un modèle stochastique de volatilité qui s'ajoute au modèle stochastique du taux d'intérêt. Pour définir l'équation différentielle du prix de l'option dans un tel contexte, il faut alors spécifier le prix du risque, qui représente alors la compensation demandée par les investisseurs pour subir le risque dû à la volatilité du prix du sous-jacent. Pour certaines spécifications de la dynamique de la volatilité stochastique et du prix du risque, une forme analytique du prix de l'option peut être trouvée. Sinon, il faut recourir aux méthodes numériques. Il est entre autres possible de modéliser la volatilité en recourant à des procédures GARCH qui, selon Taylor (1994), donnent lieu à des approximations satisfaisantes des prix de l'option. Voir à ce sujet : Duan, J.C. (1995), « The Garch Option Pricing Model », *Mathematical Finance*, vol. 5, p. 13-32 ; Taylor, S.J. (1994), « Modeling Stochastic Volatility : A Review and Comparative Study », *Mathematical Finance*, vol. 4, p. 83-204.

À partir de l'équation de P(t,s), on peut déterminer le rendement à l'échéance R(t,s) de cette obligation de façon à construire la courbe des rendements à l'échéance. Par définition, la relation entre le prix de l'obligation à coupon zéro et son rendement à l'échéance est la suivante :

$$P(t,s) = 1\$ \times e^{[R(t,s)\,(s-t)]} \tag{38}$$

Mettons R(t,s) en évidence :

$$\ln\big(P(t,s)\big) = -R(t,s) \times (s-t) \tag{39}$$

$$R(t,s) = -\frac{\ln\big(P(t,s)\big)}{s-t} \tag{40}$$

On peut démontrer que la limite du taux de rendement dans le modèle de Vasicek quand s tend vers l'infini est la suivante[34] :

$$\lim_{s\to\infty} R(t,s) = b - 0,5\left(\frac{\sigma_r}{a}\right)^2 \tag{41}$$

On note que le rendement à l'échéance, tout en se rapprochant de b[35], ne lui est pas égal à long terme sauf dans des circonstances exceptionnelles. Si σ_r est nul, alors le taux de rendement à l'échéance sera égal à b à long terme. Par ailleurs, si la vitesse d'ajustement du taux d'intérêt a est très rapide, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de l'infini, le taux de rendement à l'échéance sera également égal à b à long terme. Dans tous les autres cas, le taux de rendement n'atteindra pas b.

Fort de ces résultats, Jamshidian (1989) a dérivé l'expression analytique du prix (c) d'un call européen sur une obligation à coupon zéro dans le cadre du modèle de Vasicek :

$$c = P(0,T)\left[e^{M+0.5V}N(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{42}$$

---

34. À remarquer qu'encore une fois cette expression n'est qu'une approximation, car elle néglige le prix du risque λ. En fait R(∞) est égal à :

$$R(\infty) = b + \frac{\sigma_r\lambda}{a} - 0,5\,\frac{\sigma_r^2}{a^2}$$

35. b étant le niveau moyen à long terme du taux d'intérêt dans l'équation différentielle du taux d'intérêt de Vasicek.

où :

$$V = \sigma_P^2 \tag{43}$$

$$M = \ln\left[\frac{L \times P(0,s)}{P(0,T)}\right] - 0{,}5V \tag{44}$$

$$d_2 = \frac{M - \ln(K)}{\sqrt{V}} \tag{45}$$

$$d_1 = d_2 + \sqrt{V} \tag{46}$$

$$\sigma_p = \nu(0,T)B(T,s) \tag{47}$$

$$\nu(0,T) = \sigma_r\sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}} \tag{48}$$

$$B(T,s) = \frac{1 - e^{[-a(s-T)]}}{a} \tag{49}$$

V est défini comme la variance du logarithme du prix de l'obligation. Dans un premier temps, nous calculerons le prix d'un call européen sur une obligation à coupon zéro dans le modèle de Vasicek en recourant à l'équation (42). Puis nous nous tournerons vers le prix d'un call européen sur une obligation munie de coupons.

Call européen sur une obligation à coupon zéro

Pour déterminer le prix d'un call européen sur une obligation, qu'elle soit à coupon zéro ou munie de coupons, nous devons programmer deux fonctions : celle du facteur d'actualisation P(t,s), qui en fait donne le prix de l'obligation à coupon zéro qui verse un dollar à son échéance (équation 35), et celle du prix de l'option proprement dite sur une telle obligation (équation 42). Ces deux fonctions ne présentent aucune difficulté au plan de la programmation. Nous présentons dans un premier temps le programme Visual Basic de la fonction P(t,s) au tableau 24.

TABLEAU 24 **Fonction Visual Basic du prix de l'obligation à coupon zéro dans le modèle de Vasicek**

```
Function Vasicekzcoup(a, b, r, t, s, sigma)
difst = s - t
sig2 = sigma ^ 2
Bts = (1 - Exp(-a * difst)) / a
num1 = Bts - difst
num2 = (a ^ 2) * b - (sig2 / 2)
num3 = (num1 * num2) / a ^ 2
num4 = (sig2 * Bts ^ 2) / (4 * a)
Ats = Exp(num3 - num4)
Vasicekzcoup = Ats * Exp(-Bts * r)
End Function
```

Cette fonction comporte six arguments :

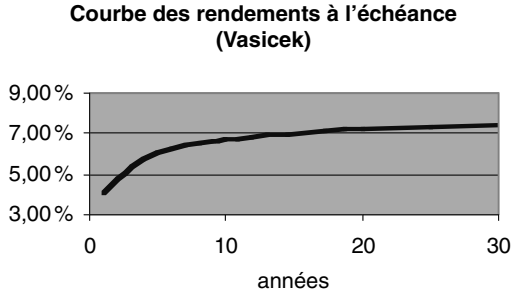
a : la vitesse d'ajustement du taux d'intérêt
b : le niveau moyen à long terme du taux d'intérêt
r : le taux d'intérêt (spot) à court terme
t : la période initiale de l'actualisation des cash-flows
s : l'échéance de l'obligation à coupon zéro
sigma : l'écart-type du taux d'intérêt

Cette fonction commande donc un certain calibrage puisqu'elle comporte trois paramètres : a, b et sigma, qui doivent être estimés de façon appropriée. La variable t prend la valeur zéro s'il s'agit du calcul du prix d'une obligation. Mais comme on l'a déjà mentionné, cette fonction sert également à l'actualisation de cash-flows. t prend alors la valeur de la période à laquelle débute l'actualisation des cash-flows. Dans le cadre de cette section, les arguments de la fonction P(.) prennent les valeurs apparaissant au tableau 25.

TABLEAU 25 **Arguments de la fonction P(t,s)**

	A	B
1		
2	a	0.5
3	b	0.08
4	r	0.03
5	t	0
6	s	10
7	sigma	0.04

FIGURE 3 **Courbe des rendements à l'échéance**



L'obligation à coupon zéro retenue a une durée (s) de 10 ans selon le tableau 25. La fonction lui donne une valeur de 0,5075 $. Son rendement, calculé à l'aide de l'équation (18), est de 6,78 %. Il apparaît instructif de représenter graphiquement, à la figure 3, la courbe des rendements à l'échéance correspondant aux données du tableau 25.

On constate à la figure 3 que le taux d'intérêt suit un processus de retour vers la moyenne, cela conformément à son équation différentielle stochastique. Le taux à très court terme est de 3 % et il s'approche progressivement de b (8 %) à mesure que la durée de l'obligation à coupon zéro augmente sans jamais l'atteindre cependant, du fait de l'équation (41).

Nous voulons, à l'aide du modèle de Vasicek, déterminer le prix d'un call européen écrit sur l'obligation à coupon zéro de 10 ans. La durée de cette option est de 4 ans et son prix d'exercice s'établit à 0,6. Le programme Visual Basic de l'équation du prix de ce call dans le modèle de Vasicek (équation 42) se lit au tableau 26.

En regard de la fonction précédente, la fonction *Vasicekoptionzero* compte trois arguments de plus :

L : la valeur nominale de l'obligation à coupon zéro
K : le prix d'exercice de l'option
Topt : la durée de l'option

Le résultat du calcul se retrouve au tableau 27.

La cellule E6 renferme la formule suivante :

```
Vasicekoptionzero(E2,E3,B2,B3,B4,B5,E4,B6,B8)
```

TABLEAU 26 **Fonction Visual Basic du calcul du prix d'un call européen sur une obligation à coupon zéro dans le modèle de Vasicek**

```
Function Vasicekoptionzero(L, K, a, b, r, t, Topt, s, sigma)
p0Topt = Vasicekzcoup(a, b, r, t, Topt, sigma)
p0s = Vasicekzcoup(a, b, r, t, s, sigma)
s1 = 1 - Exp(-2 * a * Topt)
s2 = s1 / (2 * a)
V0Topt = sigma * Sqr(s2)
difst = s - Topt
Bts = (1 - Exp(-a * difst)) / a
sigmap = V0Topt * Bts
forw = Log((L * p0s) / p0Topt)
V = sigmap ^ 2
M = forw - (0.5 * V)
d2 = (M - Log(K)) / Sqr(V)
d1 = d2 + Sqr(V)
Nd1 = Application.WorksheetFunction.NormSDist(d1)
Nd2 = Application.WorksheetFunction.NormSDist(d2)
s3 = Exp(M + 0.5 * V) * Nd1 - K * Nd2
callzero = p0Topt * s3
Vasicekoptionzero = callzero
End Function
```

TABLEAU 27 **Prix du call sur l'obligation à coupon zéro**

	A	B	C	D	E
1					
2	a	0.5		L	1
3	b	0.08		K	0.6
4	r	0.03		T	4
5	t	0			
6	s	10		**Prix du call**	**0.0345**
7					
8	sigma	0.04			

De façon à retracer les composantes de l'équation du prix de l'option, nous avons écrit la sous-routine (tableau 28) correspondant au programme de la fonction du prix de l'option.

Les détails du calcul du prix du call sont retracés au tableau 29.

TABLEAU 28 **Sous-routine Visual Basic du calcul du prix d'une option sur une obligation à coupon zéro dans le modèle de Vasicek**

```
Sub Vasicekoptionzero1()
' Les données du problème
L = 1
K = 0.6
a = 0.5
b = 0.08
r = 0.03
t = 0
Topt = 4
s = 10
sigma = 0.04
p0Topt = Vasicekzcoup(a, b, r, t, Topt, sigma)
Range("p0Topt") = p0Topt
p0s = Vasicekzcoup(a, b, r, t, s, sigma)
Range("P0s") = p0s
s1 = 1 - Exp(-2 * a * Topt)
s2 = s1 / (2 * a)
V0Topt = sigma * Sqr(s2)
Range("V0Topt") = V0Topt
difst = s - Topt
Bts = (1 - Exp(-a * difst)) / a
Range("Bts") = Bts
sigmap = V0Topt * Bts
Range("sigmap") = sigmap
forw = Log((L * p0s) / p0Topt)
V = sigmap ^ 2
Range("V") = V
M = forw - (0.5 * V)
Range("M") = M
d2 = (M - Log(K)) / Sqr(V)
Range("d2z") = d2
d1 = d2 + Sqr(V)
Range("d1z") = d1
Nd1 = Application.WorksheetFunction.NormSDist(d1)
Range("Nd1") = Nd1
Nd2 = Application.WorksheetFunction.NormSDist(d2)
Range("nd2") = Nd2
s3 = Exp(M + 0.5 * V) * Nd1 - K * Nd2
callzero = p0Topt * s3
Range("callzero") = callzero
End Sub
```

TABLEAU 29 **Détails du calcul du prix du call**

	H	I
1	**Sub**	
2	P(0,T)	0.7956
3	P(0,s)	0.5075
4	v(0,T)	0.0396
5	B(t,s)	1.9004
6	sigmap	0.0753
7	M	-0.4524
8	V	0.0057
9	d2	0.7762
10	d1	0.8515
11	Nd1	0.8028
12	Nd2	0.7812
13	**Prix du call**	**0.0345**

Call européen sur obligation munie de coupons

Rappelons qu'un call européen sur une obligation munie de coupons équivaut à une série de calls sur les cash-flows de l'obligation qui se produisent après la date d'échéance dudit call. Ces cash-flows sont considérés comme autant d'obligations à coupon zéro dont la durée est mesurée à partir de (t = 0), soit la date d'évaluation du call.

Nous avons en main tout le matériel pour déterminer le prix du call sur l'obligation munie de coupons, soit la fonction qui actualise les cash-flows et celle qui détermine le prix d'une option écrite sur une obligation à coupon zéro, cela dans le cadre du modèle de Vasicek. En conformité avec la décomposition de Jamshidian, nous devons dans un premier temps déterminer le prix d'exercice de chacun des calls intermédiaires écrits sur les cash-flows de l'obligation qui surviennent une fois que l'option à évaluer est échue selon la procédure exposée antérieurement. Nous devons trouver le taux d'intérêt qui égale la valeur actualisée desdits cash-flows intermédiaires au prix d'exercice de l'option à évaluer.

Pour fixer les idées, nous considérons une obligation à 10 ans qui verse des coupons annuels de 4 %. Sa valeur nominale est de 1 $. Le call qui est écrit sur cette obligation a les mêmes caractéristiques

TABLEAU 30 **Solution de départ pour les Kj (*guess*)**

	C	D	E	F	G	H
15	T	sj		P(r*,T,sj)	Lj	Kj
16	4	5		0.9603	0.04	0.0384
17	4	6		0.9087	0.04	0.0363
18	4	7		0.8525	0.04	0.0341
19	4	8		0.7956	0.04	0.0318
20	4	9		0.7402	0.04	0.0296
21	4	10		0.6875	1.04	0.7150
22						0.8853

que dans le cas précédent. Les paramètres et variables du modèle sont également fixés aux mêmes niveaux que dans l'exemple précédent. Le tableau 30 relate les calculs préliminaires pour déterminer les prix d'exercice recherchés.

Dans les cellules D16 à D21 apparaissent les dates d'échéance des cash-flows de l'obligation qui se produisent après la date d'échéance de l'option à évaluer. Les cash-flows correspondants sont dans les cellules G16 à G21. Nous déterminons dans un premier temps les facteurs d'actualisation de chacun de ces cash-flows à partir de (t = 4), soit la date d'échéance de l'option. Pour ce faire, nous recourons à la fonction *Vasicekzcoup(.)*. Dans la cellule F16, nous avons inséré la formule suivante, qui est le facteur d'actualisation du cash-flow qui se produit à (t = 5) et qui est ramené à la période (t = 4) :

```
Vasicekzcoup($B$2,$B$3,$B$4,$C16,$D16,$B$8)
```

Comme on peut le constater, le cash-flow de la période 5 ($D16) est ramené au temps t = 4 ($C16). Pour l'instant, l'actualisation s'effectue au taux d'intérêt de 3 %, soit le taux à court terme observé. Et on recopie cette formule dans les colonnes D17 à D21. Par exemple, dans la cellule D21, qui contient le facteur d'actualisation de la période 10, on retrouve la formule suivante :

```
Vasicekzcoup($B$2,$B$3,$B$4,$C21,$D21,$B$8)
```

On constate que cette fois-ci l'actualisation s'effectue de la période 10 ($D21) à la période 4 ($C21).

Dans les cellules H16 à H21, on multiplie les facteurs d'actualisation par leur cash-flow respectif. Par exemple, dans la cellule H16, on inscrit la formule :

```
=F16*G16
```

que l'on recopie dans les cellules H17 à H21. Puis, dans la cellule H22, on somme les cellules H16 à H21.

```
=SUM(H16:H21)
```

Au taux d'intérêt de 3 % utilisé dans un premier temps pour les fins de l'actualisation, cette somme se chiffre à 0,8853, ce qui n'est pas égal à la somme recherchée, soit 0,6, le prix d'exercice du call à évaluer. Pour trouver le taux d'intérêt qui réalise cette égalité, nous faisons appel au solveur d'Excel et y effectuons les entrées suivantes. La cellule-cible (*target cell*) est H22 et elle doit être égale à la valeur 0,6. Ce résultat doit être obtenu en modifiant la cellule B4, qui renferme le taux d'intérêt. À la suite de cette opération, les entrées du tableau 30 subissent les modifications qui sont relatées au tableau 31.

La somme des cellules H16 à H21 est bien de 0,6 (cellule H22), soit le niveau recherché. La cellule B4 renferme maintenant le taux de 24,65 %, taux que le solveur a calculé pour forcer l'égalité recherchée. Ce taux ne s'inscrit que dans une étape intermédiaire et ne servira plus. Nous revenons donc au taux observé de 3 % pour les fins des calculs restants.

La colonne des Kj, constituée des cellules H16 à H21, renferme les prix d'exercice respectifs des calls sur les obligations à coupon zéro constituées par les cash-flows se retrouvant dans les cellules G16 à

TABLEAU 31 **Solution finale pour les Kj après itérations**

	C	D	E	F	G	H
15	T	sj		P(r*,T,sj)	Lj	Kj
16	4	5		0.8099	0.04	0.0324
17	4	6		0.6911	0.04	0.0276
18	4	7		0.6090	0.04	0.0244
19	4	8		0.5471	0.04	0.0219
20	4	9		0.4975	0.04	0.0199
21	4	10		0.4556	1.04	0.4738
22						0.6000

TABLEAU 32 **Prix des calls sur les cash-flows résiduels de l'obligation**

	D	E	F	G	H	I
15	sj		P(r*,T,sj)	Lj	Kj	cj
16	5		0.8099	0.04	0.0324	0.00
17	6		0.6911	0.04	0.0276	0.01
18	7		0.6090	0.04	0.0244	0.01
19	8		0.5471	0.04	0.0219	0.01
20	9		0.4975	0.04	0.0199	0.01
21	10		0.4556	1.04	0.4738	0.15
22					0.6000	
23						0.158

G21. Chacun de ces cash-flows est une obligation à coupon zéro dont la durée est donnée par la date de paiement dudit coupon. Les prix de ces calls, dont la somme pondérée constitue le prix de l'option à évaluer, sont calculés comme dans la section précédente en prenant comme point de départ : t = 0. Les prix de calls reposent dans la colonne cj du tableau 32.

Dans la colonne I16, on a écrit la formule :

```
Vasicekoptionzero($G16,$H16,$B$2,$B$3,0.03,$B$5,$C16,$D16,$B$8)
```

On remarque que l'actualisation s'effectue au taux observé de 3 % et que l'actualisation s'effectue de l'année 5 à l'année 0. Le prix du call à la période 5 est donc de 0,00 $. On recopie cette formule dans les cellules I17 à I21. À titre d'exemple, la cellule I21 contient la formule suivante :

```
Vasicekoptionzero($G21,$H21,$B$2,$B$3,0.03,$B$5,$C21,$D21,$B$8)
```

La valeur du call sur l'obligation avec coupons est la somme pondérée des calls évalués dans la colonne des cj, les facteurs de pondération respectifs étant les niveaux des cash-flows dans la colonne des Lj. Pour déterminer le prix de l'option à évaluer, nous avons donc inscrit dans la cellule I23, cela en conformité avec l'équation (23), la formule suivante :

```
=SUMPRODUCT(G16:G21,J16:J21)
```

ce qui donne un prix de 0,158 $ au call européen sur ladite obligation munie de coupons.

ANNEXE 9.1

Fonction Visual Basic calculant l'arbre binomial de taux d'intérêt de Black, Derman et Toy

```
Function BinZeroPrice(L, Rmat, n, delt)

' Cette fonction a comme arguments: L, la valeur nominale de
' l'obligation
' Rmat, les taux d'un an qui apparaissent dans l'arbre de taux
' n: l'échéance de l'obligation
' delt: le pas

   Dim p, pstar, dfac
   Dim i As Integer, j As Integer

   ' vvec est le vecteur des cash-flows de l'obligation
   ' On déclare vvec comme un vecteur puis on donne sa dimension
   Dim vvec() As Variant
   ReDim vvec(n + 1)

   ' On suppose que la prob. d'une hausse ou d'une baisse de
   ' taux=0,5

   p = 0.5
   pstar = 1 - p

   ' On génère les cash-flows finaux de l'obligation

   For i = 1 To n + 1

   ' Le cash-flow final est de 1
      vvec(i) = L

   Next i

   ' Puis on fait machine arrière en actulisant ces cash-flows
   ' jusqu'au début de l'arbre. À remarquer la syntaxe de la boucle.

   For j = n To 1 Step -1

      For i = 1 To j
         vvec(i) = (p * vvec(i) + pstar * vvec(i + 1)) * Exp(-
         Rmat(i, j) * delt)
      Next i
   Next j

   ' Le prix de l'obligation est égal aux cash-flows actualisés
   ' au tout début de l'arbre.

   BinZeroPrice = vvec(1)

End Function
```

```
Function BinZeroRateTree(zpvec, volvec, L, delt)
' Cette fonction a comme arguments: zpvec, les prix spots
' volvec, les volatilités
' L: la valeur nominale de l'obligation, ici 1
' delt, le pas
' Elle génère l'arbre de taux binomiaux
' elle recourt à la fonction précédente
Dim radj, atol, zpk, vkd, rk, fr1, fr, fdashr
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, n As Integer
' RTmat est une matrice. Ce sera l'arbre de taux
Dim RTmat() As Variant
' On compte le nombre de prix spot
n = Application.Count(zpvec)
' On donne les dimensions de RTmat
ReDim RTmat(n, n)
radj = 0.0001
atol = 0.00000001
' Taux à reproduire
RTmat(1, 1) = -(Log(zpvec(1) / L)) / delt
' RTmat(1, 1) = (1 / zpvec(1)) - 1
' On solutionne colonne par colonne. k=2, 2e colonne
For k = 2 To n
zpk = zpvec(k)
' On donne la volatilité de la colonne
vkd = 2 * volvec(k - 1) * Sqr(delt)
' On utilise Newton-Raphson pour trouver rk. Différences finies fr1
' La valeur de départ de l'algorithme
rk = RTmat(1, k - 1)
Do
RTmat(1, k) = rk + radj
' Processus stochastique des taux autres que le taux max de la
' branche
For i = 2 To k
RTmat(i, k) = RTmat(i - 1, k) * Exp(-vkd)
Next i
```

```
fr1 = BinZeroPrice(L, RTmat, k, delt) - zpk
RTmat(1, k) = rk
For i = 2 To k
RTmat(i, k) = RTmat(i - 1, k) * Exp(-vkd)
Next i
fr = BinZeroPrice(L, RTmat, k, delt) - zpk
' Approximation de la dérivée première de fr
fdashr = (fr1 - fr) / radj
' Processus Newton-Raphson: paramètre(t+1)=paramètre(t)-f(x)/f'(x)
rk = rk - (fr / fdashr)
Loop While Abs(fr) > atol
' On a fini pour rk et on passe à un autre
Next k
' On déclare la fonction
BinZeroRateTree = RTmat
End Function
```

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

BLACK, F. (1976), « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, vol. 3, janvier-mars, p. 167-179.

BLACK, F., E. DERMAN et W. TOY (1990), « A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options », *Financial Analysts Journal*, janvier-février, p. 33-39.

BLACK, F. et P. KARASINSKI (1991), « Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal », *Financial Analysts Journal*, juillet-août, p. 52-59.

BLACK, F. et M. SCHOLES (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, mai-juin, p. 637-659.

BROWN, K.C. et D.J. SMITH (1995), *Interest Rate and Currency Swaps : A Tutorial*, The Research Foundation of the Institute of Chartered Financial Analysts.

BRYIS, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives : Theory, Application and Practice*, New York, Wiley Frontiers in Finance.

CLEWLOW L. et C. STRICKLAND (1998), *Implementing Derivative Models*, Chichester, Wiley.

DEITEL, H.M., P.J. DEITEL et T.R. NIETO (1999), *Visual Basic 6 : How to Program*, New York, Prentice Hall.

DUAN, J.C. (1995), « The Garch Option Pricing Model », *Mathematical Finance*, vol. 5, p. 13-32.

GREEN, J. (1999), *Excel 2000 VBA Programmer's Reference*, Birmingham, Wrox Press Ltd.

HO, T.S.Y. et S.B. LEE (1986), « Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims », *Journal of Finance*, vol. 41, p. 1011-1029.

HULL, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 4e édition, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

HULL, J.C. (1998), *Introduction to Futures and Options Markets*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

HULL, J.C. (1989), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 1re édition, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

HULL, J. et A. WHITE (1994a), « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I : Single-factor Models », *The Journal of Derivatives*, automne, p. 7-16.

HULL, J. et A. WHITE (1994b), « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II : Two-factor Models », *The Journal of Derivatives*, hiver, p. 37-48.

HULL, J. et A. WHITE (1993a), « One Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivatives Securities », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, p. 235-254.

HULL, J. et A. WHITE (1993b), « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-dependent Options », *Journal of Derivatives*, vol. 1, p. 21-32.

HULL, J. et A. WHITE (1990), « Pricing Interest-rate-derivative Securities », *The Review of Financial Studies*, vol. 3, no 4, p. 573-592.

JACKSON, M. et M. STAUTON (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley.

JAMSHIDIAN, F. (1991a), « Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models », *Journal of Fixed Income*, vol. 1, p. 62-74.

JAMSHIDIAN, F. (1991b), « Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model », *Research in Finance*, vol. 9, p. 131-170.

JAMSHIDIAN, F. (1989), « An Exact Bond Option Formula », *The Journal of Finance*, vol. 44, mars, p. 205-209.

MUSIELA, M. et M. RUTKOWSKI (1998), *Martingale Methods in Financial Modelling*, New York, Springer-Verlag.

NEFTCI, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, San Diego, Academic Press.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001a), *Arbres binomiaux additifs et multiplicatifs pour évaluer les options américaines classiques sur actions portant dividende*, CRG, novembre.

RACICOT F.-É. et R. THÉORET (2001b), *Le calcul numérique en ingénierie financière. Variations sur les aspects théoriques et pratiques des algorithmes d'optimisation et étude d'un cas : l'algorithme de Newton comme solution à l'arbre binomial de Black, Derman et Toy*, CRG, 28-2001, octobre.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001c), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : la construction de l'arbre binomial de taux d'intérêt du modèle de Black, Derman et Toy*, CRG, 11-2001, avril.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001d), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, CRG, 13-2001, mai.

RACICOT F.-É. et R. THÉORET (2001e), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

ROSTAN, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire.

TAYLOR, S.J. (1994), « Modeling Stochastic Volatility : A Review and Comparative Study », *Mathematical Finance*, vol. 4, p. 83-204.

VASICEK, O.A. (1977), « An Equilibrium Characterisation of the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, vol. 5, p. 177-188.

WALKENBACH, J. (2000), *Microsoft Excel 2000 Power Programming with VBA*, New York, Hungry Minds.

WILMOTT, P. (2001), *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, New York, Wiley.

WILMOTT, P. (2000), *On Quantitative Finance*, volumes 1 et 2, New York, Wiley.

WILMOTT, P. (1998), *Derivatives*, New York, Wiley.

CHAPITRE

10

MODÉLISATION DE LA VALEUR DE L'ENTREPRISE

ASPECTS THÉORIQUES ET ÉTUDE D'UN CAS : UNE SIMULATION DE LA VALEUR D'UNE FIRME SUR EXCEL

Beaucoup de recherches dans le domaine de l'évaluation de l'entreprise ont été effectuées depuis la parution, en 1958, du célèbre article de Modigliani et Miller[1] qui devait révolutionner la finance corporative moderne. Cet article a également ouvert la voie à de nombreuses controverses. Beaucoup d'encre a coulé sur les fameux théorèmes de Modigliani et Miller quant à l'incidence de la structure du capital sur la valeur de la firme.

La théorie de Modigliani et Miller a par la suite été reformulée en termes du CAPM. C'est alors qu'elle a atteint son apogée. Copeland et Weston (1988), dans leur excellent traité financier, ont sans doute donné le meilleur exposé à ce sujet. À la lecture de cet exposé, on se rend compte que la théorie de Modigliani et Miller, en plus d'être très avant-gardiste, est d'une grande généralité. Elle peut en effet s'adapter à un nombre imposant de modèles financiers modernes.

Modigliani et Miller ont situé leur modèle ayant trait à la valeur de la firme dans un univers incertain. L'incertitude y est abordée de façon classique. Pour prendre en compte l'incertitude des flux monétaires, on calcule en effet leur espérance mathématique. Et pour actualiser ces flux, on ajoute une prime de risque au taux sans risque.

1. Modigliani, F. et M.H. Miller (1958), « The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment », *American Economic Review*, p. 261-297.

Certes, le traitement de l'incertain a beaucoup évolué depuis. On dispose maintenant de modèles stochastiques de la valeur de l'entreprise[2]. La transposition empirique de ces modèles donne une large part aux simulations Monte Carlo. Ces modèles ne constituent pas toutefois l'objet de ce chapitre. Notre objectif est plutôt de nous concentrer dans un premier temps sur la comparaison entre la méthode classique de la VAN pour évaluer une entreprise et celle de Modigliani et Miller ayant trait à la VAN ajustée. Dans un deuxième temps, nous présentons une simulation sur Excel d'un modèle empirique de notre cru d'évaluation d'une entreprise[3].

1. LA THÉORIE DU CAPM ET L'ÉVALUATION DE L'ENTREPRISE[4]

Il existe deux façons classiques pour calculer la valeur d'une firme ou la valeur actualisée nette (VAN) d'un projet.

---

2. Pour un très bon exposé de ces modèles, on consultera : Dixit, A.K. et R.S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton (N.J.), Princeton University Press.

3. Dans ce chapitre, nous passons sous silence les modèles d'évaluation de l'entreprise reliés à la théorie des options et à la théorie des coûts d'agence. Autrement dit, nous ne considérons que les modèles classiques.

4. Nous faisons appel aux références suivantes pour cette section : Copeland, T.E. et J.F. Weston (1988), *Financial Theory and Corporate Policy*, Boston, Addison-Wesley ; Modigliani, F. et M.H. Miller (1958), *op. cit.* ; Modigliani, F. et M.H. Miller (1963), « Corporate Income Taxes and the Cost of Capital : A Correction », *American Economic Review*, juin, p. 433-443 ; Modigliani, F. et M.H. Miller (1966), « Some Estimates of the Cost of Capital to the Electric Utility Industry : 1954-1957 », *American Economic Review*, juin, p. 333-391 ; Miller, M.H. (1977), « Debt and Taxes », *Journal of Finance*, mai, p. 261-276 ; Myers, S.C. (1974), « Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions – Implications for Capital Budgeting », *Journal of Finance*, mars, p. 1-25 ; Gordon, M.J. (1959), « Dividends, Earnings and Stock Prices », *Review of Economics and Statistics*, mai, p. 99-105 ; Megginson, W.L. (1997), *Corporate Finance Theory*, Boston, Addison Wesley ; Chew, D.H. (dir.) (1999), *The New Corporate Finance*, 2e édition, New York, McGraw-Hill Irwin ; Brealey, R., S. Myers *et al.* (1991), *Principles of Corporate Finance*, Toronto, McGraw-Hill ; Brealey, R., S. Myers et F. Charrette (1981), *Principes de gestion financière des sociétés*, Montréal, McGraw-Hill ; Mercier, G. et R. Théoret (1997), *Traité de gestion financière*, 2e édition, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, chap. 14, 16 et 19 ; Gagnon, J.M. et N. Khoury (1988), *Traité de gestion financière*, 3e édition, Boucherville, Gaëtan Morin, deuxième partie.

i) La méthode de Modigliani et Miller :

C'est la méthode de la VAN ajustée. Cette méthode confère un rôle central au coût d'opportunité du capital dans le mécanisme d'actualisation des flux monétaires d'une entreprise ou d'un projet. Le coût d'opportunité du capital n'intègre pas l'impact du levier financier. Si l'on veut, le coût d'opportunité du capital est un WACC[5] sans levier. Il mesure le meilleur rendement que les actionnaires actuels d'une compagnie qui recourt au levier financier obtiendraient dans une autre firme sans levier qui aurait un risque équivalant à celui de la firme dans laquelle ils investissent présentement, ou dans tout autre placement de même risque. Nous préciserons plus loin ces affirmations.

ii) La méthode du coût moyen du capital :

C'est la méthode de la VAN classique. Le taux d'actualisation des flux monétaires est alors le coût moyen du capital.

Le but de cette section est de montrer l'équivalence de ces deux méthodes par le biais de la théorie du CAPM.

1.1. VAN ajustée à la Modigliani-Miller

Valeur d'une firme sans levier ni taxation

Par hypothèse, une entreprise génère un flux monétaire annuel certain CF, cela à perpétuité. Cette entreprise ne paie pas d'impôts et ne met pas à contribution le levier financier. Elle est l'équivalent d'une obligation perpétuelle qui générerait un flux CF à l'infini. Sa valeur est alors égale à :

$$V_u = \frac{CF}{\rho} \qquad (1)$$

V_u : valeur de la firme sans levier[6]

ρ : coût d'opportunité du capital (sans levier par définition)

5. ***W**eighted **A**verage **C**ost of **C**apital*.
6. u pour *unleveraged*.

Valeur d'une entreprise avec levier et taxation

En continuant à se camper dans un univers certain, la valeur d'une entreprise avec levier, désignée par V_L, est égale à l'expression suivante :

$$\text{Valeur de l'entreprise} = V_u + \text{économies d'impôts générées par la dette} \tag{2}$$

La valeur de la firme sans levier V_u est alors égale à :

$$V_u = \frac{CF(1 - t_c)}{\rho} \tag{3}$$

Calculons maintenant les économies d'impôts à perpétuité dues à l'endettement. Les économies annuelles d'impôts sont égales à l'expression suivante :

$$r_B \times B \times t_c \tag{4}$$

r_B : taux d'intérêt de la dette (qui ne comporte ici aucun risque)

B : dette

t_c : taux de taxation de la firme

Comme la firme recevra ce montant à perpétuité, ses économies totales d'impôts actualisées sont égales à :

$$\frac{r_B \times B \times t_c}{r_B} = t_c B \tag{5}$$

Dans un univers certain, la valeur d'une entreprise avec levier et taxation est donc égale à l'expression suivante :

$$V_L = V_u + t_c B \tag{6}$$

V_L : valeur de l'entreprise avec levier

La dette accroît la valeur de la firme en raison des économies d'impôts qu'elle procure.

Nous savons maintenant que V_u, la valeur de la firme sans levier, doit être escomptée au coût d'opportunité du capital, c'est-à-dire :

$$V_u = \frac{CF(1 - t_c)}{\rho} \tag{7}$$

En vertu du CAPM, le coût d'opportunité du capital est égal à l'expression suivante :

$$\rho = r_{su} = r_f + \beta_{su}\left[E(R_m) - r_f\right] \tag{8}$$

r_{su} : rendement des actions sans levier[7]

r_f : taux d'intérêt sans risque

$\left[E(R_m) - r_f\right]$: rendement excédentaire espéré du portefeuille du marché

β_{su} : bêta des actions de la firme sans levier. On appelle encore ce risque : « risque d'affaires ».

Il faut ici signaler que β_{su} ne peut être calculé en régressant le rendement des actions de la firme sur celui du portefeuille du marché. On obtient alors β_{sL}[8], soit le bêta des actions qui emmagasine l'effet de levier. On établira ultérieurement la relation entre β_{su} et β_{sL}.

1.2. Le coût d'opportunité du capital et le taux de rendement des actions avec effet de levier

Nous savons qu'un projet d'investissement augmente la valeur d'une entreprise si :

taux de rendement (net) du projet
> coût d'opportunité du capital (9)

Cette condition se traduit par une augmentation de la richesse des actionnaires actuels de la compagnie.

Soit :

ΔI : nouvel investissement (nouveau projet)

ΔV_L : hausse de la valeur de la firme avec levier

Le projet sera retenu par la firme s'il augmente la richesse de ses actionnaires actuels, c'est-à-dire :

$$\frac{\Delta V_L}{\Delta I} > 1 \tag{10}$$

7. s pour *stock* et u pour *unleveraged*.
8. L pour *leveraged*.

Or, V_L est égal à :

$$V_L = \frac{(1 - t_c)CF}{\rho} + t_c B \tag{11}$$

La condition d'acceptabilité du projet est donc la suivante :

$$\frac{\Delta V_L}{\Delta I} = \frac{(1 - t_c)\Delta CF}{\rho \Delta I} + t_c \frac{\Delta B}{\Delta I} > 1 \tag{12}$$

ou, en réarrangeant :

$$\frac{(1 - t_c)\Delta CF}{\Delta I} > \rho \left[1 - t_c \frac{\Delta B}{\Delta I} \right] \tag{13}$$

En supposant que le projet ne modifie pas le levier de l'entreprise, c'est-à-dire que :

$$\frac{\Delta B}{\Delta I} = \frac{B}{B + S} \tag{14}$$

la condition d'acceptabilité du projet devient :

$$\frac{(1 - t_c)\Delta CF}{\Delta I} > \rho \left[1 - t_c \frac{B}{B + S} \right] \tag{15}$$

Dans cette équation, le terme de gauche représente le rendement net du projet. Le terme de droite est le coût d'opportunité du capital corrigé de l'effet de levier.

Le coût moyen du capital (WACC) est donc égal, dans l'approche de Modigliani et Miller, à :

$$WACC = \rho \left[1 - t_c \frac{B}{B + S} \right] \tag{16}$$

Considérons quelques cas.

i) $t_c = 0$

Le coût moyen du capital est alors égal au coût d'opportunité du capital. Il est indépendant du niveau du levier. La valeur d'une entreprise ou d'un projet ne dépend pas alors

du levier ou de la structure du capital de l'entreprise. C'est là l'un des théorèmes financiers classiques dus à Modigliani et Miller dans un monde sans impôts.

ii) $t_c > 0$

Selon l'équation (16), le coût moyen du capital diminue quand le levier financier augmente, mais également quand le taux de taxation de la firme est relevé. Cela est dû aux économies d'impôts additionnelles que la firme réalise alors. La valeur d'un projet ou d'une firme dépend donc de sa structure de financement lorsqu'elle est sujette à la taxation.

Nous allons maintenant dériver l'expression de r_{sL}, soit le coût de l'équité avec effet de levier. Le rendement de l'équité dépend en effet du levier de l'entreprise, le levier augmentant le risque de celle-ci. En vertu d'un principe de base en finance, on devrait s'attendre à ce que les actionnaires exigent un rendement plus élevé sur leurs actions quand le levier de l'entreprise dans laquelle ils investissent augmente. Le calcul suivant nous confortera dans cette attente.

On rappelle que le coût moyen du capital est, par définition, égal à l'expression suivante :

$$\frac{S}{B+S} r_{sL} + \frac{B}{B+S} r_B(1 - t_c) \tag{17}$$

S : encours d'actions

B : encours d'obligations

r_{sL} : rendement (coût) des actions avec levier

r_B : rendement (coût) de la dette

On sait par ailleurs que, selon Modigliani et Miller, le coût moyen du capital est également égal à :

$$\text{WACC} = \rho\left(1 - t_c \frac{B}{B+S}\right) \tag{18}$$

En égalisant les deux expressions du coût moyen du capital, on obtient :

$$\rho\left(1 - t_c \frac{B}{B+S}\right) = \frac{S}{B+S} r_{sL} + \frac{B}{B+S} r_B(1 - t_c)$$

$$\rho - t_c\rho \frac{B}{B+S} = \frac{S}{B+S} r_{sL} + \frac{B}{B+S} r_B(1 - t_c)$$

$$r_{sL} = \frac{B+S}{S}\rho - t_c\rho \frac{B}{S} - \frac{B}{S} r_B(1 - t_c)$$

$$r_{sL} = \frac{B}{S}\rho + \rho - t_c\rho \frac{B}{S} - \frac{B}{S} r_B(1 - t_c)$$

$$r_{sL} = \rho + (1 - t_c)\rho \frac{B}{S} - \frac{B}{S} r_B(1 - t_c)$$

$$r_{sL} = \rho + (\rho - r_B)(1 - t_c)\frac{B}{S} \qquad (19)$$

Le taux de rendement des actions avec levier (r_{sL}) est différent du taux de rendement des actions sans levier (r_{su} ou ρ). En effet, selon l'équation (19), lorsque le taux d'endettement de la compagnie (B/S) augmente, il en résulte une augmentation du taux de rendement des actions avec levier (r_{sL}) puisque les actions sont alors plus risquées. Par ailleurs, toujours selon l'équation (19), lorsque le taux d'imposition (t_c) de la compagnie augmente, cela fait diminuer le taux de rendement des actions avec levier en raison des économies d'impôts additionnelles, un cash-flow certain[9].

1.3. La parenté entre la théorie de Modigliani et Miller et le modèle du CAPM

Le modèle du CAPM met de l'avant le risque systématique d'un titre, qui est mesuré par le bêta à l'intérieur de cette théorie. Ce bêta incorpore certes le levier financier de l'entreprise à laquelle il se

9. Qui doit donc être actualisé au taux d'intérêt sans risque.

rapporte : il n'en est pas décanté. Dans le modèle du CAPM, le taux de rendement des actions avec effet de levier est donc le suivant :

$$r_{sL} = R_f + \left[E(R_m) - R_f\right]\beta_{sL} \tag{20}$$

β_{sL} : bêta des actions avec effet de levier

L'approche de Modigliani et Miller et celle du CAPM au calcul du rendement des actions avec levier donnent bien sûr des résultats identiques.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire le coût moyen du capital en termes de la mesure de risque proposée par le CAPM, soit le bêta. D'abord quelques nouveaux concepts. Le bêta des actifs (sans taxation) se définit comme ceci :

$$\beta_{actifs} = \frac{B}{B+S}\beta_B + \frac{S}{B+S}\beta_{sL} \tag{21}$$

Le bêta des actifs est donc une moyenne pondérée des bêtas des véhicules de financement d'une entreprise, ici la dette et l'équité. On peut calculer le WACC (sans taxation) de deux façons. La première est la suivante, qui a été dérivée antérieurement :

$$WACC = \frac{S}{B+S} r_{sL} + \frac{B}{B+S} r_B \tag{22}$$

où r_{sL} est calculé à partir de β_{sL} en vertu du CAPM.

La deuxième façon de calculer le WACC met en cause le bêta des actifs. Il est alors égal à :

$$WACC = R_f + \beta_A\left[E(R_m) - R_f\right] \tag{23}$$

Les deux méthodes qui viennent d'être exposées sont équivalentes pour calculer le WACC. On peut en effet, pour calculer celui-ci :

i) Soit pondérer les différents coûts de financement ;

ii) Soit appliquer strictement un *CAPM global*, c'est-à-dire :

$$WACC = R_f + \beta_A\left[E(R_m) - R_f\right] \tag{24}$$

À ce stade-ci, nous devons établir la relation entre le bêta des actions sans effet de levier financier (β_{su}) et celui des actions avec levier (β_{sL}). Pour obtenir le bêta des actions avec effet de levier, il suffit de régresser, par la méthode des moindres carrés ordinaires, le rendement des actions de l'entreprise i (R_i) sur celui du portefeuille du marché (R_m) en recourant au modèle dit « du marché[10] », c'est-à-dire :

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} + \varepsilon_{it} \tag{25}$$

où α_i est le terme constant de la régression et ε_{it}, son terme d'erreur. Cette régression nous fournit le bêta des actions avec levier de l'entreprise i. En effet, les rendements des titres transigés sur les marchés financiers incorporent l'effet du levier et de la taxation.

Or, pour calculer le coût d'opportunité du capital, il faut connaître le bêta des actions sans levier (β_{su}) puisque, on le rappelle :

$$\rho = R_f + \left[E\left(R_m\right) - R_f\right]\beta_{su} \tag{26}$$

Établissons donc la relation entre β_{sL} et β_{su}. Le point de départ est l'équation de Modigliani et Miller qui relie le rendement des actions avec effet de levier au coût d'opportunité du capital :

$$r_{sL} = \rho + \left(\rho - r_B\right)\left(1 - t_c\right)\frac{B}{S} \tag{27}$$

Exprimons cette équation en termes du CAPM. Dans cette dernière, λ représentera le rendement excédentaire espéré du portefeuille du marché, soit $(E(R_m) - R_f)$, où R_f désigne le taux sans risque. En substituant la valeur de ρ :

$$\rho = R_f + \lambda\beta_{su} \tag{28}$$

dans l'expression de r_{sL} (équation 27), on obtient :

$$R_f + \beta_{sL}\lambda = R_f + \beta_{su}\lambda + \left[R_f + \beta_{su}\lambda - R_B\right]\left(1 - t_c\right)\frac{B}{S} \tag{29}$$

---

10. Il ne faut pas confondre le modèle du marché avec la forme empirique de la droite du marché des titres (SML ou *Security Market Line*) du CAPM. La version empirique de la SML s'écrit : $R_{it} - R_{ft} = \alpha_i + \beta_i(R_{mt} - R_{ft}) + \varepsilon_{it}$ où α_i est l'alpha de Jensen, qui ne doit pas être significativement différent de 0 si le CAPM est valable. Mais on recourt habituellement au modèle du marché pour estimer le bêta d'un titre.

Sachant que R_f est égal à r_B puisque la dette ne comporte aucun risque, par hypothèse, on peut écrire :

$$\beta_{sL}\lambda = \lambda\beta_{su}\left[1 + (1 - t_c)\frac{B}{S}\right] \tag{30}$$

d'où :

$$\beta_{sL} = \beta_{su}\left[1 + (1 - t_c)L\right] \tag{31}$$

L : levier

Comme β_{sL}, nous l'avons vu, est calculé à partir de données du marché, c'est-à-dire en régressant R_i sur R_m, l'équation (31) nous permet de calculer β_{su} lorsque l'on connaît t_c de même que le levier financier de l'entreprise L.

L'équation qui relie le bêta avec levier à celle du bêta sans levier s'interprète facilement. En effet :

i) Si le levier augmente, il s'ensuit selon cette équation que le bêta avec levier augmente. Une augmentation du levier accroît le risque des actions de l'entreprise en augmentant la variabilité du profit. D'où un accroissement du risque systématique des actions mesuré par le bêta.

ii) Si le taux d'imposition de l'entreprise augmente, cela modère l'impact du levier sur le bêta des actions avec levier, en raison des économies d'impôts additionnelles générées par un plus fort taux de taxation. En effet, on le rappelle, les économies d'impôt sont des flux monétaires certains.

Par ailleurs, si t_c est nul, l'équation (31) se réduit à :

$$\beta_{sL} = \beta_{su}\left[1 + L\right] \tag{32}$$

Si une entreprise augmente son levier, le bêta de ses actions augmente donc proportionnellement au levier s'il n'existe pas d'impôts. Le rendement des actions avec levier (r_{sL}) augmente en proportion du levier. Tout l'avantage de se financer par la dette est perdu[11]. Le coût moyen du capital ne dépend pas, par conséquent, du

11. Il y a en effet avantage à se financer par la dette, car le coût de financement par obligations est inférieur au coût de financement par actions.

levier dans un monde sans impôts. Il en va nécessairement de même pour la valeur d'une entreprise. On retrouve ici le théorème antérieur de Modigliani et Miller apprêté à la sauce du CAPM. Dans un monde sans impôts, la valeur d'une entreprise n'est pas influencée par sa structure de capital.

Nous faisons ici une digression ayant trait au bêta des actifs d'une entreprise qui n'est pas sujette à l'imposition. Le bêta de ses actifs est alors égal à :

$$\beta_A = \frac{S}{B+S}\beta_{sL} + \frac{B}{B+S}\beta_B \tag{33}$$

or :

$$\beta_{sL} = \beta_{su}\left[1 + (1 - t_c)L\right] \tag{34}$$

d'où :

$$\beta_A = \frac{S}{B+S}\left[\beta_{su}\left(1 + (1 - t_c)L\right)\right] + \frac{B}{B+S}\beta_B \tag{35}$$

Si t_c est égal à zéro et que β_B est lui-même égal à zéro, c'est-à-dire que la dette ne comporte aucun risque, on a :

$$\beta_A = \frac{S}{B+S}\beta_{su}(1 + L) \tag{36}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur du terme entre crochets pas S, on obtient :

$$\beta_A = \frac{1}{1+L}\beta_{su}\left[1 + L\right] = \beta_{su} \tag{37}$$

S'il n'y a pas d'impôts, le bêta des actifs de deux firmes qui ont le même risque d'affaires[12] (β_{su}) ont le même bêta des actifs. Elles ont donc le même WACC puisque :

$$\text{WACC} = R_f + \beta_A\left[E(R_m) - R_f\right] \tag{38}$$

12. À ne pas confondre avec le risque financier, qui émane du levier financier de l'entreprise et qui est mesuré par β_{sL}.

Elles ont donc la même valeur. C'est le théorème de Modigliani et Miller dans un monde sans impôts. C'est-à-dire que dans pareil contexte, la structure de financement d'une entreprise n'affecte pas sa valeur.

Cela n'est pas vrai dans un monde avec impôts. On a alors :

$$\left(\beta_A\right)_{\text{avec impôts}} < \left(\beta_A\right)_{\text{sans impôts}}$$

D'où,

$$\left(\text{WACC}\right)_{\text{avec impôts}} < \left(\text{WACC}\right)_{\text{sans impôts}}$$

Le taux d'actualisation des flux monétaires de l'entreprise est donc plus faible pour une entreprise qui recourt à la dette en regard de celle qui ne fait pas appel au levier financier. Dans un monde avec impôts, l'entreprise qui met la dette à contribution a une valeur plus élevée car elle réalise des économies d'impôts en raison de la déduction fiscale des intérêts de la dette.

2. MODÈLES D'ÉVALUATION DE LA FIRME

2.1. Modèles d'évaluation en univers certain et sans impôts

Nous revenons à l'équation (1) qui est à la base des modèles d'évaluation de l'entreprise :

$$V_u = \frac{CF}{\rho} \tag{39}$$

Cette équation suppose que l'entreprise génère un flux monétaire certain CF à perpétuité. Le coût d'opportunité du capital équivaut alors au taux sans risque :

$$\rho = R_f \tag{40}$$

où R_f désigne le taux sans risque.

Toujours en demeurant dans cet univers certain, nous pouvons maintenant supposer que le flux monétaire généré par l'entreprise croît au rythme g. On peut alors transposer l'équation de Gordon

(1959) à l'évaluation de notre entreprise. Gordon a formulé cette équation pour évaluer le prix d'une action payant un dividende qui croît à un rythme constant g[13]. Le prix d'une telle action est alors de :

$$P_0 = \frac{D_1}{r - g} \tag{41}$$

où P_0 désigne le prix de l'action ; D_1, le dividende que versera l'action à la période 1, la période actuelle étant désignée par 0, c'est-à-dire $D_1 = D_0(1 + g)$; r est le taux de rendement que les actionnaires exigent pour détenir l'action et g est le taux de croissance constant du dividende. En appliquant l'équation de Gordon à la valeur d'une entreprise qui génère un flux monétaire qui croît au taux annuel g, on obtient comme valeur de cette entreprise :

$$V_u = \frac{CF_1}{\rho - g} \tag{42}$$

CF_1 étant le flux monétaire de la période 1.

Finalement, on peut imaginer que le flux monétaire généré par l'entreprise diffère d'une période à l'autre. La valeur de l'entreprise s'écrit alors :

$$V_u = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{CF_t}{(1 + \rho)^t} \tag{43}$$

2.2. Modèles d'évaluation en univers certain avec impôts

Nous supposons maintenant que l'entreprise est imposée dans notre univers certain. Les intérêts payés par l'entreprise sur sa dette sont déductibles d'impôts. La valeur d'une entreprise sans levier qui génère un flux monétaire perpétuel est de :

$$V_u = \frac{CF(1 - t_c)}{\rho} \tag{44}$$

13. Une version plus élaborée de l'équation de Gordon, appelée modèle H, apparaît en annexe à ce chapitre.

où t_c désigne le taux d'imposition auquel est sujette l'entreprise. Par contre, l'entreprise qui a émis une dette a une valeur donnée par l'équation (6) :

$$V_L = V_u + t_c B \tag{45}$$

où $t_c B$ désigne les économies perpétuelles d'impôts qu'elle réalise. La valeur d'une entreprise qui recourt au levier est donc plus élevée que celle d'une autre sans levier dans un monde avec impôts. Selon l'équation (45) et sous les hypothèses très restrictives qui font l'objet de cette section, une entreprise aurait avantage à s'endetter indéfiniment. La structure optimale du capital comporterait donc un taux d'endettement égal à 100 %. Par ailleurs, comme l'indique l'équation (45), la valeur de l'entreprise est insensible à la structure du capital dans un monde sans impôts ($t_c = 0$). L'entreprise n'a alors aucun intérêt à s'endetter.

2.3. Modèles d'évaluation dans un univers incertain sans impôts

Le flux monétaire perpétuel que génère l'entreprise est maintenant incertain. La valeur de l'entreprise dans un monde sans impôts est alors de :

$$V_u = \frac{E(CF)}{\rho} \tag{46}$$

CF étant maintenant une variable aléatoire et E(.), son espérance mathématique. Le coût d'opportunité du capital comporte maintenant une prime de risque. En termes du CAPM, il est égal à l'expression donnée par l'équation (28) :

$$\rho = r_{su} = r_f + \beta_{su}\left[E(R_m) - r_f\right] \tag{47}$$

Le risque systématique, soit β_{su}, est dû au risque d'affaires de l'entreprise, soit le risque relié à la catégorie d'industries dans laquelle elle opère. Il peut être aussi imputable au levier d'exploitation de l'entreprise en cause, qui s'explique par la présence de coûts fixes à l'intérieur des états financiers de la compagnie, coûts qui ont pour effet d'amplifier les fluctuations de ses profits.

Dans cet univers risqué, le risque est donc pris en cause en recourant à l'espérance mathématique au numérateur de la formule de la valeur d'une firme et en ajoutant au coût d'opportunité du capital une prime de risque à son dénominateur. Cette méthode est encore utilisée de nos jours du fait de sa simplicité et de sa bonne performance. Mais elle tend de plus en plus à être supplantée par le recours au calcul stochastique, comme nous l'indiquions dans l'introduction de ce chapitre.

2.4. Modèle général d'évaluation de la firme dans un univers incertain avec impôts

Nous maintenons les hypothèses restrictives de la section précédente sauf que nous supposons maintenant que l'entreprise est imposée. Supposons d'abord qu'elle n'ait pas de dettes. L'équation (46) devient :

$$V_u = \frac{E(CF)(1 - t_c)}{\rho} \tag{48}$$

le taux d'imposition étant une constante, il multiplie tout simplement l'espérance du flux monétaire.

À ce stade-ci, il nous faut définir la notion de flux monétaire puisque ce concept est le fondement des modèles d'évaluation à la Modigliani-Miller. Nous définirons ici la notion de flux monétaire libéré (*free cash flow*), c'est-à-dire les flux qui sont disponibles une fois les investissements de l'entreprise effectués. De façon très générale, les flux monétaires libérés se définissent comme suit[14] :

$$\begin{aligned} \text{flux monétaires libérés} = {} & \text{produits d'exploitation} \\ & - \text{charges d'exploitation} \\ & - \text{investissements} \end{aligned} \tag{49}$$

Nous devons d'abord préciser cette notion dans un monde sans dette. Pour ce faire, nous recourons au tableau 1, qui représente l'état des revenus et dépenses d'une entreprise non endettée.

14. On retrouvera cette définition dans : Brealey, Myers et Charrette (1981).

TABLEAU 1 **État des revenus et dépenses d'une entreprise non endettée**

REV	revenus
– CV	coûts variables d'exploitation
– CFI	coûts fixes
– DEP	dépréciation
= NOI	revenu net d'exploitation
– T	impôts
= NI	bénéfices après impôts

Le profit d'exploitation après impôts est égal à :

$$\text{NOI}(1 - t_c) \tag{50}$$

Selon le tableau 1, cette expression peut être réécrite comme suit :

$$(\text{REV} - \text{CV} - \text{CFI} - \text{DEP})(1 - t_c) \tag{51}$$

La dépréciation étant une dépense qui ne donne pas lieu à une sortie de fonds, elle doit être rajoutée pour en arriver aux flux monétaires, dont la formule s'écrit donc comme suit :

$$\text{CF} = (\text{REV} - \text{CV} - \text{CFI} - \text{DEP})(1 - t_c) + \text{DEP} \tag{52}$$

On peut réécrire l'équation (52) de la sorte en regroupant les termes DEP :

$$\text{CF} = (\text{REV} - \text{CV} - \text{CFI})(1 - t_c) + t_c\text{Dep} \tag{53}$$

En vertu de l'équation (53), on considère l'économie d'impôts procurée par la dépréciation comme un flux monétaire.

Maintenant, comme tous les flux monétaires sont des perpétuités dans ce modèle de base développé par Modigliani et Miller, il faut donc rénover constamment le capital. Il en résulte que :

$$\text{DEP} = \text{I} \tag{54}$$

c'est-à-dire qu'on doit investir chaque année un montant I pour maintenir le capital en bonne condition.

En substituant cette expression dans l'équation du flux monétaire (52), on obtient :

$$CFL = (REV - CV - CFI - DEP)(1 - t_c) + DEP - I \quad (55)$$

où CFL signifie : flux monétaire libéré. Et puisque DEP = I, on a :

$$CFL = (REV - CV - CFI - DEP)(1 - t_c) = NOI(1 - t_c) \quad (56)$$

Par conséquent, lorsque les flux monétaires sont des perpétuités, ils s'assimilent aux revenus nets d'exploitation après impôts. On retrouvera cette équivalence à travers toute la théorie élaborée par Modigliani et Miller.

À partir de ce résultat, la valeur d'une entreprise sans levier qui génère un flux monétaire perpétuel et qui n'est pas endettée est égale à :

$$V_u = \frac{E(NOI)(1 - t_c)}{\rho} \quad (57)$$

Cette expression démontre bien que les flux monétaires sont reliés aux produits et aux charges d'exploitation, le résultat net étant NOI.

Supposons maintenant que l'entreprise émette de la dette. Les profits après impôts doivent être maintenant répartis entre les actionnaires et les créanciers, soit les pourvoyeurs de fonds de l'entreprise. Les actionnaires recevront le montant suivant :

$$NI + DEP - I = NI \quad (58)$$

tandis que les créanciers se verront gratifiés du montant suivant :

$$r_B D \quad (59)$$

où D désigne la valeur nominale de la dette et r_B, le taux d'intérêt de la dette.

Les flux monétaires totaux disponibles (libérés) au secteur privé sont donc les suivants :

$$NI + r_B D = (REV - CV - CFI - DEP - r_B D)(1 - t_c) + r_B D \quad (60)$$

En mettant la dette en facteur, on obtient :

$$NI + r_B D = NOI(1 - t_c) + t_c r_B D \quad (61)$$

Un principe bien connu en finance veut que chaque flux monétaire soit actualisé à un taux qui reflète son risque relatif. Les profits d'exploitation après impôts, qui excluent la dette, doivent donc être escomptés au coût d'opportunité du capital. Par ailleurs, la dette est ici supposée sans risque. Il faut donc actualiser les économies d'impôts au taux d'intérêt sans risque : r_f. Résultat de ces développements, la valeur V_L d'une firme avec levier qui opère sous les hypothèses restrictives de cette section est égale à :

$$V_L = \text{Valeur actualisée des flux distribués aux pourvoyeurs de fonds} \tag{62}$$

On peut réécrire l'équation (62) comme suit, à la suite des développements que nous venons d'effectuer :

$$V_L = \frac{E(NOI)(1 - t_c)}{\rho} + \frac{r_B D t_c}{r_f} \tag{63}$$

La dette étant ici perpétuelle et sans risque, la valeur marchande des obligations B est donc de :

$$B = \frac{r_B D}{r_f} = D \tag{64}$$

puisque $r_B = r_f$. La forme finale de la valeur d'une entreprise avec levier est égale à :

$$V_L = V_u + t_c B \tag{65}$$

Rappelons la signification de cette équation. La valeur d'une firme avec levier est égale à la valeur d'une firme sans levier à laquelle s'ajoute la valeur présente des économies d'impôts procurées par la dette (t_c B).

Si $t_c = 0$, c'est-à-dire s'il n'y a pas d'impôts, on a :

$$V_L = V_u \tag{66}$$

Il en résulte que sans impôts, la structure du capital n'importe pas. Un investisseur peut alors se concocter un levier-maison de la façon suivante. Il achète d'abord des actions de l'entreprise non endettée et il s'endette ensuite au levier de l'entreprise endettée. Il peut alors reproduire les rendements des actions de l'entreprise endettée.

Il s'ensuit que, dans un monde sans impôts, l'entreprise endettée n'a pas sa raison d'être. Ses actions n'ont pas plus de valeur ajoutée que celles de l'entreprise non endettée.

Par ailleurs, si l'entreprise fait face à un taux d'imposition, l'équation (65) milite en faveur d'un taux d'endettement égal à 100 %. En effet, augmenter la dette revient à accroître les économies d'impôts qui s'ajoutent continuellement à la valeur de l'entreprise. La valeur de l'entreprise n'a de cesse de s'enfler tant que la dette progresse sur une pente ascendante.

Ce dernier modèle suppose que la dette est sans risque, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun obstacle à l'endettement. Mais dans la réalité, plus une entreprise s'endette, plus la probabilité d'un dépôt de bilan s'accroît. Par souci de réalisme, nous devons donc retrancher la valeur présente (VP) des coûts de banqueroute à la valeur de la firme. L'expression de la valeur de la firme devient donc :

$$V_L = \frac{E(NOI)(1 - t_c)}{\rho} + \frac{r_B D t_c}{r_f} - \text{VP(coûts de banqueroute)} \qquad (67)$$

Selon la théorie marginaliste, l'entreprise cessera de s'endetter lorsque l'avantage marginal de l'endettement, représenté par les économies d'impôts, est égal au désavantage marginal de l'endettement sous la forme de coûts de banqueroute. Il existe donc une limite à l'endettement. Cette façon d'intégrer le risque de la dette à l'intérieur d'un modèle d'évaluation de l'entreprise est toutefois somme toute assez sommaire. La théorie des options offre maintenant une voie beaucoup plus satisfaisante à cet effet[15].

Nous supposons maintenant que les flux monétaires varient d'une année à l'autre. L'expression de la valeur de l'entreprise s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \text{VAN} = & \sum_{t=1}^{n} \frac{(\text{cash-flows après impôts})_t}{(1+\rho)^t} \\ & + \text{VA des économies d'impôts dues à la dette} \\ & - \text{VP(coûts de banqueroute)} \end{aligned} \qquad (68)$$

15. À ce sujet, on consultera : Racicot, F.-É. et R. Théoret (2001), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, document de travail, Centre de recherche en gestion, CRG, 13-2001, ÉSG, Université du Québec à Montréal, section 4.1.

L'équation (68) représente l'expression finale de la VAN ajustée à la Modigliani-Miller.

Par ailleurs, pour l'approche classique, la valeur de la firme est égale à l'expression suivante :

$$\text{VAN} = \sum_{t=1}^{n} \frac{E(CF_t)(1 - t_c)}{(1 + \text{WACC})^t} \qquad (69)^{16}$$

L'approche classique actualise les flux monétaires de l'entreprise, quelle que soit leur catégorie, au coût moyen du capital (WACC). Les flux monétaires excluent les intérêts payés par l'entreprise puisque les flux monétaires après impôts seront distribués aux créanciers et aux actionnaires. L'effet bénéfique de la dette sur la valeur de l'entreprise est directement ressenti dans le coût moyen du capital (WACC)[17].

---

16. Il est facile de démontrer que la VAN classique et la VAN ajustée donnent des résultats identiques. Copeland et Weston (1988) ont présenté une preuve rapide à ce sujet. Nous voulons montrer que l'équation de la VAN ajustée pour la détermination de la valeur d'une firme, soit : $V_L = V_u + t_cB$ et celle de la VAN classique : $V_L = \frac{E(NOI)(1 - t_c)}{WACC}$ donnent des résultats identiques. Toute la preuve repose sur l'équation (16) ayant trait à la relation entre le coût moyen du capital et le coût d'opportunité du capital. Selon cette équation : $WACC = \rho\left(1 - t_c \frac{B}{B + S}\right)$. Or on sait que la valeur d'une firme est aussi égale à la somme des valeurs marchandes de sa dette et de son équité, c'est-à-dire : $V_L = B + S$. En substituant cette valeur dans l'équation du WACC, on obtient : $WACC = \rho\left(1 - t_c \frac{B}{V_L}\right) = \rho\left(\frac{V_L - t_cB}{V_L}\right)$. En mettant ρ en évidence, on a : $\rho = \frac{V_L WACC}{V_L - t_cB}$. Or : $V_u = V_L - t_cB = \frac{E((NOI)(1 - t_c)}{\rho}$. L'expression de ρ devient : $\rho = \frac{V_L WACC}{\frac{E(NOI)(1 - t_c)}{\rho}}$. Ce qui implique : $E((NOI)(1 - t_c) = V_L WACC$ $\Rightarrow V_L = \frac{E(NOI)(1 - t_c)}{WACC}$. L'équivalence entre la VAN classique et la VAN ajustée est donc démontrée. Ce qui démontre aussi que lorsque l'on utilise le WACC comme taux d'actualisation, on doit faire abstraction des intérêts après impôts dans les flux monétaires.

17. C'est-à-dire que les flux monétaires sont égaux à l'expression suivante : Profits après impôts + dépréciation + $(1 - t_c)$ intérêts de la dette. Les flux monétaires libérés sont pour leur part corrigés des investissements de l'entreprise.

Dans la section suivante, nous élaborons le modèle de Modigliani et Miller pour prendre en compte le phénomène de la croissance de l'entreprise. L'essentiel de ce modèle se retrouve dans l'article publié par ces auteurs en 1961[18].

2.5. Modèles d'évaluation de l'entreprise avec croissance

Notre point de départ est la valeur d'une entreprise sans croissance mais avec levier :

$$V_L = \frac{E(CF)(1 - t_c)}{WACC} \tag{70}$$

Pour une entreprise qui croît, le temps prend une dimension toute spéciale. C'est en effet à travers le temps que se déroule la croissance de l'entreprise. En plus d'effectuer des investissements pour pallier l'obsolescence du capital, elle investit également pour assurer sa croissance. Les flux monétaires libérés (CFL) de l'entreprise à la période t sont donc égaux à :

$$CFL_t = CF_t - I_t \tag{71}$$

Pour en arriver à la détermination de la valeur d'une entreprise qui connaît une période de croissance, nous recourons à l'expression du taux de rendement d'une action :

$$\rho_{t+1} = \frac{(P_{t+1} - P_t) + div_{t+1}}{P_t} \tag{72}$$

où div_{t+1} désigne le dividende par action au temps (t + 1). Mettons P_t en facteur dans cette équation. Nous obtenons :

$$P_t = \frac{div_{t+1} + P_{t+1}}{1 + \rho_{t+1}} \tag{73}$$

18. Miller, M.H. et F. Modigliani (1961), « Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares », *Journal of Business*, vol. 34, p. 411-433. On retrouvera également ces modèles dans le manuel suivant : Copeland T. et J.F. Weston (1988), *Financial Theory and Corporate Policy*, 3e édition, Boston, Addison-Wesley.

Or, la valeur de l'entreprise à la période actuelle, qui par hypothèse est sans levier, est égale à :

$$V_t = n_t P_t \tag{74}$$

où n_t est le nombre d'actions émises par l'entreprise. En remplaçant P_t par sa valeur, on a :

$$V_t = \frac{n_t div_{t+1} + n_t P_{t+1}}{1 + \rho_{t+1}} = \frac{Div_{t+1} + n_t P_{t+1}}{1 + \rho_{t+1}} \tag{75}$$

où Div_{t+1} est le total des dividendes versés en (t + 1). À partir de cette équation, Miller et Modigliani (1961) démontrent que le montant de dividendes versés n'influence pas la valeur de la firme en ce sens que nous pouvons l'éliminer de l'équation de la valeur de la firme.

Par définition, à la période (t + 1), les sources de fonds doivent être égales aux utilisations de fonds. Puisque l'entreprise ne recourt pas à la dette par hypothèse, les sources de fonds sont constituées des flux monétaires d'exploitation et de l'émission de nouvelles actions. Les utilisations de fonds comprennent le paiement de dividendes et l'investissement pour des fins de croissance. On a :

$$CF_{t+1} + m_{t+1} P_{t+1} = I_{t+1} + DIV_{t+1} \tag{76}$$

où I_{t+1} représente les investissements au temps (t + 1) et m_{t+1}, l'émission de nouvelles actions en (t + 1).

Le nombre d'actions en cours à la période t + 1 est donc de :

$$n_{t+1} = n_t + m_{t+1} \tag{77}$$

On peut réécrire le numérateur de l'expression de V_t de la façon suivante :

$$V_t = \frac{Div_{t+1} + n_{t+1} P_{t+1} - m_{t+1} P_{t+1}}{1 + \rho_{t+1}} \tag{78}$$

En remplaçant $m_{t+1} P_{t+1}$ par sa valeur donnée par l'équation des sources et des utilisations de fonds, on obtient :

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{DIV_{t+1} + n_{t+1} P_{t+1} - I_{t+1} - DIV_{t+1} + CF_{t+1}}{1 + \rho_{t+1}} \\ &= \frac{CF_{t+1} - I_{t+1} + V_{t+1}}{1 + \rho_{t+1}} \end{aligned} \tag{79}$$

puisque : $n_{t+1}P_{t+1} = V_{t+1}$.

On voit que les dividendes n'influencent pas la valeur d'une firme. En effet, le montant des dividendes versés se ramène à une simple question de financement. Par exemple, si une firme veut payer des dividendes en excédent de ses flux monétaires d'exploitation tout en maintenant les projets d'investissement qu'elle veut entreprendre, elle n'a qu'à émettre davantage d'actions. Cela n'exerce alors aucun impact sur sa valeur.

La formule de la valeur d'une entreprise peut être simplifiée davantage en effectuant des opérations de récursivité sur V_{t+1}. En effet, selon la formule de V_t, V_0 est égal à, en supposant que ρ est fixe :

$$V_0 = \frac{CF_1 - I_1}{(1+\rho)} + \frac{V_1}{(1+\rho)} \tag{80}$$

Mais V_1 est égal à :

$$V_1 = \frac{CF_2 - I_2}{(1+\rho)} + \frac{V_2}{(1+\rho)} \tag{81}$$

En reportant l'équation (81) dans l'équation (80), on obtient :

$$V_0 = \frac{CF_1 - I_1}{(1+\rho)} + \frac{CF_2 - I_2}{(1+\rho)^2} + \frac{V_2}{(1+\rho)^2} \tag{82}$$

À la limite, le dernier terme disparaît, et la valeur de la firme est égale à l'expression suivante :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t - I_t}{(1+\rho)^t} = \sum_{t=1}^{N} \frac{CFL_t}{(1+\rho)^t} \tag{83}$$

où CFL désigne : flux monétaire libéré.

Selon cette expression, la valeur de la firme est la somme actualisée des flux monétaires qu'elle n'utilise pas pour des fins d'investissement, ce qui semble bien raisonnable. En état de non-croissance, I_t est nul et l'on retrouve la formule de la valeur de la firme en état de stagnation.

Pour introduire plus de dynamisme dans ce modèle, nous supposons que les flux monétaires évoluent comme suit :

$$CF_{t+1} = CF_t + r_t I_t \tag{84}$$

où r_t est le taux de rendement espéré sur les investissements.

Par récursivité, on obtient :

$$CF_2 = CF_1 + r_1 I_1 \tag{85}$$

$$CF_3 = CF_2 + r_2 I_2 = CF_1 + r_1 I_1 + r_2 I_2 \tag{86}$$

et ainsi de suite. Il est donc possible d'exprimer tous les flux monétaires futurs en termes du flux monétaire initial : CF_1. En substituant ces flux récursifs dans l'expression (83) de la valeur de la firme, on a :

$$V_0 = \frac{CF_1 - I_1}{(1+\rho)} + \frac{CF_1 + r_1 I_1 - I_2}{(1+\rho)^2} + \frac{CF_1 + r_1 I_1 + r_2 I_2 - I_3}{(1+\rho)^3} + \ldots + \frac{CF_1 + \sum_{\tau=1}^{N-1} r_\tau I_\tau - I_N}{(1+\rho)^N} \tag{87}$$

On peut simplifier l'équation (87) en regroupant les termes de la façon suivante :

$$V_0 = \frac{CF_1}{(1+\rho)} + \frac{CF_1}{(1+\rho)^2} + \ldots + \frac{CF_1}{(1+\rho)^N} + I_1\left[\frac{r_1}{(1+\rho)^2} + \frac{r_1}{(1+\rho)^3} + \ldots \frac{r_1}{(1+\rho)^N} - \frac{1}{1+\rho}\right] + I_2\left[\frac{r_2}{(1+\rho)^3} + \frac{r_2}{(1+\rho)^4} + \ldots \frac{r_2}{(1+\rho)^N} - \frac{1}{1+\rho}\right] + \ldots \tag{88}$$

expression qui se généralise évidemment comme suit :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_1}{(1+\rho)^t} + \sum_{t=1}^{N} I_t \left[\left(\sum_{\tau=t+1}^{N} \frac{r_t}{(1+\rho)^\tau} \right) - \frac{1}{(1+\rho)^t} \right] \tag{89}$$

On peut simplifier cette expression en se rendant compte que le premier terme est une annuité infinie dont le paiement constant est de CF_1. On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_1}{(1+\rho)^t} = \frac{CF_1}{\rho} \tag{90}$$

La première sommation dans les crochets de l'équation (89) peut également être simplifiée. Comme cette sommation débute en (t + 1), nous la ramenons à la période 1 et nous pouvons alors appliquer la formule de Gordon (1959) sans croissance :

$$\sum_{\tau=t+1}^{N} \frac{r_t}{(1+\rho)^\tau} = \frac{1}{(1+\rho)^t} \sum_{\tau=1}^{N-t} \frac{r_t}{(1+\rho)^\tau} \tag{91}$$

À la limite, quand N tend vers l'infini, on a :

$$\frac{1}{(1+\rho)^t} \lim_{N\to\infty} \sum_{\tau=1}^{N-t} \frac{r_t}{(1+\rho)^\tau} = \frac{1}{(1+\rho)^t} \frac{r_t}{\rho} \tag{92}$$

L'équation de la valeur de la firme devient, à la suite de ces simplifications :

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{CF_1}{\rho} + \sum_{t=1}^{N} I_t \left[\left(\frac{r_t}{\rho(1+\rho)^t} \right) - \frac{1}{(1+\rho)^t} \right] \\ &= \frac{CF_1}{\rho} + \sum_{t=1}^{N} I_t \left[\left(\frac{r_t}{\rho(1+\rho)^t} \right) - \frac{\rho}{\rho(1+\rho)^t} \right] \end{aligned} \tag{93}$$

On obtient finalement :

$$V_0 = \frac{CF_1}{\rho} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{I_t(r_t - \rho)}{\rho(1+\rho)^t} \tag{94}$$

L'équation (94) est celle d'une firme sans levier qui enregistre une période infinie de croissance. Cette équation s'interprète facilement. Le premier terme est la valeur ajoutée à l'entreprise par les actifs existants. C'est la valeur de la firme associée à l'absence de croissance.

Mais l'entreprise investit également pour accroître sa valeur. Elle effectue à chaque période des investissements I_t de façon à croître. Selon l'équation (94), ces investissements ajouteront à la valeur de l'entreprise si :

$$r_t > \rho \tag{95}$$

Pour qu'un investissement ajoute à la valeur de la firme, il faut que son taux de rendement soit plus important que le coût d'opportunité des fonds des actionnaires de l'entreprise. Ceux-ci sont indifférents entre investir dans l'entreprise ou placer leurs fonds ailleurs si le taux de rendement des investissements de cette entreprise est égal au coût d'opportunité de leur capital. En effet, dans pareil cas, ils obtiennent le même rendement en investissant dans l'entreprise en cause ou ailleurs. Et ils feraient mieux de ne pas investir de fonds dans l'entreprise si le taux de rendement de ses investissements est plus faible que le coût d'opportunité de ces fonds. Ils retireront un meilleur rendement en investissant ailleurs. Comme l'indique l'équation (94), l'entreprise verra sa valeur abaissée si le taux de rendement de ses investissements est plus faible que le coût d'opportunité du capital de ses actionnaires. Un investissement aura une valeur ajoutée du point de vue de la firme en autant que son taux de rendement est supérieur au coût des fonds de l'entreprise.

Nous supposons maintenant que le taux de rendement des investissements est constant, c'est-à-dire que : $r_t = r$. Nous supposons également que l'entreprise a un taux constant de rétention de ses flux monétaires pour des fins d'investissement, taux que nous désignons par K.

Le niveau de ses investissements à une période donnée est donc égal à :

$$I_t = K(CF_t) \tag{96}$$

Mais nous savons que :

$$CF_t = CF_{t-1} + rI_{t-1} \tag{97}$$

En substituant l'équation (96) dans l'équation (97), on obtient :

$$CF_t = CF_{t-1} + rKCF_{t-1} = CF_{t-1}(1 + rK) \tag{98}$$

Par substitutions successives, on exprime CF_t en fonction de CF_1 :

$$CF_t = CF_1(1 + rK)^{t-1} \tag{99}$$

rK étant ici le taux de croissance des flux monétaires, soit g.

Remplaçons I_t par son équivalence en termes de CF_t dans l'expression de la valeur d'une entreprise. Nous obtenons :

$$V_0 = \frac{CF_1}{\rho} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{KCF_t(r - \rho)}{\rho(1 + \rho)^t} \tag{100}$$

En remplaçant CFt par sa valeur donnée par l'expression (99), on obtient :

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{CF_1}{\rho} + KCF_1\left(\frac{r - \rho}{\rho}\right)\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1 + rK)^{t-1}}{(1 + \rho)^t} \\ &= \frac{CF_1}{\rho}\left[1 + \frac{K(r - \rho)}{1 + rK}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1 + rK}{1 + \rho}\right)^t\right] \end{aligned} \tag{101}$$

Dans l'équation (101), nous avons mis CF_1 en facteur et nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur de la sommation par (1 + rK) de façon à affecter le ratio $\left(\frac{1 + rK}{1 + \rho}\right)$ de l'exposant t, qui devient alors une progression géométrique que l'on peut solutionner.

La sommation qui apparaît dans l'équation (101) est une progression géométrique du type :

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1 + g}{1 + r}\right)^t \tag{102}$$

Sa solution est bien sûr :

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{t} = \frac{1+g}{r-g}$$ [19]

19. Pour le montrer, prenons la formule du prix d'une action de Gordon :

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{(1+r)} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+r)^n}$$

où P_0, le prix d'une action, est la valeur actualisée des dividendes qu'elle versera dans l'avenir, D_0 étant le dividende actuel et g, son taux de croissance annuel. Cette expression est une progression géométrique de raison : $\left(\frac{1+g}{1+r}\right)$. Désignons cette raison par u. Le prix de l'action devient :

$$P_0 = D_0u + D_0u^2 + \ldots + D_0u^n$$
$$P_0 = D_0(u + u^2 + \ldots + u^n)$$

L'expression entre parenthèses est bien la progression que nous cherchons à solutionner. Multiplions cette équation par u. Nous avons :

$$uP_0 = D_0u^2 + D_0u^3 + \ldots + D_0u^{n+1}$$

Soustrayons uP_0 de P_0 :

$$P_0 - uP_0 = D_0u - D_0u^{n+1}$$

Mettons P_0 en évidence :

$$P_0 = \frac{D_0u(1-u^n)}{1-u}$$

Remplaçons u par sa valeur. Après quelques transformations élémentaires, on obtient :

$$P_0 = D_1\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g}\right)$$

où $D_1 = D_0(1+g)$.
Si n tend vers l'infini, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n = 0 \qquad \text{si } g < r$$

L'équation du prix de l'action devient à la limite :

$$P_0 = D_0\frac{1+g}{r-g}$$

C'est l'équation de Gordon-Shapiro. On a bien prouvé que :

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{t} = \frac{1+g}{r-g}$$

La valeur de l'entreprise devient donc :

$$V_0 = \frac{CF_1}{\rho}\left[1 + \frac{K(r-\rho)}{1+Kr}\frac{1+Kr}{\rho-Kr}\right] = \frac{CF_1}{\rho}\left[\frac{\rho - Kr + Kr - K\rho}{\rho - Kr}\right] \quad (103)$$

$$V_0 = \frac{CF_1(1-K)}{\rho - Kr} \quad (104)$$

Cette équation est la forme finale de la valeur d'une entreprise sans levier qui croît indéfiniment au taux Kr. En fait, l'équation (104) n'est qu'une adaptation de l'équation de Gordon-Shapiro à la valeur de l'entreprise. Nous pouvons en effet retrouver rapidement cette équation en sachant que le numérateur de l'équation (104) représente les flux monétaires non investis (flux monétaires libérés), soit les dividendes, et que Kr est égal à g. L'équation (104) peut donc être réécrite comme suit :

$$V_0 = \frac{Div_1}{\rho - g} \quad (105)$$

ce qui est l'équation de Gordon-Shapiro lorsqu'on la divise par le nombre d'actions émises par l'entreprise puisque l'équation de Gordon-Shapiro est formulée en termes du prix d'une action.

On retrouve donc une ancienne équation qui, initialement, avait peu de fondements. Modigliani et Miller l'ont replacée dans un contexte beaucoup plus riche et lui ont donné ses lettres de noblesse. Elle est maintenant partie inhérente d'un modèle général d'évaluation de l'entreprise. On peut donc mieux juger de ses limites et des hypothèses qui la sous-tendent. Mais on peut également, en changeant les hypothèses, formuler d'autres scénarios de croissance de l'entreprise à partir de l'équation (101) d'évaluation générale de l'entreprise en situation de croissance, ce que ne permettait pas l'équation de Gordon-Shapiro.

Nous allons maintenant supposer que la firme ne croît que durant une période donnée T, ce qui apparaît plus réaliste. Elle retourne par la suite à une situation de non-croissance. À remarquer que la firme peut également connaître une période temporaire de décroissance, c'est-à-dire une période où ses flux monétaires diminuent

pour revenir par la suite à la normale. Reprenons l'équation (101) de la valeur d'une entreprise de façon à présenter le modèle de croissance finie, en supposant que cette croissance dure T périodes.

$$V_0 = \frac{CF_1}{\rho}\left[1 + \frac{K(r-\rho)}{1+rK}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+rK}{1+\rho}\right)^t\right] \tag{106}$$

Le terme :

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+rK}{1+\rho}\right)^t \tag{107}$$

est une progression géométrique de raison : $\frac{1+rK}{1+\rho}$. Nous avons donné sa solution à la note 19 quant T est fini. En effet, cette progression géométrique est de la forme : $\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t$. On rappelle que sa solution est :

$$(1+g)\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T}{r-g}\right] \tag{108}$$

En effectuant les substitutions appropriées, la progression géométrique donnée par l'équation (107) admet donc comme solution :

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+rK}{1+\rho}\right)^t = (1+rK)\left[\frac{1-\left(\frac{1+rK}{1+\rho}\right)^T}{\rho-rK}\right] \tag{109}$$

En substituant l'équation (109) dans l'équation de la valeur de la firme (106), on a :

$$V_0 = \frac{CF_1}{\rho}\left[1 + \frac{Kr-\rho K}{\rho-Kr}\left(1-\left(\frac{1+Kr}{1+\rho}\right)^T\right)\right] \tag{110}$$

Miller et Modigliani (1961) ont simplifié davantage cette équation de façon à la rendre plus facile d'interprétation en approximant le dernier ratio de l'équation. Désignons par (1 + S) ce ratio, c'est-à-dire :

$$\frac{1 + Kr}{1 + \rho} = 1 + S \tag{111}$$

Et formulons l'approximation suivante :

$$(1 + S)^T \cong 1 + TS \tag{112}$$

Cette approximation est d'autant meilleure que $\frac{1 + Kr}{1 + \rho}$ est rapproché de 1 et que T est petit. En solutionnant pour S, on obtient :

$$S = \frac{1 + Kr}{1 + \rho} - 1 = \frac{Kr - \rho}{1 + \rho} \tag{113}$$

L'approximation de :

$$\left(\frac{1 + Kr}{1 + \rho}\right)^T \tag{114}$$

est donc égale à :

$$1 + TS = 1 + T\frac{Kr - \rho}{1 + \rho} = 1 - T\frac{\rho - Kr}{1 + \rho} \tag{115}$$

En reportant ce résultat dans l'équation (110), on obtient :

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{CF_1}{\rho} + \frac{K(r - \rho)}{\rho - Kr} T \frac{\rho - Kr}{1 + \rho} \frac{CF_1}{\rho} \\ &= \frac{CF_1}{\rho} + K(CF_1)T\left[\frac{r - \rho}{\rho(1 + \rho)}\right] \end{aligned} \tag{116}$$

Le premier terme de l'équation (116) de la valeur d'une firme est celle qui est reliée aux actifs existants. C'est la valeur qu'aurait une firme si elle n'enregistrait aucune croissance. Elle ne fait qu'entretenir ses équipements et elle produit un flux perpétuel égal à CF_1. Elle est alors assimilable à un consol, soit une obligation perpétuelle.

Pour sa part, le deuxième terme de l'équation (116) est relié à la croissance temporaire de la firme. Cette croissance dure T périodes. Durant ce laps de temps, les investissements enregistrent un taux de rendement supérieur au coût d'opportunité du capital des actionnaires de la firme. La valeur ajoutée de tels investissements est donnée par le deuxième terme de l'équation de la valeur d'une firme. À remarquer que la firme peut enregistrer une période de décroissance, auquel cas le taux de rendement des investissements est inférieur au coût d'opportunité des fonds. La valeur de l'entreprise s'en voit alors réduite.

Il nous reste à introduire les impôts dans le modèle. Comme nous l'avons vu antérieurement, l'impôt a pour effet de dégonfler les flux monétaires et de modifier le coût d'opportunité du capital. Dans pareil cas, les flux monétaires après impôts de l'entreprise sont actualisés au coût moyen du capital.

Dans un monde avec impôts, l'expression de la valeur d'une entreprise qui connaît une période de croissance temporaire est donc égale à :

$$V_0 = \frac{E(CF_1)(1 - t_c)}{WACC} + K\left[E(CF_1)(1 - t_c)T\right]\left[\frac{r - WACC}{WACC(1 + WACC)}\right] \qquad (117)$$

À remarquer que nous avons exprimé les flux monétaires sous la forme de leur espérance mathématique pour mieux faire ressortir leur caractère incertain.

Le tableau 2 résume les diverses formes que peut prendre l'équation de la valeur d'une entreprise selon les diverses hypothèses envisagées.

Il nous reste à indiquer comment estimer les paramètres de l'équation (117) de la valeur de la firme. Comme ces paramètres sont prospectifs et non rétrospectifs, ils ne devraient pas, a priori, être estimés à partir des rapports comptables de l'entreprise. Mais à défaut d'informations internes ou privilégiées, l'analyste financier doit nécessairement recourir aux rapports comptables historiques de la firme pour estimer ces paramètres. Considérons-les l'un après l'autre.

TABLEAU 2 **Modèles d'évaluation de l'entreprise sous diverses hypothèses**

Hypothèses	Modèles
1. Cas général sans impôts	$V_u = \frac{E(CF_1)}{1+\rho} + \frac{E(CF_2)}{(1+\rho)^2} + \ldots + \frac{E(CF_n)}{(1+\rho)^N}$
2. Cas 1 en supposant que $E(CF_1) = E(CF_2) = \ldots = E(CF_n)$ et que n tend vers l'infini. Équation de Gordon Shapiro sans croissance.	$V_u = \frac{E(CF)}{\rho}$
3. Cas 2 avec impôts	$V_l = \frac{E(CF)(1-t_c)}{WACC}$
4. Croissance de l'entreprise sans impôts : cas général	$V_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t - I_t}{(1+\rho)^t}$
5. Cas 4 avec modèle de la croissance des flux monétaires : $CF_{t+1} = CF_t + r_t I_t$	$V_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_1}{(1+\rho)^t} + \sum_{t=1}^{N} I_t \left[\left(\sum_{\tau=1+1}^{N} \frac{r_t}{(1+\rho)^\tau} \right) - \frac{1}{(1+\rho)^t} \right]$
6. Cas 5 avec croissance infinie	$V_0 = \frac{CF_1}{\rho} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{I_t(r_t - \rho)}{\rho(1+\rho)^t}$
7. Cas 6 avec modèle des investissements : $I_t = K(CF_t)$. Équation de Gordon Shapiro avec croissance infinie : $r_t = r$.	$V_0 = \frac{CF_1(1-K)}{\rho - Kr}$
8. Cas 7 avec croissance temporaire	$V_0 = \frac{CF_1}{\rho} + K(CF_1)T\left[\frac{r-\rho}{\rho(1+\rho)}\right]$
9. Cas 8 avec impôts	$V_0 = \frac{E(CF_1)(1-t_c)}{WACC} + K\left[E(CF_1)(1-t_c)T\right]\left[\frac{r - WACC}{WACC(1+WACC)}\right]$

Le ratio de rétention des fonds K

De façon à ne pas trop biaiser les paramètres, on se servira de moyennes des rubriques pertinentes des états financiers d'une entreprise sur les trois à cinq dernières années. Nous ne le répéterons pas.

En autant que l'entreprise n'a pas émis de nouvelles actions au cours des dernières années, on peut se baser sur le taux de paiement du dividende pour estimer K. Le taux de paiement du dividende[20], défini par rapport aux flux monétaires, est égal au ratio suivant :

$$\text{taux de paiement du dividende} = \frac{\text{total des dividendes versés}}{CF(1 - t_c)}$$

K est alors égal à :

$$K = 1 - \text{taux de paiement du dividende}$$

Le taux de rendement des investissements : r

Le taux de rendement des investissements peut être approximé par le ratio des flux monétaires après impôts à la valeur aux livres des actifs :

$$r_i = \frac{CF(1 - t_c)}{\text{valeur aux livres des actifs}}$$

Le taux de croissance des flux monétaires : g

Comme nous l'avons vu antérieurement, il est égal au produit du taux de rétention des fonds de l'entreprise et du taux de rendement de ses investissements :

$$g = K \times r_i \tag{118}$$

20. On peut également définir le taux de paiement du dividende par rapport aux profits après impôts.

Le coût moyen du capital : WACC

Tel que défini antérieurement, le coût moyen du capital est égal à la moyenne pondérée du taux de rendement espéré de la dette de l'entreprise (r_b), corrigé de l'impôt, et du taux de rendement espéré (r_s) des actions qu'elle a émises :

$$\text{WACC} = \frac{D}{D+S} r_b\left(1 - t_c\right) + \frac{S}{D+S} r_s \tag{119}$$

Exprimons les deux coefficients de pondération en termes du levier (L) en divisant leur numérateur et leur dénominateur par S :

$$\begin{aligned}\text{WACC} &= \frac{\frac{D}{S}}{\frac{D}{S}+1} r_b\left(1 - t_c\right) + \frac{1}{\frac{D}{S}+1} r_s \\ &= \frac{L}{1+L} r_b\left(1 - t_c\right) + \frac{1}{1+L} r_s \end{aligned} \tag{120}$$

Dans cette expression, L représente le levier-cible de l'entreprise, c'est-à-dire celui qu'elle recherche à long terme. On peut l'approximer comme une moyenne des leviers passés de l'entreprise si rien ne porte à croire que celle-ci a l'intention de modifier son levier. r_b est le taux de rendement prévu sur la dette de l'entreprise. Pour le calculer, on pourra effectuer une prévision du taux sans risque puis ajouter la prime de risque qui s'applique à la dette de la compagnie. Cette prime de risque dépend de la cote de crédit de la compagnie qui est fournie par une agence de cotation, comme CBRS et DBRS au Canada et Moody's et Standard and Poor's aux États-Unis.

Pour estimer le taux de rendement espéré sur les actions d'une compagnie, on se sert habituellement de l'équation du CAPM ayant trait à la détermination du rendement espéré d'une action :

$$E\left(r_s\right) = r_f + \beta\left[E\left(R_m\right) - r_f\right] \tag{121}$$

Dans cette équation, $E(r_s)$ désigne le taux de rendement espéré sur les actions d'une entreprise ; r_f est le taux de rendement sur des titres sans risque ; β est le bêta des actions de ladite entreprise, qui mesure le risque relatif des actions de l'entreprise par rapport à celui du portefeuille du marché dont le bêta est, par définition, égal à

l'unité ; le terme entre crochets est la prime de risque du portefeuille du marché, $E(R_m)$ étant le taux de rendement espéré du portefeuille du marché. La prime de risque du marché est habituellement comprise entre 6 % et 7 %[21].

2.6. Modèles comptables d'évaluation de l'entreprise

Dans cette section, nous nous attaquons aux modèles comptables d'évaluation d'une entreprise. Comme leur nom l'indique, ces modèles font appel aux données comptables d'une entreprise pour prévoir la valeur marchande de ses actifs. Nous distinguons ici trois de ces modèles : *i)* le modèle de la valeur aux livres ; *ii)* le modèle de la valeur aux livres ajustée ; *iii)* le modèle de la capitalisation des bénéfices[22].

Le modèle de la valeur aux livres

Cette technique de calcul de la valeur d'une entreprise n'est pas à proprement parler un modèle puisqu'elle ne repose sur aucune hypothèse particulière, si ce n'est que la valeur aux livres des actifs constitue une bonne approximation de leur valeur marchande, ce qui est une hypothèse héroïque, cela s'entend. En effet, la valeur aux livres des actifs est égale à leur coût d'origine diminué de l'amortissement accumulé de ces actifs. Or, cette soustraction n'est habituellement pas égale à la valeur marchande des actifs. Quoi qu'il en soit, en vertu de la méthode de la valeur aux livres, la valeur d'une compagnie est égale à cette valeur aux livres des actifs.

21. On trouvera plus de détails sur cette équation dans tout bon manuel de gestion financière.

22. Dans cette section, nous nous référons aux documents suivants : Perreault, Y.G. (1993), *L'entreprise familiale*, Montréal, Les Éditions Transcontinental et la fondation de l'Entrepreneurship, annexe ; Perreault, Y.G. et R. Théoret (1992), « Cinq façons d'évaluer la valeur de votre entreprise », *PME*, vol. 8, nº 7, septembre.

Le modèle de la valeur aux livres ajustée

La valeur aux livres ajustée prend en compte l'achalandage et effectue en plus une correction à la valeur aux livres des immobilisations, car ces dernières ont tendance à s'apprécier au fil du temps.

Pour calculer l'achalandage d'une entreprise, on calcule l'écart entre son rendement de l'avoir et celui de l'industrie dont elle fait partie sur une certaine période de temps, disons sur ses cinq dernières années d'exploitation. Son achalandage se définit alors comme suit :

$$\text{achalandage} = \left(\text{écart de rendement de l'avoir}\right) \times \text{avoir de l'entreprise} \tag{122}$$

Par ailleurs, les immobilisations ont tendance à s'apprécier dans le temps, ce que ne prend pas en compte la méthode de la valeur aux livres, car elle comptabilise les immobilisations à leur coût d'origine. La méthode de la valeur aux livres ajustée ajoute cette appréciation à la valeur aux livres. L'évaluation de la valeur d'une entreprise en vertu de la méthode de la valeur aux livres ajustée est égale à l'expression suivante :

$$\text{Valeur aux livres ajustée} = \text{valeur aux livres} + \text{achalandage} + \text{correction de la valeur des immobilisations} \tag{123}$$

Modèle de la capitalisation des bénéfices

La relation entre le prix d'une action (P) et son bénéfice par action (BPA) est égale à l'expression suivante :

$$\text{P} = \frac{\text{P}}{\text{BPA}} \times \text{BPA} \tag{124}$$

Dans cette expression, le rapport (P/BPA) désigne le ratio cours-bénéfices (*price/earnings ratio* ou *P/E)*. Par définition, la valeur marchande de l'avoir est égale à l'expresson suivante :

$$\text{Valeur marchande de l'avoir} = \frac{\text{P}}{\text{BPA}} \times \text{BPA} \times \text{nombre d'actions} \tag{125}$$

soit :

$$\text{Valeur marchande de l'avoir} = \frac{P}{BPA} \times \text{bénéfice net} \qquad (126)$$

Or, le bénéfice net est égal à l'expression suivante :

$$\text{Bénéfice net} = BAII(1 - t_c) - \left[(1 - t_c) \times r_b \times TE \times V_c\right] \qquad (127)$$

Dans cette expression, BAII désigne le bénéfice net avant intérêts et impôts. Pour obtenir le bénéfice net, il faut d'abord multiplier BAII par $(1 - t_c)$, ce qui nous donne le BAII après impôts. À ce dernier montant, il faut soustraire la facture d'intérêts de l'entreprise après impôts, ce qui constitue le second terme de l'expression du bénéfice net. TE désigne le taux d'endettement de l'entreprise, défini comme le rapport entre la dette et la valeur (V_c) de l'entreprise. En multipliant TE par V_c, on obtient donc la dette de l'entreprise. Cette dette, multipliée par le taux d'intérêt de la dette r_b, donne le montant d'intérêts que doit payer l'entreprise. On le multiplie par $(1 - t_c)$ pour l'exprimer sur une base après impôts. Ce dernier montant, déduit du bénéfice avant intérêts, donne le bénéfice net.

En remplaçant le bénéfice net par sa valeur donnée à (127) dans l'équation (126), on obtient :

$$\text{Valeur marchande des actions} = \left\{\begin{matrix} BAII(1 - t_c) \\ -\left[(1 - t_c) r_b \times TE \times V_c\right] \end{matrix}\right\} \times \frac{P}{BPA} \qquad (128)$$

La valeur d'une entreprise (V_c) est égale à la somme de sa dette et de la valeur marchande de ses actions :

$$V_c = \text{dette} + \text{valeur marchande des actions} \qquad (129)$$

Dans cette dernière expression, remplaçons la dette et la valeur marchande des actions par leur expression respective :

$$V_c = \left(T_E \times V_c\right) + \left\{BAII(1 - t_c) - \left[(1 - t_c) r_b \times T_E \times V_c\right]\right\} \frac{P}{BPA} \qquad (130)$$

Mettons V_c, la valeur de l'entreprise, en facteur :

$$V_c - T_E V_c + \begin{bmatrix} (1 - t_c) r_b \\ \times T_E \times V_c \end{bmatrix} \frac{P}{BPA} = BAII(1 - t_c) \frac{P}{BPA}$$

$$V_c \left\{ 1 - T_E + \begin{bmatrix} (1 - t_c) r_b \\ \times T_E \end{bmatrix} \frac{P}{BPA} \right\} = BAII(1 - t_c) \frac{P}{BPA}$$

$$V_c = \frac{BAII(1 - t_c) \dfrac{P}{BPA}}{1 - T_E + \left[(1 - t_c) r_b \times T_E\right] \dfrac{P}{BPA}}$$

$$= \frac{BAII(1 - t_c) \dfrac{P}{BPA}}{1 - T_E \left[1 - (1 - t_c) r_b \dfrac{P}{BPA}\right]} \qquad (131)$$

C'est là le modèle de la valeur de l'entreprise basé sur le multiple (P/BPA), soit le rapport cours-bénéfices. On voit que si le taux d'endettement T_E est nul, c'est-à-dire si l'entreprise ne se finance que par actions, sa valeur se réduit à :

$$V_c = BAII(1 - t_c) \frac{P}{BPA} \qquad (132)$$

soit la simple capitalisation du bénéfice par le multiple (P/BPA). On peut réécrire la relation (132) comme suit :

$$V_c = BAII(1 - t_c) \times \frac{P}{BAII(1 - t_c) \,/\, \text{nombre d'actions}}$$

$$V_c = P \times \text{nombre d'actions} = \text{valeur marchande des actions} \qquad (133)$$

relation évidente, s'il en est.

3. Simulation de la valeur d'une entreprise sur Excel

Nous envisageons maintenant un modèle simulé de la valeur d'une entreprise, disons XYZ[23]. Pour ce faire, nous recourons au modèle général de la VAN d'une entreprise, qui se formule comme suit :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{CFL_t}{(1 + WACC)^t} \tag{134}$$

où CFL désigne les flux monétaires libérés. Nous allons effectuer une simulation des flux monétaires de l'an 0 à l'an 5, puis nous allons supposer que les flux monétaires de l'entreprise croissent au taux g, qui est égal au taux de croissance des ventes dans notre modèle. À la suite de cette hypothèse, la valeur de l'entreprise devient :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{5} \frac{CFL_t}{(1 + WACC)^t} + \left[\frac{CFL_5(1 + g)}{(1 + WACC)^5 (WACC - g)} \right] \tag{135}$$

où WACC > g. Le terme entre crochets dans l'équation (135) est une simple application de l'équation de Gordon.

Avant de poursuivre, il convient de donner une définition plus concrète de la notion de *flux monétaire libéré* que celle que nous avons utilisée pour les modèles théoriques. Celui-ci se veut une mesure des fonds générés par les opérations d'une entreprise au cours d'une période donnée. Les flux monétaires sont la somme (ou la soustraction) des éléments suivants :

i) profits après impôts ;
ii) dépréciation ;
iii) intérêts payés par l'entreprise après impôts ;
iv) (intérêts reçus par l'entreprise sur ses placements) ;
v) (accroissement des actifs circulants (actifs à court terme)) ;
vi) accroissement des passifs à court terme ;
vii) (accroissement des immobilisations évaluées au coût).

23. Pour cette section, nous nous inspirons de : Benninga, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge, The MIT Press.

Les éléments qu'il faut soustraire pour calculer les flux monétaires apparaissent entre parenthèses. Voici la justification de chacune de ces rubriques comme composante des flux monétaires.

La présence des profits après impôts dans les flux monétaires de l'entreprise se passe de commentaires. C'est là la mesure principale de la rentabilité d'une entreprise. La dépréciation est rajoutée puisqu'elle est une dépense qui ne donne pas lieu à une sortie de fonds. Les paiements d'intérêts après impôts sont rajoutés, car le flux monétaire se veut une mesure des fonds générés par les opérations d'une entreprise au cours d'une période donnée. On rajoute donc les paiements d'intérêts après impôts pour neutraliser l'effet de ceux-ci sur les profits de l'entreprise. De façon symétrique, on se doit de retrancher les intérêts après impôts reçus sur ses placements lors du calcul des flux monétaires.

Par ailleurs, on doit retrancher l'accroissement des actifs circulants lors du calcul des flux monétaires. En effet, lorsque les ventes d'une entreprise augmentent, il en résulte des investissements additionnels au chapitre des stocks et des comptes à recevoir. Ces investissements ne constituent pas une dépense pour les fins fiscales mais ils n'en représentent pas moins un ponction dans les fonds de l'entreprise. Ils constituent donc un flux monétaire négatif. De façon symétrique, on doit ajouter l'augmentation des passifs à court terme au calcul des flux monétaires. Par exemple, l'augmentation des comptes à payer libère des fonds pour l'entreprise. Finalement, on doit retrancher les immobilisations évaluées au coût puisque celles-ci diminuent les flux monétaires libérés de l'entreprise.

Le point de départ de notre simulation consiste en une série d'hypothèses quant aux valeurs des paramètres dans notre modèle. Elles apparaissent au tableau 3 qui n'est qu'une simple copie d'une partie de notre chiffrier Excel (Excel 2000, version anglaise) à partir duquel nous avons effectué notre simulation.

L'élément central de cette simulation est la prévision de la croissance des ventes de l'entreprise XYZ qui sert de point de départ à la prévision des flux monétaires. Certaines rubriques des états financiers, comme le coût des biens vendus, sont reliés aux ventes. Par ailleurs, le modèle comporte certains paramètres ayant trait à la structure du bilan. Par exemple, par hypothèse, les passifs à court terme représentent 95 % des passifs totaux. Le modèle comporte également une prévision

TABLEAU 3 **Les inputs de la simulation**

	B	C	D	E	F	G
1	**Évaluation de la valeur marchande de l'entreprise XYZ**					
2	**Inputs**					
3	Fonds de roulement	2				
4	Croissance des ventes	10%				
5	Actifs circulants/ventes	50%				
6	Passifs à court terme/passifs totaux	95%				
7	Croissance des immobilisations	10%				
8	Coût des biens/ventes	92%				
9	Taux de dépréciation	10%				
10	Intérêt sur la dette à court terme	10%	<--=C15+0.02			
11	Intérêt sur la dette à long terme	12%	<--=C15+.04			
12	Intérêt sur liquidités	8%	<--=C15			
13	Taux de taxation	24%				
14	Taux de paiement des dividendes	18%				
15	Taux sans risque	8%				
16	Prime de risque	7%				
17	Bêta de XYZ	1				
18	Nombre d'actions émises	100,000				
19	Autres passifs/Actifs	40%				

du taux sans risque, auquel sont reliés les autres taux du modèle. La prime de risque du marché, qui servira à la prévision du coût moyen du capital, est fixée à 7 %. C'est la différence entre l'espérance du rendement du portefeuille du marché et le taux sans risque. Les autres inputs du modèle se passent de commentaires.

Même si les données des états financiers de l'an 0 sont connues, nous avons eu recours à certaines formules pour calculer certains postes. Les états financiers de l'an 0 de l'entreprise XYZ, de même que les formules utilisées pour les construire, apparaissent au tableau 4. On retrouvera les cellules de la colonne C qui font partie de ces formules au tableau 5.

Comme nous venons de le dire, de manière à évaluer l'entreprise, nous devons d'abord prévoir ses flux monétaires au cours des cinq prochaines années. Pour ce faire, nous devons effectuer une prévision du bilan et de l'état des revenus et dépenses de XYZ pour les cinq prochaines années. Cette prévision apparaît au tableau 5.

TABLEAU 4 **Les états financiers de XYZ pour l'année 0**

	L	M	N
4	**Année**	0	
5	**États des revenus et dépenses (milliers $)**		
6	Ventes	4600	<=4600
7	Coût des biens vendus	-4232	<=-C22*C*8
8	Intérêt payé sur la dette	-84	<=-($C$10*C42)-($C$11*C43)
9	Intérêt gagné sur les liquidités	9	$C$12*C34
10	Dépréciation	-77	<=-77
11	Profits avant impôts	216	<=SUM(C22:C26)
12	Impôts	-52	<=-$C$13*C27
13	Profits après impôts	164	<=C27+C28
14	Dividendes	-30	<=-C29*$C$14
15	Bénéfices non répartis	135	<=C29+C30
16			
17	**Bilan (milliers $)**		
18	Liquidités	110	<=110
19	Actifs circulants	2300	<=$C$5*C22
20	Immobilisations		
21	Au coût	780	<=C39-C38
22	Dépréciation	-300	<=-300
23	Immobilisations nettes	480	<=480
24	**Actifs totaux**	2890	<=C34+C35+C39
25			
26	Dette à court terme	107	<=(C34+C35)/$C$3-C46
27	Dette à long terme	610	<=C40-C42-C45-C47-C48
28	Dette totale	717	<=C42+C43
29	Autres passifs	1156	<=$C$19*C40
30	dont passifs à court terme	1098	<=$C$6*C45
31	Actions	210	<=210
32	Profits non distribués	807	<=807
33	**Passifs et équité**	2890	<=C44+C45+C47+C48

On introduit les formules pertinentes des rubriques des états financiers dans la colonne de l'an 1 de manière à les prévoir, puis on les recopie pour les années 2 à 5. La clef de voûte de la simulation est la prévision des ventes. À l'année 1, les ventes sont égales à :

$$C22(1 + \$C\$4) \tag{136}$$

soit les ventes de l'année 0 multipliées par : (1 + taux de croissance prévu des ventes). Il ne faut pas oublier de mettre les signes de $ pour C4 de manière à ce que ce terme reste fixe lorsque l'on recopie cette

TABLEAU 5 **Prévision des états financiers de XYZ pour les années 1 à 5**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
20		**Année**	0	1	2	3	4	5	
21		**États des revenus et dépenses (milliers $)**							
22		Ventes	4600	5060	5566	6123	6735	7408	<--=G22*(1+$C$4)
23		Coût des biens vendus	-4232	-4655	-5121	-5633	-6196	-6816	<--=-H22*$C$8
24		Intérêt payé sur la dette	-84	-60	-37	-41	-45	-49	<--=-$C$10*(H42+G42)/2-$C$11*(H43+G43)/2
25		Intérêt gagné sur les liquidités	9	9	9	9	9	9	<--=$C$12*(G34+H34)/2
26		Dépréciation	-77	-85	-99	-115	-134	-155	<--=$C$9*(G37+H37)/2
27		Profits avant impôts	216	269	318	343	369	398	<--=SUM(H22:H26)
28		Impôts	-52	-65	-76	-82	-89	-95	<--=$C$13*H27
29		Profits après impôts	164	205	242	260	281	302	<--=H27+H28
30		Dividendes	-30	-37	-43	-47	-50	-54	<--=H29*$C$14
31		Bénéfices non répartis	135	168	198	213	230	248	<--=H29+H30
32									
33		**Bilan (milliers $)**							
34		Liquidités	110	110	111	112	113	114	<--=114
35		Actifs circulants	2300	2530	2783	3061	3367	3704	<--=$C$5*H22
36		Immobilisations							
37		Au coût	780	913	1064	1237	1435	1660	<--=H39-H38
38		Dépréciation	-300	-385	-483	-599	-732	-887	<--=G38-$C$9*(G37+H37)/2
39		Immobilisations nettes	480	528	581	639	703	773	<--G39*(1+c7)
40		**Actifs totaux**	2890	3168	3475	3812	4183	4591	<--H34+H35+H39
41									
42		Dette à court terme	107	116	127	138	151	164	<--=(h34+h35)/$C$3-H46
43		Dette à long terme	610	201	221	243	268	295	<--=H44-H42
44		Dette totale	717	317	347	381	418	459	<--=H51*(H47+H48)
45		Autres passifs	1156	1267	1390	1525	1673	1836	<--$C$19*H40
46		dont passifs à court terme	1098	1204	1320	1449	1590	1745	<--$C$6*H45
47		Actions	210	609	565	520	475	432	<--=H40-H44-H45-H48:rubrique d'ajustement
48		Profits non distribués	807	975	1173	1386	1616	1864	<--G48+H31
49		**Passifs et équité**	2890	3168	3475	3812	4183	4591	<--H44+H45+H47+H48
50									
51		**Ratio dette-équité cible**		0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	<--=0.2

formule dans les cellules E22 à H22 puisque les inputs ne se modifient pas au cours de la simulation. Cela vaut pour tous les autres paramètres du modèle.

La plupart des formules qui apparaissent dans les états financiers de XYZ de l'an 1 à l'an 5 sont assez évidentes pour que nous ne les commentions pas. Nous émettrons cependant des remarques sur trois d'entre elles. D'abord la formule de la dette à court terme. Elle découle de l'hypothèse que nous avons faite sur le fonds de roulement de l'entreprise, que nous avons fixé à 2. Le fonds de roulement est le rapport entre, d'une part, la somme des liquidités et des actifs circulants et, de l'autre, la somme de la dette à court terme et des autres passifs à court terme. On a donc :

$$\text{Liquitidés} + \text{Actifs roulants} = 2\begin{pmatrix}\text{Dette à court terme}\\ + \text{autres passifs à c.t.}\end{pmatrix} \quad (137)$$

En mettant la dette à court terme en évidence, on a :

$$\text{Dette à court terme} = \frac{\text{Liquidités} + \text{Actifs circulants}}{2} - \text{Autres passifs à c.t.} \quad (138)$$

D'où la formule qui apparaît dans les cellules se rapportant à la dette à court terme.

Ensuite, la rubrique « actions » joue un rôle particulier dans notre modèle. En effet, un modèle de simulation du bilan doit incorporer une rubrique d'ajustement qui sert à réaliser l'équilibre comptable du bilan, c'est-à-dire que la somme des actifs doit être égale à la somme des passifs et de l'équité. On qualifie une telle rubrique de *plug* en anglais. On a donc, en vertu de l'équilibre comptable du bilan :

$$\text{Actifs} = \text{Dette totale} + \text{Autres passifs} + \text{Actions} + \text{Profits non distribués} \quad (139)$$

Comme la rubrique actions joue le rôle de rubrique d'ajustement, sa valeur découle directement de celles des autres éléments de l'équation (139). Il suffit donc de mettre le terme actions en évidence dans cette équation :

$$\text{Actifs} = \text{Actifs} - \text{Dette totale} - \text{Autres passifs} - \text{Profits non distribués} \quad (140)$$

D'où la formule qui apparaît dans les cellules réservées aux actions. Certes, nous aurions pu recourir à une autre rubrique du bilan pour réaliser l'équilibre comptable. Une autre candidate à cet effet serait la dette à long terme.

Finalement, nous avons supposé que l'entreprise avait un levier cible défini comme :

$$\text{levier} - \text{cible} = \frac{\text{dette totale}}{\text{équité}} \tag{141}$$

Nous nous servons de cette équation pour calculer la dette totale. Ainsi, pour l'an 5 de la simulation, la formule de la dette totale, que l'on retrouve dans le tableau 5, est égale à :

$$\text{dette totale} = \text{H51} * \left(\text{H47} + \text{H48}\right) \tag{142}$$

La dette à long terme est alors la différence entre la dette totale et la dette à court terme, laquelle est déterminée par le ratio du fonds de roulement[24].

Après avoir introduit les formules dans les cellules, il faut simuler le modèle. Si l'on examine le chiffrier, on remarque à ce stade-ci que la plupart des formules n'ont pas été calculées. En effet, certaines relations sont circulaires. À titre d'exemple, la rubrique actions dépend de la dette à long terme, car elle sert à réaliser l'équilibre comptable du bilan, mais la dette à long terme dépend elle-même de la rubrique actions en raison de la présence d'un levier-cible. De plus, certaines formules comportent plusieurs inconnues.

Il faut donc recourir à un algorithme pour solutionner ce modèle. Heureusement, Excel dispose d'un tel algorithme. Pour y accéder, il suffit de cliquer sur *Tools* dans le menu principal, puis sur *Options* et *Calculation*. Une boîte de dialogue apparaît alors. On demande un calcul automatique, ce qui signifie que le chiffrier sera

24. On remarquera dans le chiffrier que les variables de stocks qui entrent dans les formules sont évaluées en moyenne annuelle, c'est-à-dire la somme des stocks de la fin de l'année courante et de ceux de la fin de l'année précédente divisée par 2.

recalculé à chaque fois que l'on changera un paramètre du modèle. On n'aura donc plus à revenir au menu principal lors de tels changements. On clique sur *OK* et toute la simulation est résolue[25] !

Une fois la simulation des états financiers terminée, on s'en sert pour prévoir les flux monétaires libérés de XYZ. Cette simulation apparaît au tableau 6.

Le calcul des flux monétaires libérés est évident, étant donné la définition de ceux-ci qui a été fournie au début de cette section.

Nous devons maintenant actualiser ces flux monétaires sur un horizon infini en recourant à la formule (135). Nous devons dans un premier temps calculer le coût moyen du capital, ce qui est donné par le tableau 7.

Nous calculons dans un premier temps les pondérations respectives de la dette à court terme, de la dette à long terme et de l'équité dans l'ensemble du financement de l'entreprise des années 1 à 5, puis nous reportons les pondérations moyennes dans les cellules I66 à I68. Nous calculons ensuite les coûts de chacune des formes de financement. Les coûts du financement par dette à court terme et dette à long terme sont les taux d'intérêt respectifs de ces instruments, corrigés de l'impôt. Le coût de se financer par équité est donné par la formule du CAPM. En pondérant ces coûts, on obtient le coût moyen du capital qui apparaît à la cellule J69.

On reporte par la suite les flux monétaires libérés déjà calculés dans les cellules D74 à H74, comme cela apparaît au tableau 8. Puis on calcule la valeur terminale des flux monétaires à la cellule H75 en recourant à la formule de Gordon :

$$\text{valeur terminale} = \frac{81(1+g)}{\text{WACC} - g} \tag{143}$$

Les flux monétaires dont nous devons calculer la valeur actualisée nette de façon à en arriver à la valeur de l'entreprise sont reportés aux cellules D76 à H76. La fonction d'Excel que nous devons utiliser

25. Attention ! Il se peut que certaines rubriques du bilan apparaissent négativement à la suite de la simulation. Par exemple, cela est fort possible pour la rubrique d'ajustement (*plug*), ici les actions. Il faut alors modifier les paramètres du modèle pour supprimer de telles bizarreries. Une simulation exige du doigté.

TABLEAU 6 **Calcul des flux monétaires libérés pour les années 1 à 5**

	B	C	D	E	F	G	H	I
53		**Année**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
54	**Calcul des flux monétaires libérés**							
55	Profits après impôts		205	242	260	281	302	<--=H29
56	Plus dépréciation		85	99	115	134	155	<--=H26
57	Moins hausse des actifs circulants		-230	-253	-278	-306	-337	<--=-(H35-G35)
58	Plus passifs à court terme		106	117	128	141	155	<--=(H46-G46)
59	Moins hausse des immobilisations au coût		-133	-152	-173	-198	-225	<--=-(H37-G37)
60	Plus intérêt sur la dette après impôts (a.i.)		45	28	31	34	38	<---H24*(1-$C$13)
61	Moins intérêt reçu sur les liquidités (a.i.)		-7	-7	-7	-7	-7	<--=-H25*(1-$C$13)
62	Flux monétaires libérés		71	74	77	79	81	<--=SUM(H55:H61)

TABLEAU 7 **Calcul du coût moyen du capital**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
64		**Calcul du coût moyen du capital**								
65				Pondérations					Moyenne	Coût
66		Dette à court terme		6.11%	6.07%	6.03%	6.00%	5.97%	6.04%	7.60%
67		Dette à long terme		10.56%	10.60%	10.63%	10.67%	10.70%	10.63%	9.12%
68		Équité		83.33%	83.33%	83.33%	83.33%	83.33%	83.33%	15.00%
69		**Coût moyen du capital**								13.93%

TABLEAU 8 **Valeur de XYZ**

	B	C	D	E	F	G	H	I
72	**Valeur marchande de XYZ**							
73		An	1	2	3	4	5	
74	Flux monétaires libérés		71	74	77	79	81	<=H62
75	Plus valeur terminale						2264	<--=H62*(1+C4)/(J69-C4):Gordon
76	Total		71	74	77	79	2345	<=H74+H75
77								
78	Valeur actualisée nette	$ 1,439.65	<--=NPV(J69,D76:H76)					
79	Plus liquidités de l'an 0	$110	<--=C34					
80	**Valeur de l'entreprise**	$1,550	<--=C78+C79					
81	Moins dette an 0	**($717)**	<--=-C44					
82	**Valeur de l'équité**	$ 832.65	<--=C80+C81					
83								
84	**Prix d'une action de XYZ**	$ 8.33	<--(C82/C18)*1000					

TABLEAU 9 **Le rendement sur l'actif et le rendement sur l'équité de XYZ**

	B	C	D	E	F	G	H	I
86	**Certaines mesures de la rentabilité de XYZ**							
87								
88		**An**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
89	Rendement sur l'actif		6.46%	6.95%	6.83%	6.71%	6.58%	<--=(H29/H40)
90	Rendement sur l'équité		12.91%	13.90%	13.66%	13.41%	13.16%	<=H29/(H47+H48)

pour les actualiser est NPV, calcul que nous effectuons à la cellule C78. En ajoutant à ce montant les liquidités de l'entreprise de l'an 0 qui sont considérées comme une dette négative, on obtient finalement la valeur de l'entreprise à la cellule C80. En retranchant à ce montant la dette totale actuelle de l'entreprise, on en arrive à évaluer son équité, ici 832,65 milliers de dollars. En divisant ce montant par le nombre d'actions émises, ici 100 000, on obtient le prix implicite d'une action de XYZ, soit 8,33 $[26]. On peut également calculer les rendements sur l'actif et sur l'équité de XYZ des années 1 à 5, qui se retrouvent au tableau 9.

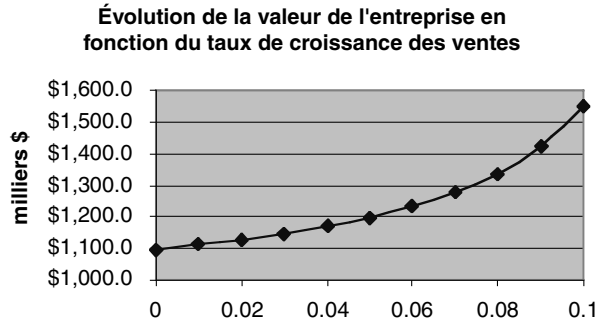
On peut maintenant, à partir du modèle d'évaluation de l'entreprise qui vient d'être présenté, effectuer certaines analyses de sensibilité de manière à juger de l'incidence de la modification de certains paramètres-clefs du modèle sur la valeur de l'entreprise.

La figure 1 donne l'impact d'une modification du taux de croissance des ventes de XYZ sur sa valeur. Les divers taux de croissance des ventes envisagés apparaissent dans les cellules C93 à C103 et les valeurs correspondantes de l'entreprise, dans les cellules D93 à D103. Toutes les figures qui apparaissent ci-après ont été construites à partir

26. À noter que ce modèle ne permet pas comme tel de suivre la dynamique du prix de l'action de XYZ dans le temps, puisque c'est un modèle de simulation qui vise à calculer la valeur de l'entreprise à un moment donné. On peut toutefois prendre en compte l'impact d'une variation du taux de paiement du dividende sur le prix de l'action de la façon suivante. Comme on le sait, selon l'un des théorèmes bien connus de Modigliani et Miller, une modification du taux de paiement du dividende ne devrait pas modifier la richesse des actionnaires existants d'une entreprise. Présentement, alors que le taux de paiement du dividende est de 18 %, les actionnaires de XYZ reçoivent un dividende de 0,29 $ sur une action qui en vaut 8,33 $, soit un flux monétaire total de 8,62 $ par action. Si le taux de versement du dividende est rehaussé à 30 %, les dividendes totaux s'établissent alors à 49,2 milliers de dollars. Comme le flux monétaire par action ne doit pas être modifié à la suite de ce changement, il faut donc corriger la formule du prix de l'action en lui retranchant le terme suivant : ((-C30-29,53)/C18)*1000, 29,53 milliers de dollars étant les dividendes qui correspondent au taux de paiement initial des dividendes, soit 18 %. La simulation indique que le prix de l'action est abaissé à 8,13 $ quand le taux de paiement du dividende est relevé à 30 %. Abstraction faite de l'impôt personnel, les actionnaires ne sont pas plus riches qu'avant puisque le flux monétaire par action est demeuré à 8,62 $ en prenant compte du dividende qui se situe maintenant à 0,49 $ par action. La hausse du dividende a donc eu pour effet de diluer le capital des actionnaires existants. En fait, pour payer le dividende, l'entreprise a dû augmenter son encours d'actions à 102 417, soit [(832,65 × 1000)/8,13].

FIGURE 1 **Simulation de la valeur de XYZ en fonction de la croissance des ventes**

	C	D
92		$1,549.7
93	0	$1,097.1
94	0.01	$1,110.8
95	0.02	$1,126.9
96	0.03	$1,145.8
97	0.04	$1,168.6
98	0.05	$1,196.5
99	0.06	$1,231.4
100	0.07	$1,276.4
101	0.08	$1,336.7
102	0.09	$1,421.5
103	0.1	$1,549.7

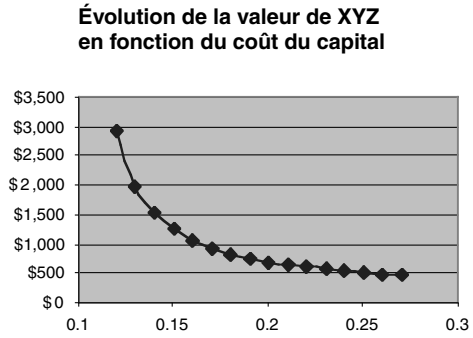


des commandes *Data*, *Table* du menu d'Excel. On voit sur la figure 1 que le taux de croissance des ventes influence assez modérément la valeur de XYZ, car les actifs circulants, qui représentent 50 % des ventes, prélèvent beaucoup dans les flux monétaires de XYZ.

La figure 2 présente pour sa part la réaction de la valeur de XYZ à une hausse du coût moyen du capital. La valeur de XYZ est très sensible à ce paramètre. À remarquer que le coût moyen du capital doit demeurer supérieur au taux de croissance des ventes, fixé à 10 %, puisque nous avons recouru au modèle de Gordon pour évaluer XYZ.

FIGURE 2 **Simulation de la valeur de XYZ en fonction du coût du capital**

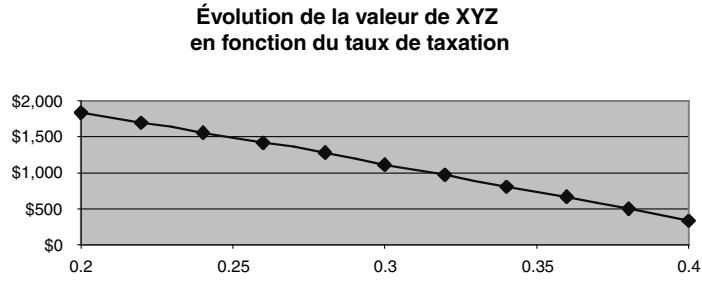
	C	D
105		$1,550
106	0.12	$2,906
107	0.13	$1,985
108	0.14	$1,524
109	0.15	$1,248
110	0.16	$1,063
111	0.17	$931
112	0.18	$832
113	0.19	$755
114	0.2	$693
115	0.21	$642
116	0.22	$600
117	0.23	$564
118	0.24	$533
119	0.25	$506
120	0.26	$483
121	0.27	$462



Finalement, la figure 3 donne l'impact d'une modification du taux d'imposition de XYZ sur sa valeur. Celle-ci réagit moins à ce paramètre qu'au précédent. Même si la taxation dégonfle les flux monétaires de l'entreprise, cela est compensé en partie par les économies d'impôts que procure la dette.

FIGURE 3 **Simulation de la valeur de XYZ en fonction du taux de taxation**

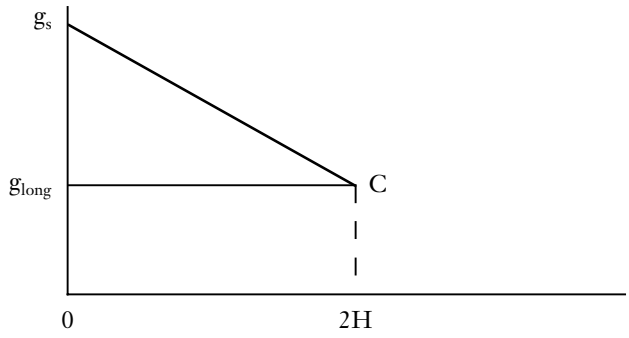
	J	K
92		$1,550
93	0.2	$1,824
94	0.22	$1,688
95	0.24	$1,550
96	0.26	$1,409
97	0.28	$1,265
98	0.3	$1,118
99	0.32	$969
100	0.34	$816
101	0.36	$661
102	0.38	$502
103	0.4	$340



ANNEXE 10.1

Le modèle H de Gordon[27]

Dans cette annexe, nous envisageons une version plus étoffée du modèle de Gordon communément appelée « modèle H ». Ce modèle fait l'hypothèse que le taux de croissance du dividende, parti d'un niveau anormalement élevé g_s, diminue par la suite à un rythme constant pendant une période de temps égale à 2H. Passé cette période, il se stabilise perpétuellement au taux g_{long}, qui est évidemment plus faible que le taux d'actualisation des dividendes r. On peut représenter graphiquement l'évolution du taux de croissance sur la figure suivante :



La surface délimitée par le triangle dont les sommets sont g_s, g_{long} et C donne la somme des écarts de croissance au cours de cette période. Cette surface est égale à :

$$\frac{1}{2}\left(g_s - g_{long}\right) \times 2H = H\left(g_s - g_{long}\right)$$

Le modèle H approxime le prix d'une action par l'équation suivante :

$$P_0 = \frac{d_0\left(1 + g_{long}\right) + d_0\left(H\right)\left(g_s - g_{long}\right)}{r - g_{long}}$$

27. Pour cette section, nous nous inspirons de : Damodaran, A. (1996), *Investment Valuation*, New York, Wiley, chap. 10.

En vertu du modèle H, le prix d'une action est égal aux prix de base que lui donne l'équation de Gordon-Shapiro en croissance constante et perpétuelle du dividende auquel s'ajoute un terme qui représente la déviation temporaire du taux de croissance du dividende de son niveau de long terme.

On peut ajouter plus de réalisme au modèle H en supposant trois étapes dans le cycle de croissance du dividende. La première étape est caractérisée par une croissance constante mais anormalement élevée du dividende. Le taux de croissance est alors de g_s et cette étape dure N périodes. La deuxième étape est caractérisée par un déclin du dividende vers sa valeur de long terme : g_{long}. Cette étape du cycle des dividendes dure de la période N + 1 jusqu'à la période B. Au cours de la troisième étape, le dividende se met à croître perpétuellement au taux g_{long}. Selon cette version à trois étapes du modèle de Gordon, le prix d'une action est égal à :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{d_0(1+g_s)^t}{(1+r)^t} + \sum_{t=N+1}^{B} \frac{d_t}{(1+r)^t} + \frac{P_B}{(1+r)^B}$$

Le premier terme de cette dernière équation est une annuité d_0 qui croît au taux g_s pendant N périodes. On peut donc simplifier ce premier terme en utilisant la formule d'annuité correspondante. Le troisième terme peut être simplifié en utilisant l'équation de Gordon-Shapiro. Cette équation peut donc être réécrite comme suit :

$$P_0 = \left[\frac{d_0(1+g_s)}{r-g_s}\right]\left[1-\left(\frac{1+g_s}{1+r}\right)^N\right] + \sum_{t=N+1}^{B} \frac{d_t}{(1+r)^t} + \left[\frac{d_B(1+g_{long})}{r-g_{long}}\right]\left[\frac{1}{(1+r)^B}\right]$$

On peut maintenant supposer que la deuxième étape du cycle des dividendes est caractérisée par un déclin constant du taux de croissance du dividende vers son niveau g_{long}, hypothèse qui nous

permet de remplacer les deux derniers termes de cette équation par l'expression que leur donne le modèle H. On obtient donc la version élaborée du modèle H :

$$P_0 = \left[\frac{d_0(1+g_s)}{r-g_s}\right]\left[1-\left(\frac{1+g_s}{1+r}\right)^N\right] + \frac{d_0(1+g_s)^N(1+g_{long}) + d_0(1+g_s)^N(H)(g_s-g_{long})}{(r-g_{long})(1+r)^N}$$

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge, The MIT Press.

BREALEY, R., S. MYERS *et al.* (1991), *Principles of Corporate Finance*, Toronto, McGraw-Hill.

BREALEY, R., S. MYERS et F. CHARRETTE (1981), *Principes de gestion financière des sociétés*, Montréal, McGraw-Hill.

CHEW, D.H. (dir.) (1999), *The New Corporate Finance*, 2e édition, New York, McGraw-Hill.

COPELAND, T.E. et J.F. WESTON (1988), *Financial Theory and Corporate Policy*, Boston, Addison-Wesley.

DAMODARAN, A. (1996), *Investment Valuation*, New York, Wiley.

DIXIT, A.K. et R.S. PINDYCK (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton (N.J.), Princeton University Press.

GAGNON, J.M. et N. KHOURY (1988), *Traité de gestion financière*, 3e édition, Boucherville, Gaëtan Morin.

GORDON, M.J. (1959), « Dividends, Earnings and Stock Prices », *Review of Economics and Statistics*, mai, p. 99-105.

MEGGINSON, W.L. (1997), *Corporate Finance Theory*, Boston, Addison Wesley.

MERCIER, G. et R. THÉORET (1997), *Traité de gestion financière*, 2e édition, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

MILLER, M.H. (1977), « Debt and Taxes », *Journal Of Finance*, mai, p. 261-276.

MODIGLIANI, F. et M.H. MILLER (1966), « Some Estimates of the Cost of Capital to the Electric Utility Industry : 1954-1957 », *American Economic Review*, juin, p. 333-391.

MODIGLIANI F. et M.H. MILLER (1963), « Corporate Income Taxes and the Cost of Capital : A Correction », *American Economic Review*, juin, p. 433-443.

MILLER, M.H. et F. MODIGLIANI (1961), « Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares », *Journal of Business*, vol. 34, p. 411-433.

MODIGLIANI, F. et M.H. MILLER (1958), « The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment », *American Economic Review*, p. 261-297.

MYERS, S.C. (1974), « Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions – Implications for Capital Budgeting », *Journal of Finance*, mars, p. 1-25.

PERREAULT, Y.G. (1993), *L'entreprise familiale*, Montréal, Les Éditions Transcontinental et la fondation de l'Entrepreneurship, annexe.

PERREAULT, Y.G. et R. THÉORET (1992), « Cinq façons d'évaluer la valeur de votre entreprise », *PME*, vol. 8, n° 7, septembre.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001), *Introduction à l'utilisation des méthodes basées sur le calcul numérique en finance quantitative : l'évaluation d'actifs contingents avec applications Visual Basic*, document de travail, Centre de recherche en gestion, École des sciences de la gestion, Université du Québec à Montréal, juin, CRG, 13-2001.

CHAPITRE

11

LE TAUX REPO IMPLICITE ET LES STRATÉGIES D'ARBITRAGE SUR LE MARCHÉ À TERME[1]

Le taux repo implicite joue un grand rôle au chapitre des opérations d'arbitrage sur le marché des contrats à terme. C'est pourquoi nous ne pouvons le négliger si nous voulons comprendre véritablement les transactions qui s'opèrent sur le marché à terme. Mais avant d'introduire le taux repo implicite, nous devons rappeler certaines notions de base essentielles à sa compréhension.

1. LE TAUX À TERME IMPLICITE

Le taux à terme (*forward*) implicite ne doit pas être confondu avec le taux repo implicite. Le taux à terme implicite est calculé à partir de deux taux d'intérêt contigus au comptant (taux *spot*). On peut illustrer le calcul du taux à terme implicite à partir de l'exemple suivant. Supposons que le taux au comptant d'un an soit de 10 % et celui de deux ans, 10,5 %. Ce sont là les taux que l'on peut obtenir actuellement sur des placements d'un an et de deux ans. Le taux implicite d'un an dans un an se calcule comme suit. On sait qu'un dollar placé aujourd'hui au taux de deux ans rapportera dans deux ans :

$$1\$e^{0,105\times 2} = 1,2337\,\$$$

1. Pour cette section, on consultera : Stigum, M. (1990), *The Money Market*, 3e édition, Chicago, Dow Jones Irwin ; Hull, J.C. (1998), *Futurs and Options Markets*, 5e édition, New York, Prentice Hall ; Dubofsky, D.A. (1992), *Options and Financial Futures : Valuation and Uses*, New York, McGraw-Hill.

Or, un placement d'un dollar au taux au comptant d'un an renouvelé au taux à terme implicite d'un an dans un an doit rapporter le même montant qu'un dollar placé au taux au comptant de deux ans. Sinon, un arbitrage est possible. On peut donc écrire[2] :

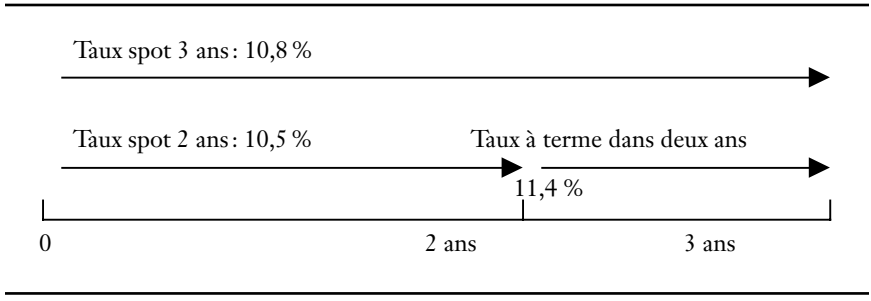
$$e^{0,10}e^{tfi} = 1,2337\,\$$$

En prenant les logarithmes de chaque côté de cette équation, on obtient le taux à terme implicite :

$$0,10 + tfi = \ln(1,2337)$$
$$tfi = 0,11 \text{ soit } 11\,\%$$

Quand les taux d'intérêt sont composés de façon continue, le taux au comptant de deux ans est la simple moyenne arithmétique du taux au comptant d'un an et des taux à terme qu'il incorpore. Ici, le taux au comptant de deux ans, qui est égal à 10,5 %, est la moyenne arithmétique du taux au comptant d'un an, soit 10 %, et du taux à terme implicite d'un an dans un an, soit 11 %. Cette relation n'est qu'approximative quand les taux d'intérêt ne sont pas composés de façon continue.

Maintenant, comment obtenir le taux à terme d'un an dans deux ans ? En appliquant la procédure qui vient d'être présentée, il s'obtient à partir des taux au comptant de deux ans et de trois ans. Par exemple, supposons que le taux au comptant de deux ans s'établisse à 10,5 % et celui de trois ans, à 10,8 %. Pour faciliter la compréhension du taux à terme qui découle de ces deux taux, nous les reportons sur le diagramme suivant :



2. Pour la notation des variables qui apparaissent dans ce texte, voir l'annexe 2.

Le taux à terme implicite d'un an dans deux ans résulte donc de relation suivante :

$$e^{0,105\times 2}e^{x} = e^{0,108\times 3}$$

Dans cette équation, x est le taux recherché. Un placement de deux ans au taux au comptant de deux ans renouvelé au taux à terme d'un an dans deux ans doit être identique à un placement de trois ans effectué au taux au comptant de trois ans. En prenant les logarithmes des deux côtés de la dernière équation, on trouve que le taux à terme d'un an dans deux ans est égal à 11,4 %.

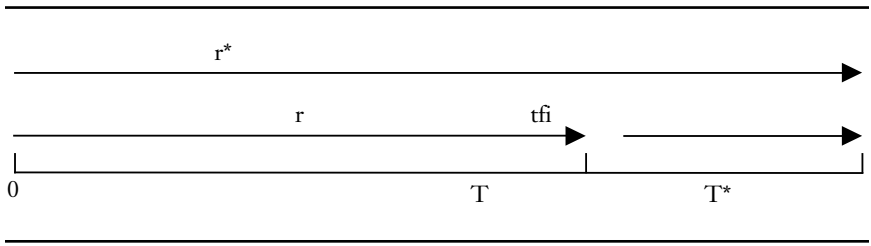
Il convient de dégager une formule générale pour le calcul du taux à terme implicite pour n'importe laquelle période[3]. Soit r le taux au comptant pour T années. Pour sa part, r* est le taux au comptant pour T* années, un taux à plus long terme que r, c'est-à-dire :

$$T^* > T$$

Le taux à terme implicite qui s'applique à la période comprise entre les temps T et T*, c'est-à-dire pour la période (T* – T) qui débute au temps T, est égal à l'expression suivante[4] :

$$\text{tfi} = \frac{r^* T^* - rT}{T^* - T}$$

Il se représente graphiquement comme suit :



3. Tous les taux sont ici définis sur base continue.
4. Pour ne pas surcharger la notation, nous n'avons pas attifé la variable tfi des indices T et T*.

Pour illustrer la formule générale du taux à terme implicite[5], revenons au cas où il n'existe que deux périodes. r est le taux au comptant d'un an et r*, celui de deux ans. Selon la formule, le taux à terme implicite d'un an dans un an est égal à :

$$tfi = 2r^* - r$$

Si l'on met le taux au comptant à deux ans en facteur, on obtient :

$$r^* = \frac{r + tfi}{2}$$

ce qui montre que lorsque les taux sont composés de façon continue, le taux à long terme est une moyenne arithmétique des taux au comptant et à terme qu'il incorpore.

2. Taux à terme (*forward*), prix à terme (*forward*)[6] et taux repo implicite

Dans cette section, nous visons à établir une distinction entre, d'une part, le taux à terme implicite et le taux à terme du marché, et d'autre part, le prix à terme implicite et le prix à terme du marché. Ces notions nous serviront par la suite pour établir des stratégies d'arbitrage. Nous introduisons finalement la notion de taux repo implicite.

Soit un contrat à terme de bons du Trésor qui promet de livrer des bons de 90 jours dans un certain nombre de jours, disons 160 jours[7]. L'actif sous-jacent au contrat à terme est donc un bon du Trésor de 250 jours (160 + 90 jours). Autrement dit, la différence entre T* et T est de 90 jours.

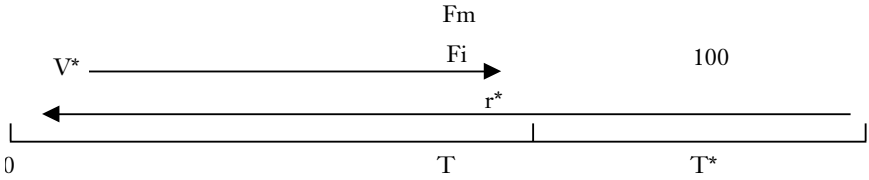
Envisageons un cas plus général. Un contrat à terme livrera à la date T des bons du Trésor qui échoient à la date T*. À leur date d'échéance, les bons vaudront leur valeur nominale, ici 100. Quelle est la valeur présente (V*) de ce contrat à terme ? C'est bien sûr

5. Cette relation est démontrée à l'annexe 2.
6. Dans ce texte, par souci de simplification, nous ne faisons pas de distinction entre contrat à terme de gré à gré (contrat *forward*) et contrat à terme boursier (contrat *futures*).
7. C'est-à-dire que le contrat à terme échoit dans 160 jours.

l'actualisation de la valeur nominale du contrat, soit 100, c'est-à-dire le montant qui sera livré à l'échéance des bons, au taux d'intérêt qui s'applique pour la période comprise entre 0 et T*, soit respectivement la date d'émission du contrat à terme et la date d'échéance des bons du Trésor sous-jacents. La valeur présente du contrat est donc de :

$$V^* = 100e^{-r^*T^*}$$

Le calcul de V* se représente graphiquement comme suit :



Quel est le prix du contrat à terme qui est implicite à la structure à terme des taux d'intérêt (Fi) ? Un prix à terme étant une valeur future, c'est la capitalisation de V* au taux associé à la période comprise entre 0 et T, soit r. Le prix à terme du contrat implicite à la structure à terme est donc égal à l'expression suivante :

$$F_i = V^* e^{rT} = 100e^{-r^*T^*}e^{rT} = 100e^{rT-r^*T^*}$$

Mais, en vertu de l'expression générale du taux à terme implicite, nous savons que :

$$tfi(T^* - T) = r^* T^* - rT$$

On peut donc écrire le prix à terme implicite de la façon suivante :

$$F_i = 100e^{-tfi(T^*-T)}$$

On peut dériver une autre expression pour le prix à terme implicite sachant que le prix au temps 0 d'un bon du Trésor qui échoit au temps T est égal à :

$$V = 100e^{-rT}$$

En substituant V dans l'équation de Fi, on obtient :

$$F_i = 100e^{-r^*T^*}e^{rT} = 100\frac{V^*}{V}$$

Le prix à terme implicite pour un contrat sur bons du Trésor d'une durée de T peut donc être vu comme le rapport des prix de bons de durées suivantes :

1) un bon dont la durée est de T*, c'est-à-dire qu'elle couvre la période comprise entre la date d'émission du contrat à terme et sa date d'échéance, soit T, et la durée du bon du Trésor sous-jacent, soit (T* – T) ;

2) un bon dont la durée est de T, soit celle du contrat à terme. Ce dernier bon enlève au bon de durée T* sa composante de durée T. Cette amputation donne bien le prix à terme implicite.

Il ne faut pas confondre le prix à terme implicite, qui est calculé à partir de la structure à terme des taux d'intérêt, ici les taux r et r*, avec le prix à terme du marché, qui est coté directement sur le marché et qui résulte de l'offre et de la demande de contrats à terme. Quand ces deux prix ne sont pas égaux, un arbitrage est possible sur le marché à terme, comme nous le verrons ultérieurement.

Du prix à terme du marché, on peut calculer le taux à terme du marché à partir de l'équation suivante :

$$F_m = 100e^{-tfm(T^*-T)}$$

Il nous reste à introduire la notion de taux repo implicite. Par définition, le taux repo est celui auquel un investisseur peut emprunter en vendant des titres à une institution financière avec promesse de rachat. Certes, le prix de rachat de ces titres est plus élevé que le prix de vente initial. Cette différence constitue le taux d'intérêt que paie l'investisseur sur son emprunt. Le taux repo d'une durée donnée est habituellement égal au taux de rendement des bons du Trésor de même durée.

Donnons une définition fonctionnelle du taux repo implicite. Ce dernier peut être défini comme le taux de capitalisation d'un bon d'une durée T* pour obtenir le prix à terme du marché d'un contrat

qui échoit à la période T. Il existe donc la relation suivante entre le taux repo implicite et le prix à terme du marché du contrat qui échoit à la période T :

$$F_m = V^* \, e^{\text{taux repo} \times T}$$

En prenant les logarithmes de chaque côté de cette équation, on arrive à isoler le taux repo implicite :

$$\text{trepo} = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{F_m}{V^*}\right)$$

Le prix du marché d'un contrat à terme étant observable directement, cette dernière équation sert à calculer le taux repo. Et comme nous le verrons dans la section qui suit, le taux repo est un indicateur d'une opération d'arbitrage.

3. Stratégies d'arbitrage sur le marché à terme

Supposons l'inégalité suivante :

$$F_m > F_i$$

c'est-à-dire que le prix à terme du marché est supérieur au prix à terme implicite, soit celui donné par la structure à terme des taux d'intérêt. Une opération d'arbitrage est alors possible. Rappelons que dans une opération d'arbitrage, les cash-flows de chaque période doivent être positifs ou nuls et au moins l'un deux doit être strictement positif. Cette opération doit également s'effectuer sans risque.

L'opération d'arbitrage est ici la suivante. Comme le contrat à terme est surévalué, on le vend immédiatement[8]. On achète ensuite un bon du Trésor d'égale durée, soit T*. Et pour éviter tout cash-flow en début de période, on emprunte au taux de la période la plus courte, ici T. En effectuant ces opérations, on a acheté le contrat à terme implicite au prix Fi. En effet, on a vendu à découvert la première partie du bon du Trésor de durée T* en empruntant pour une période de durée T. En effet, emprunter équivaut à vendre à découvert un

8. On a alors une position à découvert (*short*) sur ce contrat.

bon de même durée. On s'est donc ramené au point Fi sur la figure précédente. L'opération d'arbitrage se traduira donc par un profit égal à (Fm – Fi). Illustrons-le par un exemple.

Le prix d'un bon du Trésor qui échoit dans 146 jours (V*) est de 95,21 $. Par ailleurs, le prix d'un contrat à terme qui livre des bons de 90 jours dans 56 jours (Fm) est de 96,95 $. Le taux de rendement des bons de 56 jours (r) est pour sa part de 11 %.

Le contrat à terme est ici surévalué. En effet, le prix du contrat à terme implicite est de :

$$F_i = V^* e^{rT} = 95{,}21e^{0{,}11\times\left(\frac{56}{365}\right)} = 96{,}83$$

d'où :

$$F_m > F_i$$

Appliquons la stratégie antérieure. Il faut d'abord vendre le contrat à terme. On achète ensuite le bon à 146 jours, ce qui se traduit par une dépense de 95,21 $. Pour avoir un cash-flow nul à la période 0, on emprunte ce montant au taux de 11 %, qui est le taux au comptant de 56 jours.

À la fin des 56 jours, l'arbitragiste livre le bon à l'acheteur antérieur du contrat à terme. Il reçoit alors 96,95 $. Il enregistre également un cash-flow négatif puisqu'il doit rembourser son emprunt. Ce cash-flow négatif est le suivant :

$$95{,}21e^{\left(\frac{56}{365}\right)\times 0{,}11} = 96{,}83$$

Le prix réalisé est donc la différence entre Fm et Fi, soit :

$$96{,}95 - 96{,}83 = 0{,}12^{9}$$

9. Ce profit est par 100 $ de contrat. Comme la valeur nominale d'un contrat sur bons du Trésor est de 1 million de dollars, il faut multiplier ce profit par 10000 pour obtenir le profit par contrat.

Il existe une autre façon d'aborder une telle opération d'arbitrage, soit en recourant au taux repo implicite. En vertu de la formule donnée précédemment, le taux repo, défini pour 56 jours, est égal à :

$$\text{trepo} = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{F_m}{V^*}\right) = \frac{1}{\frac{56}{365}}\ln\left(\frac{96,95}{95,21}\right) = 11,80\,\%$$

Or le taux au comptant à 56 jours qui prévaut actuellement sur le marché est de 11 %. Un arbitrage est alors possible, puisque le taux repo est supérieur au taux au comptant d'égale durée.

On emprunte alors au taux le plus faible, ici le taux au comptant à 56 jours. Et l'on effectue les autres opérations mentionnées auparavant de façon à se prévaloir de la marge de surévaluation du contrat à terme.

Dans le cas qui nous intéresse, le taux à terme implicite (tfi) est supérieur au taux à terme du marché (tfm). Calculons le taux à terme implicite. Il est égal à l'expression suivante :

$$\text{tfi} = \frac{r^*\,T^* - rT}{T^* - T}$$

r*, ici le taux de rendement sur 146 jours, se calcule à partir du prix du bon de 146 jours. Il est égal à :

$$r^* = \frac{365}{146}\ln\left(\frac{100}{95,21}\right) = 12,27\%$$

Pour sa part, le taux au comptant (r) de 56 jours est de 11 %. Le taux à terme implicite du jour 56 au jour 146 (90 jours) est donc de :

$$\text{tfi} = \frac{r^*\,T^* - rT}{T^* - T} = \frac{(0,1227 \times 0,40) - (0,11 \times 0,1534)}{0,40 - 0,1534} = 13,06\%$$

Pour sa part, le taux à terme du marché est calculé à partir du prix à terme du marché :

$$F_m e^{\text{tfm}\times(T^*-T)} = 100$$

En effet, le taux à terme du marché est celui qui découle de Fm et qui prévaut pour la période égale à T* – T. C'est le taux qui capitalise Fm sur la période (T* – T) pour obtenir la valeur nominale des bons du Trésor, ici 100.

En prenant les logarithmes de chaque côté et en résolvant pour tfm, on obtient :

$$\text{tfm} = \frac{1}{(0,40 - 0,1536)} \ln\left(\frac{100}{96,95}\right) = 12,56\%$$

Par conséquent, quand le taux repo implicite est supérieur au taux au comptant correspondant, la relation suivante est nécessairement vérifiée :

taux à terme du marché < taux à terme implicite

Ici :

$$12,56\,\% < 13,06\,\%$$

La preuve de cette implication apparaît à l'annexe 1. Donc quand le taux repo implicite est plus élevé que le taux au comptant correspondant, cela signale que le contrat à terme est surévalué, ou que son rendement est trop faible, si l'on veut. Dans ce cas, l'opération d'arbitrage est évidente :

i) Emprunter au taux à terme du marché, qui est le plus faible des deux taux à terme. Pour ce faire, on vend le contrat à terme. En effet, la capitalisation du prix à terme du marché par le taux à terme du marché donne la valeur finale du contrat de bons du Trésor, soit 100. En vendant le contrat à terme, on se trouve donc à emprunter au taux à terme du marché.

ii) Prêter au taux à terme implicite. Pour ce faire, on achète le bon de 146 jours et on emprunte le montant correspondant en vendant des bons de 56 jours, ce qui revient à dire que l'on emprunte au taux au comptant de 56 jours. La somme de ces deux opérations revient à effectuer un prêt au taux à terme implicite. En effet, l'emprunt de 56 jours revient à amputer la portion à 56 jours du bon de 146 jours et à ne retenir que la partie à terme du bon du Trésor.

Le diagnostic est bien le même qu'auparavant.

Envisageons maintenant le cas inverse, soit celui où le taux des bons de 56 jours est supérieur au taux repo implicite. Dans ce cas, il est facile de montrer que le contrat à terme est sous-évalué puisque c'est le taux repo qui capitalise V* pour obtenir Fm. De façon alternative, le taux à terme du marché est dans ce cas plus élevé que le taux à terme implicite qui découle de la structure à terme des taux d'intérêt comme cela est démontré à l'annexe 11.1.

Dans pareil cas, il faut prêter au taux à terme du marché et emprunter au taux à terme implicite. Pour ce faire, il faut acheter le contrat à terme, ce qui revient à prêter au taux à terme du marché. Par ailleurs, il faut emprunter au taux à terme implicite. Pour y arriver, il faut simultanément vendre à découvert le bon de 146 jours et acheter le bon de 56 jours.

Dans l'exemple précédent, supposons que le taux de rendement des bons de 56 jours soit de 12,5 %, ce qui est plus élevé que le taux repo implicite, à hauteur de 11,80 %.

L'opération d'arbitrage est alors la suivante. L'investisseur doit d'abord acheter un contrat à terme qui vaudra 96,95 $ dans 56 jours. À la date d'échéance de ce contrat, soit dans 56 jours, l'investisseur devra débourser 96,95 $ de façon à honorer ce contrat. Pour ce faire, il emprunte aujourd'hui le montant suivant, soit la valeur présente, au taux au comptant de 56 jours, du contrat qu'il devra honorer dans 56 jours :

$$96{,}95e^{-0{,}1534\times 0{,}125} = 95{,}11\ \$$$

Il maintiendra cet emprunt pendant 146 jours. C'est dans ce sens que notre investisseur a vendu à découvert le bon de 146 jours car, en bout de piste, il devra payer le taux au comptant de 146 jours sur son emprunt. Finalement, il place ce montant dans des bons de 56 jours, de façon à emprunter au taux à terme implicite.

Au bout de 56 jours, la valeur de son placement est de 96,95 $, soit juste assez pour prendre livraison des bons sous-jacents au contrat à terme. Les bons que détient l'investisseur valent 100 $ au bout de 146 jours. L'investisseur doit cependant rembourser son emprunt

initial de 95,11 $. Le taux des emprunts de 146 jours est de 12,27 %, tel qu'il fut calculé antérieurement[10]. Le montant requis pour repayer l'emprunt initial de 95,11 $ est donc le suivant :

$$95{,}11\mathrm{e}^{0{,}1227\times\left(\frac{146}{365}\right)} = 99{,}89\ \$$$

Le profit résiduel de l'opération d'arbitrage est de :

$$100 - 99{,}89 = 0{,}11\ \$$$

RÉSUMÉ

Dans une opération d'arbitrage, si l'on vend le contrat à terme (ici 146 jours), il faut acheter l'instrument au comptant de durée égale à celle de l'instrument sous-jacent au contrat à terme (ici un bon de 146 jours). À l'inverse, si l'on achète le contrat à terme, il faut vendre l'instrument au comptant sous-jacent d'égale durée, c'est-à-dire emprunter au taux au comptant de durée égale à celle du contrat à terme.

Le taux repo implicite, lorsqu'on le compare au taux au comptant de même durée, sert par ailleurs d'indicateur aux opérations d'arbitrage. En effet, si le taux repo implicite est plus élevé que le taux au comptant de même durée, cela signale que le contrat à terme est surévalué. Les transactions à effectuer pour conclure l'opération d'arbitrage sont alors les suivantes. Il faut vendre le contrat à terme, dont la durée est de T* dans les exemples antérieurs, et acheter simultanément un bon dont la durée est également de T*, qui sera livré à l'acheteur du contrat à terme à son échéance. On effectue également un emprunt au taux au comptant pour une durée qui couvre la période comprise entre la date d'émission et la date d'échéance du contrat à terme, soit T dans nos exemples. Ce montant est consacré au paiement du bon.

10. Pour calculer le taux sur 146 jours, on calcule d'abord V* à partir du prix du contrat à terme et du taux repo implicite, puisque ce dernier capitalise V* pour obtenir le prix à terme du marché. On se sert ensuite de la formule suivante pour trouver le taux au comptant de 146 jours :

$$\frac{365}{146}\ln\left(\frac{100}{V^*}\right)$$

Par ailleurs, si le taux repo implicite est inférieur au taux au comptant de même durée, le contrat à terme est sous-évalué. Il faut alors acheter le contrat à terme, dont la durée est de T*, emprunter sur une période de T* et placer temporairement le produit de l'emprunt dans des bons pour une période de T, qui correspond à la date d'échéance du contrat à terme.

ANNEXE 11.1

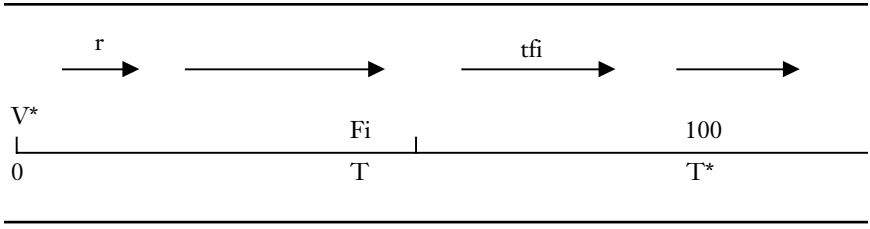
Relation entre le taux repo implicite et le taux à terme implicite

La notation qui est utilisée dans cette annexe est la même que celle qui apparaît dans le texte qui précède. Elle est précisée dans l'annexe 2.

On peut écrire la relation suivante entre V*, la valeur présente des bons qui seront livrés à T* et dont la valeur nominale est de 100 :

$$V^* \, e^{rT} e^{tfi(T^*-T)} = 100$$

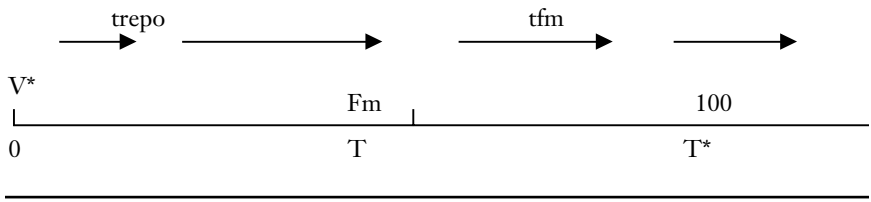
Cette équation calcule la valeur finale des bons à partir de la structure à terme des taux d'intérêt. Elle met en cause le taux au comptant, d'une durée de T, et le taux à terme implicite à la structure à terme, défini pour la période future de durée (T* – T). Cette relation se représente graphiquement comme suit :



On peut alternativement établir la relation suivante entre V* et 100, soit la valeur nominale des bons du Trésor.

$$V^* \, e^{(trepo \times T)} e^{tfm(T^*-T)} = 100$$

Cette équation calcule la valeur finale des bons à partir du taux repo implicite à la valeur marchande du contrat à terme. Pour obtenir la valeur finale des bons, elle capitalise V* au taux repo implicite et au taux à terme du marché. Cette relation se représente graphiquement comme suit :



On peut donc écrire :

$$V^* e^{rT} e^{tfi(T^*-T)} = V^* e^{(trepo \times T)} e^{tfm(T^*-T)}$$

En prenant les logarithmes de chaque côté et après quelques réaménagements, on obtient :

$$(r - trepo)T = (tfm - tfi)(T^* - T)$$

Envisageons deux cas.

1. Premier cas : le taux au comptant r et plus faible que le taux repo implicite défini sur la même période, soit T. C'est-à-dire :

   $$r < trepo$$

   On a alors, en vertu de la dernière équation :

   $$tfm < tfi$$

   Dans ce cas il faut :

   a) Vendre à découvert le contrat à terme qui est surévalué. Il comporte en effet un taux de rendement plus faible que le taux à terme implicite.

   b) Acheter le bon au comptant de durée égale au bon qui sous-tend le contrat à terme, cette durée étant ici de T*.

   c) Vendre le bon dont la durée est égale au temps qui sépare l'instant présent et la date à laquelle les bons sont livrés en vertu du contrat à terme, cette durée étant ici de T.

2. Deuxième cas : le taux au comptant est supérieur au taux implicite de même durée. C'est-à-dire :

$$r > trepo$$

On peut alors écrire, toujours en vertu de la même équation :

$$tfm > tfi$$

Dans ce cas, il faut :

a) Acheter le contrat à terme (qui est sous-évalué).

b) Vendre le bon dont la durée est égale au temps qui sépare l'instant présent et la date à laquelle les bons sont livrés en vertu du contrat à terme, dont la durée est de T.

ANNEXE 11.2

Notation des variables

- Fm : prix du marché d'un contrat à terme de bons du Trésor dont la durée de l'instrument sous-jacent est de T*.
- V* : prix du marché de bons du Trésor dont la durée est égale à celle de l'instrument sous-jacent au contrat à terme, c'est-à-dire T*.
- V : prix du marché des bons du Trésor dont la durée est égale à la période qui sépare l'instant présent et la date à laquelle sont livrés les bons du Trésor sous-jacents au contrat à terme. Cette période est représentée par T.
- r* : taux de rendement annuel du bon du Trésor dont le prix est de V*. C'est le taux au comptant (*spot*) pour la période qui s'étire entre 0, l'instant présent, et T*.
- r : taux de rendement annuel du bon du Trésor dont le prix est de V. C'est le taux au comptant pour la période qui s'étire entre 0 et T.
- Fi : prix à terme qui résulte de la capitalisation de V* au taux r pendant T périodes.
- Trepo : taux (annuel) qui capitalise V* pour obtenir Fm.
- Tfi : taux à terme qui est implicite aux deux taux au comptant, r et r*. Il résulte de l'équation suivante :

$$e^{r^*T^*} = e^{rT}e^{tfi(T^*-T)}$$

En prenant les logarithmes des deux côtés, on obtient :

$$r^*\,T^* = rT + tfi\left(T^* - T\right)$$

D'où :

$$tfi = \frac{r^*\,T^* - rT}{T^* - T}$$

- tfm : taux qui capitalise Fm pour obtenir 100, soit la valeur finale de l'instrument sous-jacent au contrat à terme au temps T*. C'est le taux à terme du marché.

PARTIE

5

MÉTHODES MODERNES DE LA FINANCE EMPIRIQUE ET QUANTITATIVE

À la mémoire de M. Marcel G. Dagenais,
professeur émérite de sciences économiques (UdeM)
et économètre de réputation internationale,
pour nous avoir si bien initiés aux divers
aspects de l'économétrie.

CHAPITRE

12

LES OPTIONS RÉELLES

Pour évaluer un projet d'investissement, on calcule la plupart du temps sa valeur actuelle nette (VAN). Le critère de décision est simpliste. En effet, si la VAN du projet est positive, on retient le projet ; si elle est négative, on le rejette. En regard des autres instruments d'évaluation d'un projet[1], la VAN présente certes l'avantage de renseigner directement sur l'augmentation de la richesse des actionnaires qui découle de la réalisation d'un projet d'investissement, la VAN s'ajoutant en effet directement à la valeur marchande de l'avoir des actionnaires.

Même si la VAN est un outil d'analyse très prisé dans la pratique, elle présente beaucoup de lacunes dans un univers incertain, univers qui est le lot de l'entreprise. Outil statique, elle escamote les décisions stratégiques que prendra l'entreprise tout au long de la durée du projet d'investissement. En effet, une fois enclenché, un projet présente certaines opportunités qui rehaussent sa valeur : opportunité d'abandonner le projet, opportunité d'augmenter ou de réduire la taille du projet, opportunité de reporter un projet, pour n'en nommer que quelques-unes. Ces opportunités rehaussent la valeur d'un projet en augmentant la marge de manœuvre du gestionnaire vis-à-vis de son projet. Or, elles ne sont pas prises en compte dans l'approche traditionnelle de la VAN.

1. Par exemple, le taux de rendement interne ou le délai de récupération d'un investissement.

Les opportunités qu'offre un projet d'investissement peuvent être vues comme autant d'options d'achat ou de vente. On peut donc recourir à la théorie des options financières pour en déterminer la valeur. C'est ce que nous ferons dans ce chapitre. Après avoir redéfini le concept de la VAN pour l'adapter à l'analyse dynamique d'un projet d'investissement, nous analyserons dans un premier temps certaines options réelles simples qui peuvent être incorporées dans un projet d'investissement : l'option d'abandon, l'option de contraction et l'option de croissance. Puis nous passerons à des formes plus complexes d'options réelles, soit l'option de choisir et l'option composée. Pour chacune des options réelles analysées, nous fournissons un programme écrit en Visual Basic (Excel) qui calcule la valeur de l'option, ces programmes étant de simples transpositions de ceux qui apparaissent dans les chapitres antérieurs. Les exemples théoriques d'options sont inspirés de Mun[2].

1. La notion d'option réelle et la VAN augmentée

Une option financière, telle une option d'achat classique (call) écrite sur une action ou une option de vente classique (put) écrite sur une obligation, a comme sous-jacent un instrument financier. Une option réelle a pour sa part comme sous-jacent un projet d'investissement, c'est-à-dire que la VAN du projet devient le sous-jacent de l'option réelle écrite sur ce projet.

On peut dès lors transposer très facilement les mécanismes de *pricing* des options financières aux options réelles. La VAN peut en effet être considérée comme l'actif sur lequel est écrite l'option réelle.

2. Mun, J. (2002), *Real Options Analysis : Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*, New York, John Wiley. Une référence de base dans le domaine des options réelles est la suivante : Trigeorgis, L. (1996), *Real Options*, Cambridge, MIT Press. On consultera également : Copeland, T. et V. Antikarov (2001), *Real Options : A Practitioner's Guide*, New York, Texere ; Neftci, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of financial Derivatives*, 2e édition, New York, Academic Press. Le premier auteur à avoir établi un lien entre une opportunité d'investissement et une option est Myers, S.C. (1977), « Determinants of Corporate Borrowing », *Journal of Financial Economics*, p. 6-13 ; Coën, A., G. Mercier et R. Théoret, *Traité de finance corporative*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec, à paraître (2004).

Considérons par exemple un call européen[3] écrit sur un projet, dont nous voulons déterminer la valeur en recourant à l'approche binomiale. Si ce call était écrit sur un actif financier, on tracerait d'abord l'arbre binomial de cet actif, ici le sous-jacent, en prenant comme valeur initiale le prix actuel de l'actif. Une fois l'arbre de l'actif construit, on passe ensuite au montage de celui du call. Après avoir déterminé les flux monétaires du call à son échéance (*payoffs*) en utilisant les flux monétaires du sous-jacent à l'échéance du call, on actualise ces flux en rétrogradant dans l'arbre jusqu'au temps présent. Pour déterminer le prix d'une option réelle par la méthode binomiale, on procédera de la même façon en prenant bien soin toutefois d'effectuer les transpositions appropriées. Dans le cas de l'option réelle, le sous-jacent est la VAN du projet. Pour évaluer l'option réelle, il faut donc dans un premier temps établir l'arbre binomial du sous-jacent en prenant comme valeur de départ la VAN actuelle du projet. On se sert par la suite des flux monétaires du sous-jacent à l'échéance de l'option réelle pour évaluer cette dernière. Comme nous le verrons dans la section suivante, cette transposition des méthodes d'analyse de l'option financière à celles de l'option réelle est fort simple.

Appelons VAN passive d'un projet sa valeur actuelle nette qui exclut les options réelles emmagasinées dans ledit projet. C'est donc la VAN traditionnelle qui est égale à la valeur actualisée des flux monétaires espérés du projet à laquelle on retranche le coût de l'investissement initial, c'est-à-dire :

$$\text{VAN passive} = \sum_{i=1}^{N} \frac{E_0(CF_i)}{(1+k)^i} + \frac{E_0(V_N)}{(1+k)^N} - I_0 \qquad (1)$$

avec :

CF_t = le flux monétaire au temps t,

k = le coût du capital, qui incorpore la prime de risque du projet,

V_N = la valeur de liquidation éventuelle du projet à l'échéance,

I_0 = l'investissement initial réalisé au temps 0.

3. C'est-à-dire qu'il ne peut être exercé avant son échéance.

De manière à incorporer les options réelles dans l'analyse des projets d'investissement, nous introduisons un nouveau concept, la VAN augmentée d'un projet, qui est la somme de la VAN passive du projet et de la valeur des options réelles incorporées dans ledit projet, c'est-à-dire :

$$\text{VAN augmentée} = \text{VAN passive} + \text{valeur des options réelles} \quad (2)$$

Les options réelles d'un projet augmentent donc sa valeur puisqu'elles lui apportent une flexibilité certaine. Des projets qui seraient rejetés lorsque l'on ne prend pas en compte leurs options réelles pourront être acceptés quand on en calcule la VAN augmentée.

Nous passons maintenant à l'analyse de quelques cas simples d'options réelles, puis nous en envisagerons de plus complexes.

2. Cas simples d'options réelles

2.1. L'option d'abandon

L'option d'abandon d'un projet est sans doute le cas le plus simple d'option réelle. Considérons le cas suivant d'un projet d'investissement, qui sera le même pour tous les exemples de ce chapitre. La VAN passive du projet est de 100 millions de dollars. L'écart-type des rendements du projet est de 0,4 et le taux d'intérêt sans risque se situe à 6 %. La durée du projet est de 2 ans. Si l'entreprise décide d'abandonner son projet au cours des deux prochaines années, elle retirera comme valeur de liquidation 100 millions de dollars. L'option d'abandon a donc comme impact de mettre un plancher de 100 millions de dollars aux flux monétaires qui apparaissent dans l'arbre binomial de la VAN augmentée[4]. Pour évaluer l'option d'abandon, il faut dans un premier temps tracer l'arbre binomial du sous-jacent de l'option d'abandon, soit la VAN passive du projet, ce qui nous permettra, dans un second temps, de tracer l'arbre de la VAN augmentée du projet.

4. Cette option d'abandon est donc américaine, c'est-à-dire qu'elle peut être exercée en tout temps. Si cette option était européenne, elle se confondrait alors à une simple valeur de liquidation qui est déjà prise en compte dans l'équation de la VAN passive (équation (1)).

Pour tracer l'arbre binomial, nous divisons la durée du projet en deux périodes d'une année chacune. Le programme Visual Basic que nous fournirons nous permettra cependant de diviser la durée du projet en un nombre de pas beaucoup plus élevé, ce qui augmentera la précision de nos évaluations d'options.

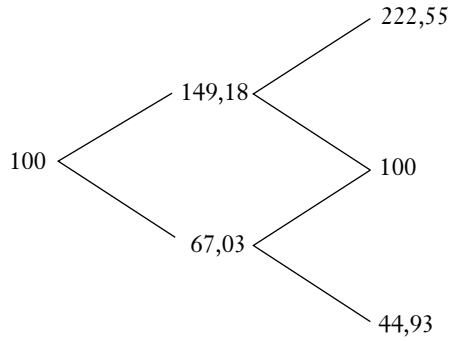
Pour tracer les arbres binomiaux de la VAN passive et de la VAN augmentée, nous devons évaluer certains paramètres : u, soit le multiplicateur du mouvement de hausse du sous-jacent dans l'arbre binomial ; d, le multiplicateur du mouvement de baisse et p, la probabilité d'un mouvement de hausse dans un univers neutre au risque. Nous avons donné les formules de ces paramètres pour un modèle lognormal dans le chapitre 1. Le multiplicateur du mouvement de hausse u est égal à : $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Pour sa part, le multiplicateur du mouvement de baisse d est de : $e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Finalement, la probabilité p d'un mouvement de hausse dans un univers neutre au risque est de : $\frac{e^{r\times\Delta t} - d}{u - d}$, la probabilité d'un mouvement de baisse étant de (1 – p). En reprenant les données de notre problème, nous obtenons pour ces paramètres les valeurs présentées au tableau 1.

TABLEAU 1 **Valeur des paramètres de l'arbre binomial**

Paramètre	Valeur
u	1,4918
d	0,6703
p	0,4766
1 – p	0,5234

Nous traçons d'abord l'arbre binomial de l'évolution du sous-jacent de l'option A, ici la VAN de 100 millions de dollars du projet d'investissement. Cet arbre apparaît à la figure 1.

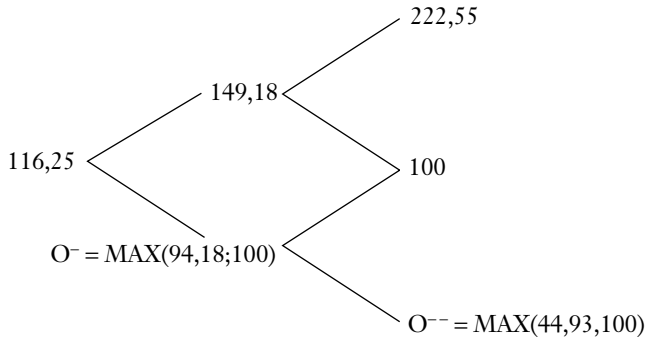
FIGURE 1 **Arbre binomial du sous-jacent : la VAN passive**



À la période 0, le sous-jacent, soit la VAN passive, vaut 100. Comme il suit un mouvement binomial multiplicatif, il pourra augmenter à : $100 \times u = 100 \times 1{,}4918 = 149{,}18$ à la période 1 ou diminuer au cours de cette même période à : $100 \times d = 100 \times 0{,}6703 = 67{,}03$. Et ainsi de suite.

Comme nous le disions auparavant, l'option d'abandon a comme impact, dans le cadre de notre exemple, de mettre un plancher de 100 millions de dollars aux flux monétaires qui apparaissent dans l'arbre binomial de la VAN augmentée. La figure 2 retrace l'évolution de la VAN augmentée du projet qui prend en compte l'option d'abandon.

FIGURE 2 **VAN augmentée avec option d'abandon**



Pour construire cet arbre binomial, nous procédons comme à l'accoutumée. Nous déterminons les flux monétaires de la VAN augmentée à l'échéance, puis nous les actualisons jusqu'à la période 0 en rétrogradant dans l'arbre. Comme l'option est du type américain, nous devons calculer à chaque nœud le maximum de la valeur actualisée des flux, soit la valeur de poursuite, et de la valeur d'exercice[5], ce que nous appelons la règle d'exercice dans un arbre binomial. Nous avons illustré les calculs aux nœuds O^{--} et O^{-} à la figure 2. Au nœud O^{--}, soit à l'extrémité de l'arbre, le flux monétaire est le maximum des deux montants suivants : *i*) le flux monétaire actualisé du sous-jacent au nœud correspondant, soit 44,93 ; *ii*) la valeur d'abandon, ici 100. Le flux monétaire alloué au nœud O^{--} est donc 100. Au nœud O^{-}, le flux monétaire est le maximum des deux montants suivants : *i*) la valeur espérée actualisée des deux flux monétaires au bout de ce nœud, tous deux de 100, soit : $\left[p(100) + (1 - p)100\right]e^{-0,06} = 100e^{-0,06} = 94,18$; *ii*) la valeur d'abandon, ici de 100. Le nœud O^{-} se voit donc allouer une valeur de 100. En procédant de la sorte, on calcule une VAN augmentée de 116,25, ce qui veut dire que l'option d'abandon du projet vaut 16,25 (VAN augmentée – VAN passive = 116,25 – 100 = 16,25) lorsque N = 2. Cette option a pour conséquence d'établir un plancher de 100 pour les flux monétaires qui apparaissent aux nœuds de l'arbre binomial de la VAN augmentée (figure 2) alors qu'ils pouvaient diminuer sous la barre de 100 dans l'arbre de la VAN classique (figure 1).

Le tableau 2 fournit une fonction Visual Basic pour calculer la VAN augmentée avec option d'abandon. On peut juger de la justesse des calculs précédents en augmentant le nombre de pas (N) de 2 à 100 (figure 3). La valeur de l'option d'abandon passe alors de 16,25 millions de dollars à 17,28 millions de dollars, cette dernière valeur étant une estimation beaucoup plus précise de l'option d'abandon. Comme on le sait, il vaut mieux procéder avec un grand nombre de pas pour évaluer une option à l'aide de la technique de l'arbre binomial.

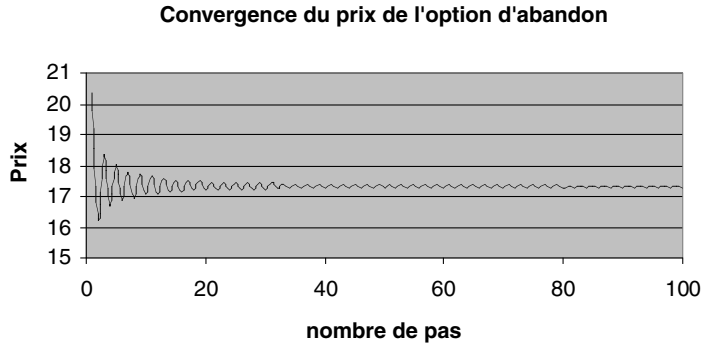
5. Soit 100 dans cet exemple.

TABLEAU 2 Fonction Visual Basic de la VAN augmentée avec option d'abandon

```
Function optabandon(AB, T, S, Rf, N, sigma)
' où AB: valeur d'abandon
'Déclaration des variables et des vecteurs
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)
'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation
dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)
'Calcul des flux monétaires de la VAN classique à la fin de l'arbre
Smat(0) = S * (d ^ N)
For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j
'Calcul des flux monétaires de la VAN augmentée à la fin de l'arbre
For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(AB, Smat(j))
Next j
'Actualisation des flux de la VAN augmentée
For i = N - 1 To 0 Step -1
    For j = 0 To i
    Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))
    'On applique la règle d'exercice de l'option d'abandon
    Smat(j) = Smat(j) / d
    Cash(j) = Application.Max(Cash(j), AB)
    Next j
Next i
'Valeur de la VAN augmentée avec option d'abandon
optabandon = Cash(0)

End Function
```

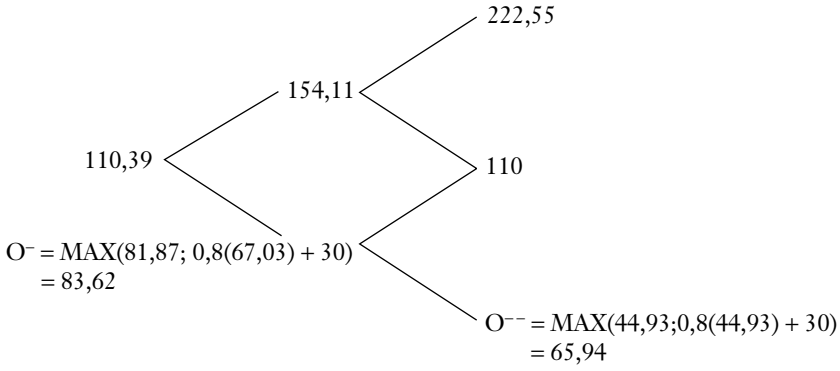
FIGURE 3



2.2. L'option de contraction

Nous envisageons maintenant l'option de contraction, soit celle où l'entreprise peut réduire sa dimension tout en diminuant ses coûts. Nous supposons que l'entreprise précédente peut réduire sa taille de 80 %, ce qui lui permet d'économiser 30 millions de dollars. C'est là l'option de contraction. Elle y recourra en période de conjoncture difficile, là où une cure d'amaigrissement s'impose. La figure 4 retrace l'évolution de la VAN augmentée avec option de contraction.

FIGURE 4 **VAN augmentée avec option de contraction**



Nous avons précisé certains calculs dans cet arbre. Au nœud O^{--}, le flux monétaire qui y apparaît est le maximum des deux montants suivants : *i*) le flux monétaire du sous-jacent au nœud correspondant, soit 44,93 millions de dollars ; *ii*) 80 % du flux monétaire du sous-jacent au nœud correspondant auquel s'ajoute une économie de 30 millions de dollars, soit 65,94 millions de dollars. Au nœud O^{-}, le flux monétaire est la maximum des deux montants suivants : *i*) la valeur espérée actualisée des deux flux monétaires au bout de ce nœud (valeur de poursuite), soit :

$$\begin{aligned}\left[p(110) + (1-p)65,94\right]e^{-0,06} &= \left[0,4766(110) + (1-0,5234)65,94\right]e^{-0,06} \\ &= 81,87\end{aligned}$$

ii) 80 % du flux monétaire du sous-jacent au nœud correspondant (67,03) auquel s'ajoute une économie de 30 millions de dollars, soit 83,62 millions de dollars. Sous N = 2, la valeur de l'option de contraction est de 10,39 millions de dollars. Le tableau 3 fournit la fonction Visual Basic pour calculer cette option. Lorsque N passe de 2 à 100, la valeur de l'option de contraction passe de 10,39 à 10,47 millions de dollars.

TABLEAU 3 **Fonction Visual Basic de la VAN augmentée avec option de contraction**

```
' ratioc est le ratio de contraction, 0,8 dans notre exemple et
econ sont les économies réalisées _
en raison de la contraction, 30 dans notre exemple.

'Déclaration des variables et des vecteurs

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)

'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation

dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
```

TABLEAU 3 *(suite)*

```
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)

'Calcul des flux monétaires de la VAN classique à la fin de l'arbre


Smat(0) = S * (d ^ N)

For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j

'Calcul des flux monétaires de la VAN augmentée à la fin de l'arbre


For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(ratioc * Smat(j) + econ, Smat(j))
Next j

'Actualisation des flux de la VAN augmentée


For i = N - 1 To 0 Step -1

    For j = 0 To i
    Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))

    'On applique la règle d'exercice de l'option de contraction

    Smat(j) = Smat(j) / d
    Cash(j) = Application.Max(Cash(j), ratioc * Smat(j) + econ)

    Next j

Next i

'Valeur de la VAN augmentée avec option de contraction

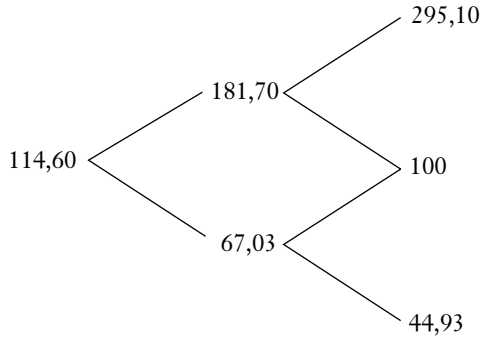
optcontract = Cash(0)

End Function
```

2.3. L'option de croissance

Avant d'aborder des options plus complexes, nous dirigeons finalement notre attention du côté de l'option de croissance, soit celle où l'entreprise peut augmenter sa taille en subissant toutefois une augmentation de coûts. Nous supposons qu'une entreprise peut doubler sa taille en encourant des coûts additionnels de 150 millions de dollars. C'est là l'option de croissance. Elle y recourra en période de haute conjoncture, là où la bonne marche des affaires encourage une expansion de l'entreprise. La figure 5 retrace l'évolution de la VAN augmentée avec option de croissance. Les calculs sont cette fois-ci laissés au lecteur en guise d'exercice. Si N = 2, l'option de croissance vaut 14,60 millions de dollars.

FIGURE 5 **Arbre binomial de la VAN augmentée avec option de croissance**



Le tableau 4 fournit la fonction Visual Basic pour calculer cette option. Lorsque N passe de 2 à 100, la valeur de l'option de croissance passe de 14,60 à 12,59 millions de dollars.

TABLEAU 4 Fonction Visual Basic de la VAN augmentée avec option de croissance

```
Function optcroissance(ratioex, cex, T, S, Rf, N, sigma)

' ratioex est le ratio d'expansion du projet, 2 dans notre exemple,
et cex sont les coûts encourus _
lors de cette opération, 150 millions $ dans notre exemple.

'Déclaration des variables et des vecteurs

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)

'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation

dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)

'Calcul des flux monétaires de la VAN classique à la fin de l'arbre

Smat(0) = S * (d ^ N)

For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j

'Calcul des flux monétaires de la VAN augmentée à la fin de l'arbre

For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(ratioex * Smat(j) - cex, Smat(j))
Next j

'Actualisation des flux de la VAN augmentée

For i = N - 1 To 0 Step -1

For j = 0 To i
   Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))

   'On applique la règle d'exercice de l'option de croissance

   Smat(j) = Smat(j) / d
   Cash(j) = Application.Max(Cash(j), ratioex * Smat(j) - cex)

   Next j

Next i

'Valeur de la VAN augmentée avec option de croissance

optcroissance = Cash(0)

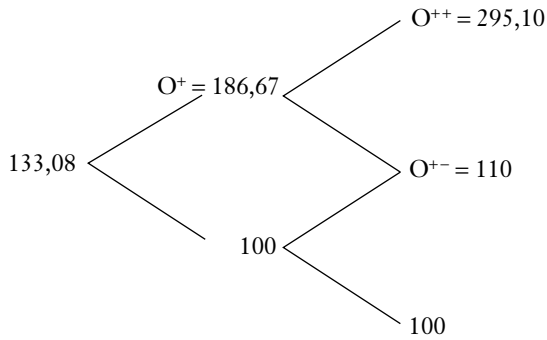
End Function
```

3. CAS D'OPTIONS RÉELLES PLUS COMPLEXES

3.1. L'option de choisir

L'entreprise a maintenant le choix entre les trois options précédentes : option d'abandon, option de contraction et option de croissance. Ces trois options sont exclusives en ce sens que l'exercice de l'une d'elles exclut évidemment l'exercice des autres. De même nous verrons que ces options sont interactives : elles ne s'additionnent pas. À la figure 6 se retrouve l'arbre binomial de la VAN augmentée avec option de choisir pour (N = 2).

FIGURE 6 **Arbre binomial de la VAN augmentée avec option de choisir**



Précisons les calculs à quelques nœuds de l'arbre. Les valeurs qui apparaissent au bout de l'arbre sont évidemment les valeurs maximales aux nœuds correspondants des trois arbres antérieurs, soit ceux associés à l'option d'abandon, l'option de contraction et l'option de croissance. Au nœud O^{++}, la valeur qui s'y lit est le maximum des quatre nombres suivants : *i*) la valeur du sous-jacent à ce nœud, soit 222,55 ; *ii*) la valeur d'abandon, soit 100 ; *iii*) la valeur de croissance à ce nœud, soit 2(222,55) – 150 = 295,10 ; *iv*) la valeur de contraction à ce nœud, soit 0,8(222,55) – 30 = 208,04. Le flux monétaire associé au nœud O^{++} est donc de 295,10, c'est-à-dire que l'on exerce l'option de croissance à ce nœud.

Au nœud O^{+}, le flux monétaire est le maximum des quatre nombres suivants : *i*) la valeur actualisée des flux des nœuds O^{++} et O^{+-} (valeur de poursuite), soit $\left[0,4766\left(295,10\right)+0,5234\left(110\right)\right]e^{-0,06}$ = 186,67 ; *ii*) la valeur d'abandon, soit 100 ; *iii*) la valeur de contraction à ce nœud, soit $\left(0,8\times149,18\right)+30=149,34$; *iv*) la valeur de croissance à ce nœud, soit $\left(2\times149,18\right)-150=148,36$. Le flux monétaire associé au nœud O^{+} est donc la valeur de poursuite du projet, c'est-à-dire 186,67 millions de dollars. En procédant de la sorte, on trouve que la valeur de l'option de choisir est de 33,08 millions de dollars lorsque le nombre de pas est de 2 (N = 2).

Le tableau 5 renferme une fonction Visual Basic qui calcule la valeur de l'option de choisir. Lorsque le nombre de pas (N) passe de 2 à 100 dans notre exemple, la valeur de l'option de choisir s'abaisse de 33,08 à 31,25 millions de dollars.

TABLEAU 5 **Fonction Visual Basic de la VAN augmentée avec option de choisir**

```
Function optchoisir(AB, ratioc, econ, ratioex, cex, T, S, Rf, N,
sigma)

'Déclaration des variables et des vecteurs

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)

'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation

dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)

'Calcul des prix de l'action à la fin de l'arbre

Smat(0) = S * (d ^ N)
```

TABLEAU 5 *(suite)*

```
For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j

'Calcul des flux monétaires de la VAN classique à la fin de l'arbre


For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(AB, ratioc * Smat(j) + econ, ratioex *
Smat(j) - cex, Smat(j))
Next j

'Actualisation des flux de la VAN augmentée

For i = N - 1 To 0 Step -1

For j = 0 To i
Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))



    'On applique la règle d'exercice de l'option de choisir

    Smat(j) = Smat(j) / d
    Cash(j) = Application.Max(Cash(j), AB, ratioc * Smat(j) + econ,
ratioex * Smat(j) - cex)

    Next j

Next i

'Valeur de la VAN augmentée avec option de choisir

optchoisir = Cash(0)

End Function
```

Le tableau 6 contient les prix des quatre options précédentes lorsque le nombre de pas dans l'arbre est de 100 (N = 100). Ces prix ont été calculés à partir des programmes Visual Basic qui sont incorporés dans cette section. Comme on peut le constater, la valeur de l'option de choisir n'est pas égale à la somme de ses constituantes puisque ces dernières sont interactives.

TABLEAU 6 **Prix de l'option de choisir et de ses constituantes (N = 100)**

Option d'abandon	17,28
Option de contraction	10,47
Option de croissance	12,59
Option de choisir	31,25

3.2. L'option réelle composée ou l'option sur option

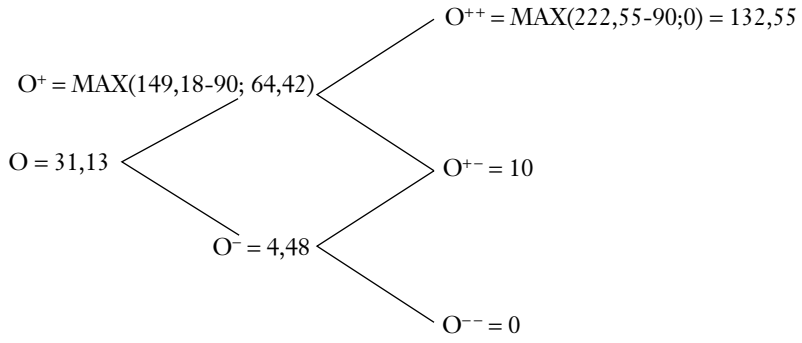
Une option composée est une option qui dépend d'une autre option. C'est donc une option sur une option. Mun cite l'exemple d'une pharmacie qui veut commercialiser un nouveau médicament qui demande l'approbation d'un organisme de réglementation, ici l'option réelle A. Or, cette approbation dépend de tests effectués sur des humains, ici l'option réelle B ou l'option composée. La valeur de l'option B dépend donc de celle de l'option A. Nous voulons évaluer l'option B.

Pour évaluer l'option B, il faut d'abord tracer l'arbre binomial du sous-jacent de l'option A, ici la VAN du projet. Il suffit par la suite de tracer l'arbre binomial de l'option A et de se servir de ce résultat pour évaluer l'option B. Comme le projet ne change pas dans le cadre de nos exemples, l'arbre de la VAN passive du projet se retrouve à la figure 1.

Nous devons ensuite tracer l'arbre binomial de l'option A, un call américain, à partir de l'arbre du sous-jacent que nous venons de construire, le prix d'exercice de l'option A étant de 90 millions de dollars. Nous procédons comme à l'accoutumée pour l'évaluer par la technique de l'arbre binomial. Nous déterminons les flux monétaires de l'option à son échéance, puis nous les actualisons jusqu'à la période 0 en rétrogradant dans l'arbre. Comme l'option est du type américain, nous devons calculer à chaque nœud le maximum de la valeur actualisée, soit la valeur de poursuite, et de la valeur d'exercice, soit l'application de la règle d'exercice dans un arbre binomial[6]. L'évaluation de l'option A apparaît à la figure 7.

6. Il s'agit ici d'un call américain sans flux monétaires intermédiaires. Sa valeur est donc égale à celle du call européen correspondant. Mais par souci de généralité, nous appliquerons quand même la règle d'exercice, même si elle est redondante dans ce cas. Par exemple, si l'option était un put américain, la règle d'exercice serait contraignante.

FIGURE 7 **Arbre binomial de l'option A**



Nous avons indiqué quelques calculs dans la figure 7. Par exemple, au nœud O^{++} à l'échéance de l'option A, le flux monétaire de celle-ci est le maximum des deux valeurs suivantes : *i*) la différence entre la valeur du sous-jacent au nœud correspondant sur l'arbre du sous-jacent (222,55) et le prix d'exercice (90) ; *ii*) zéro.

Par ailleurs, au nœud O^{+}, la valeur du flux monétaire est le maximum des deux montants suivants : *i*) la valeur d'exercice de l'option, soit la différence entre la valeur du sous-jacent à ce nœud et le prix d'exercice ; *ii*) la valeur actualisée de l'espérance des deux flux monétaires des branches O^{++} et O^{+-} qui sont rattachées à ce nœud, cette dernière valeur étant la valeur de poursuite de l'option.

La valeur d'exercice de l'option au nœud O^{+} est de (149,18 – 90), soit 59,18 millions de dollars. La valeur espérée actualisée du flux monétaire à ce nœud est de :

$$\left[pO^{++} + (1-p)O^{+-}\right] e^{-r\times\Delta t} = \left[(0,4766)(132,55) + (0,5234)(10)\right] e^{-0,06}$$
$$= 64,42$$

La valeur du flux monétaire de l'option au nœud O^{+} est donc de 64,42. En procédant de la sorte, on trouve que la valeur de l'option A est de 31,13 millions de dollars lorsque l'arbre binomial comprend 2 pas (N = 2). Un programme Visual Basic pour calculer le prix de l'option A se retrouve au tableau 7. C'est une fonction qui calcule le prix d'un call américain.

TABLEAU 7 Fonction Visual Basic du calcul du prix de l'option A

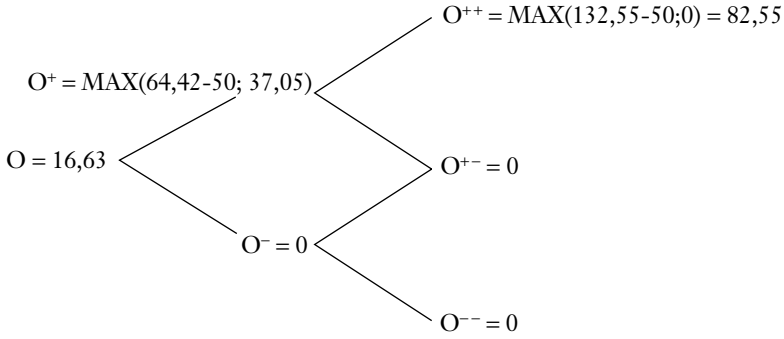
```
Function callamer(X, T, S, Rf, N, sigma)
'Avec S: VAN; X:valeur d'exercice; T: durée de l'option; N: nombre
de pas; Rf: taux _
sans risque et sigma: écart-type des rendements du projet.
'Déclaration des variables et des vecteurs
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
ReDim Cash(N)
'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation
dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)
'Calcul de la valeur du sous-jacent à la fin de l'arbre
Smat(0) = S * (d ^ N)
For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j
'Calcul des flux monétaires de l'option d'achat à la fin de l'arbre
For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(0, Smat(j) - X)
Next j

'Actualisation des flux de l'option
For i = N - 1 To 0 Step -1
    For j = 0 To i
    Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))
'On applique la règle d'exercice
    Smat(j) = Smat(j) / d
    Cash(j) = Application.Max(Cash(j), Smat(j) - X)
    Next j
Next i
'Prix de l'option d'achat américaine
callamer = Cash(0)
End Function
```

On peut juger de la justesse des calculs précédents en augmentant le nombre de pas (N) de 2 à 100. La valeur de l'option A passe alors de 31,13 à 31,61 millions de dollars. Nous étions donc ici près de la cible, mais ce n'est pas toujours le cas. Comme nous le disions antérieurement, il vaut mieux procéder avec un grand nombre de pas pour évaluer une option à l'aide de la technique de l'arbre binomial.

L'option composée B s'évalue de la même façon que l'option A. Il y a cependant deux différences entre ces deux options. Le sous-jacent de l'option A est la VAN du projet alors celui de l'option B est l'option A, d'où son nom d'option composée. De même, le prix d'exercice de l'option B est de 50 millions de dollars alors que celui de l'option A est de 90 millions de dollars. L'arbre binomial des flux monétaires de l'option B apparaît à la figure 8.

FIGURE 8 **Arbre binomial de l'option B**



À la figure 8, nous avons détaillé les calculs de mêmes nœuds que ceux de la figure 2. Au nœud O^{++} à l'échéance de l'option B, le flux monétaire de celle-ci est le maximum des deux valeurs suivantes : *i*) la différence entre la valeur du sous-jacent (option A) au nœud correspondant sur l'arbre du sous-jacent (132,55) et le prix d'exercice (50), cette différence étant de 82,55 ; *ii*) zéro.

Par ailleurs, au nœud O^{+}, la valeur du flux monétaire est le maximum des deux montants suivants : *i*) la valeur d'exercice de l'option, soit la différence entre la valeur correspondante du sous-

jacent à ce nœud et le prix d'exercice ; *ii*) la valeur actualisée de l'espérance des deux flux monétaires des branches O^{++} et O^{+-} qui sont rattachées à ce nœud.

La valeur d'exercice de l'option au nœud O^{+} est de (64,42 – 50), soit 14,42 millions de dollars. La valeur espérée actualisée du flux monétaire à ce nœud est de :

$$\left[pO^{++} + (1-p)O^{+-}\right] e^{-r\times\Delta t} = \left[(0,4766)(82,55) + (0,5234)(0)\right] e^{-0,06} = 37,05$$

La valeur du flux monétaire de l'option au nœud O^{+} est donc de 37,05. En procédant de la sorte, on trouve que la valeur de l'option B est de 16,63 millions de dollars lorsque l'arbre binomial comprend 2 pas (N = 2). Cette valeur doit être comparée avec la VAN statique du projet, qui est égale à (100 – 90) = 10 millions de dollars[7]. La valeur corrigée de l'option incorporée dans le projet est donc de 6,63 millions de dollars. L'option composée rehausse donc la VAN statique du projet de ce montant.

Au tableau 8, nous avons modifié le programme du tableau 7 pour y intégrer l'option composée. Les ajouts au tableau 7 apparaissent en caractères gras.

TABLEAU 8 **Fonction Visual Basic du calcul du prix de l'option B (option réelle)**

```
Function optcomp (X, X1, T, S, Rf, N, sigma)
'Déclaration des variables et des vecteurs, X1 étant le prix
d'exercice de l'option B
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Smat() As Variant
ReDim Smat(N)
Dim Cash() As Variant
```

7. Nous devons soustraire 90 millions de dollars à la VAN augmentée car pour calculer les flux monétaires de l'option A, soit le sous-jacent de B, nous avons retranché ce montant de ces flux. Le prix d'exercice de l'option A est en effet 90 millions de dollars.

TABLEAU 8 *(suite)*

```
ReDim Cash(N)
Dim Casho() As Variant
ReDim Casho(N)


'Calcul du pas, des probabilités et du taux d'actualisation

dt = T / N
u = Exp(sigma * Sqr(dt))
d = Exp(-sigma * Sqr(dt))
p = (Exp(Rf * dt) - d) / (u - d)
disc = Exp(-Rf * dt)

'Calcul des prix du sous-jacent à la fin de l'arbre

Smat(0) = S * (d ^ N)

For j = 1 To N
Smat(j) = Smat(j - 1) * (u / d)
Next j

'Calcul des flux monétaires des options A et B à la fin de l'arbre

For j = 0 To N
Cash(j) = Application.Max(0, Smat(j) - X)
Casho(j) = Application.Max(0, Cash(j) - X1)

Next j

'Actualisation des flux des options A et B

For i = N - 1 To 0 Step -1

   For j = 0 To i
   Cash(j) = disc * (p * Cash(j + 1) + (1 - p) * Cash(j))
   Casho(j) = disc * (p * Casho(j + 1) + (1 - p) * Casho(j))

'On applique la règle d'exercice

   Smat(j) = Smat(j) / d
   Cash(j) = Application.Max(Cash(j), Smat(j) - X)
   Casho(j) = Application.Max(Casho(j), Cash(j) - X1)

   Next j

Next i

'Prix de l'option d'achat américaine

optcomp = Casho(0)


End Function
```

Comme on peut le constater au tableau 8, les flux monétaires de l'option B sont calculés immédiatement après ceux de l'option A, l'option A étant le sous-jacent de l'option B. Lorsque l'arbre comporte deux pas (N = 2), nous avons calculé antérieurement que la valeur corrigée de l'option B s'établissait à 6,63 millions de dollars. Lorsque N = 100, notre programme Visual Basic indique que la valeur corrigée de l'option B est de 4,57 millions de dollars. Une erreur importante surgit donc cette fois-ci lorsque l'on n'utilise qu'un petit nombre de pas.

CONCLUSION

Black et Scholes en 1973 avaient bien établi, dans leur fameux article qui révélait pour la première fois une forme analytique pour le prix d'un call européen qui soit purgée du prix du risque, qu'une action était une option d'achat sur la valeur de l'entreprise. Le sous-jacent dans ce cas n'était plus un actif financier mais un actif réel. Mais le premier auteur à avoir établi un lien entre une opportunité d'investissement et une option est Myers (1977)[8]. Depuis, la théorie des options réelles n'a eu de cesse de se développer. Et elle a trouvé un très grand nombre d'applications dans des domaines aussi variés que l'évaluation des entreprises de biotechnologie, des projets d'exploitation de ressources naturelles et des projets de recherche et développement. Et l'intérêt des chercheurs pour la théorie des options réelles et ses applications ne cesse de croître.

L'analyse de la valeur d'un projet d'investissement n'est donc plus un exercice statique comme c'était le cas auparavant. D'emblée, l'identification des options réelles inhérentes à un projet d'investissement requiert un effort analytique important. Il faut par la suite déterminer leur valeur. Nous avons eu recours à une seule méthode de *pricing* des options réelles dans ce chapitre : l'arbre binomial. Mais toutes les autres techniques du calcul numérique peuvent être mises à contribution pour déterminer les prix des options réelles : arbre trinomial, quadrinomial, pyramide, grille numérique et simulation Monte Carlo. Nous avons analysé en détails la plupart de ces techniques

8. Myers, S.C. (1977), « Determinants of Corporate Borrowing », *Journal of Financial Economics*, p. 6-13.

dans les chapitres précédents. Le lecteur pourra donc les transposer aisément au calcul des prix des options réelles. Le chercheur pourra également transposer les travaux actuels sur l'utilisation de la simulation Monte Carlo pour le *pricing* des options financières américaines aux options réelles, travaux qui ont été répertoriés au chapitre 1[9].

Dans la foulée de la spéculation de plus en plus forte sur les marchés des options financières ces dernières années, le spécialiste des produits dérivés était en droit de craindre la disparition à moyen terme de ces marchés, et partant de sa spécialité. Mais, avec le développement accéléré du champ des options réelles, il n'a plus à s'angoisser d'être mis au rancart car, advenant un cataclysme, il n'a qu'à transposer les techniques d'analyse des options financières aux options réelles. Et il n'a pas à redouter la disparition des options réelles car, comme leur nom l'indique, elles sont inhérentes au monde réel. Ces options foisonnent, sont partout, et il ne suffit que d'un effort d'imagination pour en faire apparaître comme par magie de nouvelles.

9. Rappelons les articles ou livres de base sur ce sujet : Broadie, M. et P. Glasserman (1997), « Pricing American Style Securities Using Simulation », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1323-1352 ; Boyle, P., M. Broadie et P. Glasserman (1997), « Monte Carlo Methods for Security Pricing », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1267-1321 ; Longstaff, F.A. et E.S. Schwartz (2001), « Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach », *Review of Financial Studies*, p. 113-147 ; Andersen, L. et M. Broadie (2001), *A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options*, working paper, Columbia University ; Tavella, D. (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*, New York, Wiley.

ANNEXE 12.1

Distribution de la VAN et options réelles

Dans cette annexe, nous envisageons la VAN dans une autre perspective. Du fait de l'incertitude dans laquelle elle baigne, l'entreprise calcule la distribution de sa VAN. Elle ne prend plus sa décision d'investir dans un projet sur la base d'une valeur ponctuelle de la VAN mais bien sur la base de sa distribution. Cette décision dépend alors de deux nouveaux paramètres : la probabilité cumulative des VAN négatives et le degré d'aversion au risque du gestionnaire. Même si l'espérance de la VAN d'un projet d'investissement est positive, il se peut en effet que la probabilité cumulative d'une VAN négative ne soit pas négligeable. Si le gestionnaire souffre d'un fort degré d'aversion au risque, il pourrait bien rejeter ce projet en dépit d'une espérance positive pour la VAN.

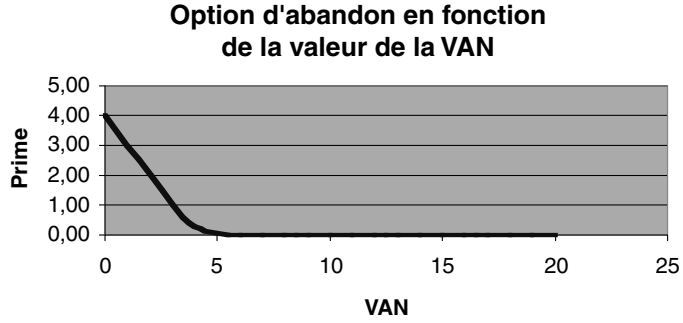
Faisons l'hypothèse que la VAN passive d'un projet soit distribuée normalement. L'investisseur fait face à un projet dont l'espérance de la VAN se chiffre à 5 millions de dollars. L'écart-type de cette VAN est également de 5 millions de dollars et la durée du projet est de 5 ans. Nous voulons déterminer comment les options réelles qu'incorpore le projet viennent modifier la distribution de la VAN passive. Autrement dit, nous voulons comparer la distribution de la VAN augmentée à celle de la VAN passive.

Supposons d'abord que l'entreprise ait à sa disposition une option d'abandon sur le projet précédent. La valeur d'abandon est de 4 millions de dollars. Pour évaluer cette option, il nous faut également les informations suivantes : l'écart-type des rendements du projet qui est de 0,15 et le taux sans risque, de 5 %. Nous évaluons cette option à l'aide d'un arbre binomial en fixant le nombre de pas à 50 (N = 50).

La figure A12.1 retrace l'évolution de la valeur de l'option d'abandon[10] en fonction de son sous-jacent, la VAN passive. On voit que cette option se comporte comme un put. Comme nous l'avons dit à l'intérieur du chapitre 12, l'option d'abandon agit à titre de police d'assurance pour le projet : elle joue donc bien le rôle d'un put. On constate également à l'analyse de la figure A12.1 que ce put est du

10. Soit la prime de cette option.

FIGURE A12.1

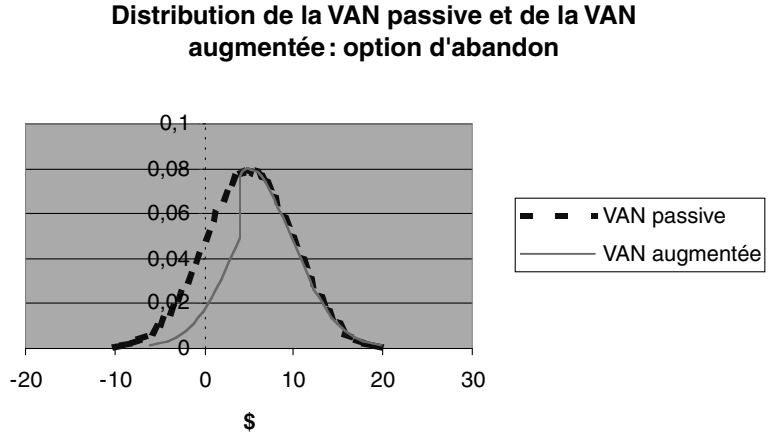


type américain. Lorsque la VAN passive tombe en deçà de 4 millions de dollars, le put est alors automatiquement exercé, c'est-à-dire que le projet est abandonné, et la relation entre la prime de l'option et la VAN devient un segment de droite à pente négative dans cette zone. Autrement dit, la valeur du put est égale à sa valeur intrinsèque lorsque la VAN se situe en deçà de 4 millions de dollars.

Nous allons maintenant comparer la distribution de la VAN augmentée lorsque l'entreprise dispose d'une option d'abandon avec celle de la VAN passive qui obéit par hypothèse à une distribution normale. Cette comparaison se retrouve à la figure A12.2. Pour y arriver, nous avons d'abord construit la distribution de la VAN passive[11]. Puis nous avons ajouté à chacune des divisions de cette distribution les valeurs correspondantes de l'option d'abandon, ce qui nous a donné la distribution de la VAN augmentée. Cette dernière est donc l'addition horizontale de la distribution de la VAN passive et de la valeur de l'option d'abandon qui varie naturellement pour chacun des niveaux pris par la VAN passive.

11. Nous avons construit la distribution normale de la VAN à l'aide de la fonction *NormDist* d'Excel.

FIGURE A12.2



On voit sur la figure A12.2 que, pour des niveaux de VAN compris entre –10 et 6, l'option d'abandon a pour effet de pousser la distribution de la VAN passive vers la droite, ce qui diminue l'incidence de pertes. Par la suite, les deux distributions se confondent puisque l'option d'abandon a une prime négligeable lorsque la VAN passive excède sensiblement la valeur d'abandon du projet.

Envisageons maintenant l'option de contraction. Le ratio de contraction est ici de 0,9 et les économies qui sont réalisées à la suite de la contraction sont de 2 millions de dollars. La figure A12.3 indique qu'à l'instar de l'option d'abandon, l'option de contraction se comporte également comme un put. Elle a beaucoup de valeur lorsque l'entreprise connaît des temps difficiles, mais en a de moins en moins à mesure que la VAN de l'entreprise augmente.

Comme l'indique pour sa part la figure A12.4, l'option de contraction a pour effet de déplacer vers la droite la distribution de la VAN augmentée, mais l'écart entre les deux distributions se rétrécit au fur et à mesure que la VAN augmente, la prime de l'option de contraction diminuant alors de plus en plus. La distribution de la VAN augmentée a donc une asymétrie négative.

FIGURE A12.3

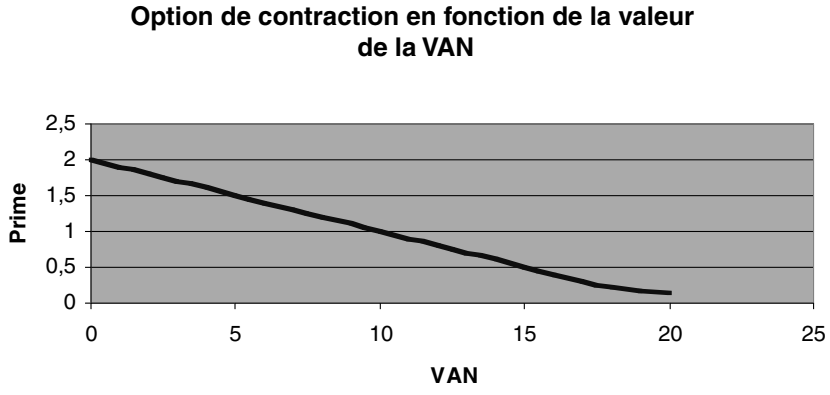
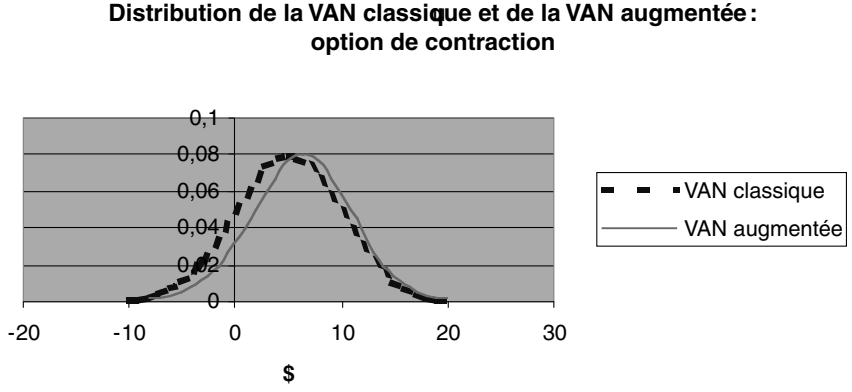


FIGURE A12.4



Tournons-nous vers l'option d'expansion. Le ratio d'expansion est de 1,2 et les frais encourus lors de l'expansion se chiffrent à 2 millions de dollars. La figure A12.5 indique que l'option d'expansion se comporte comme un call. Elle a en effet d'autant plus de valeur que la VAN passive est importante.

FIGURE A12.5

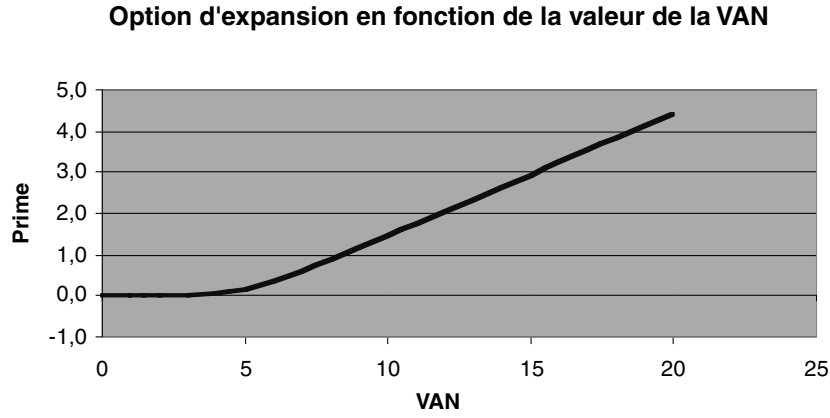
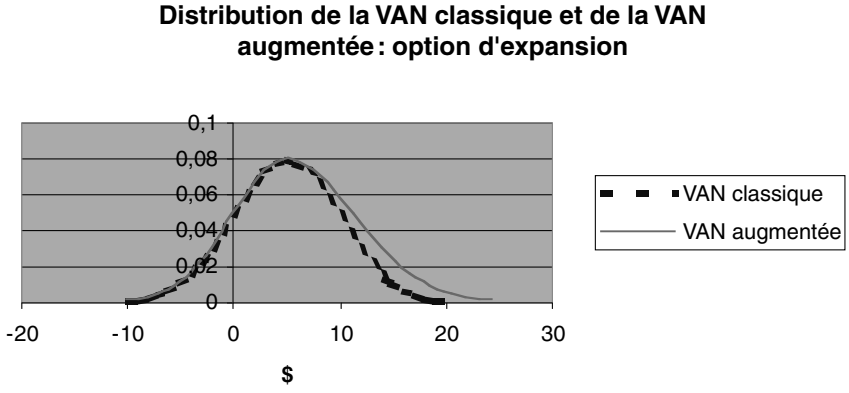


FIGURE A12.6



À la figure A12.6, on voit que, dans l'intervalle compris entre –10 et 5 millions de dollars, la distribution de la VAN augmentée se confond presque avec celle de la VAN passive, l'option de croissance ayant peu de valeur dans cette zone. Mais passé 5 millions de dollars, la distribution de la VAN augmentée se situe nettement à droite de la VAN passive : le projet d'investissement est nettement plus rentable lorsqu'il comporte une option de croissance. L'option de croissance confère donc une asymétrie positive à la distribution de la VAN augmentée.

Tournons finalement notre attention vers l'option de choisir. Selon la figure A12.7, la configuration de cette option en fonction de la VAN ressemble beaucoup à la stratégie « strangle ». Combinaison de calls et de puts, elle offre à l'entreprise une véritable stratégie d'options.

Comme il fallait s'y attendre, on constate à la figure A12.8 que l'option de choisir a pour effet de tasser vers la droite toute la distribution de la VAN passive. Elle augmente donc la rentabilité des projets quelle que soit la valeur prise par la VAN passive.

FIGURE A12.7

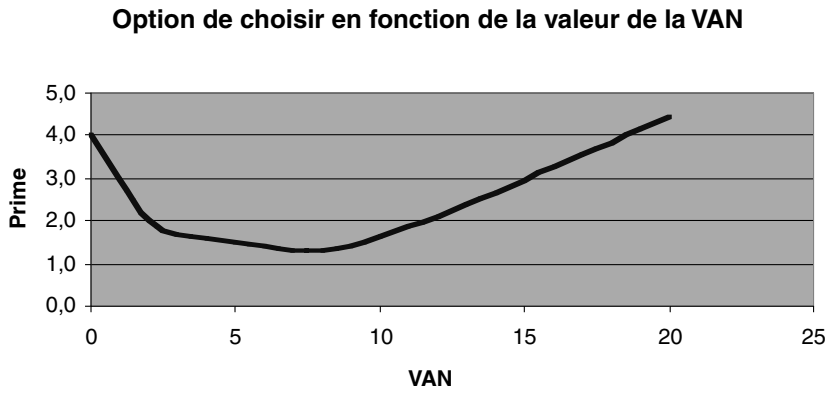
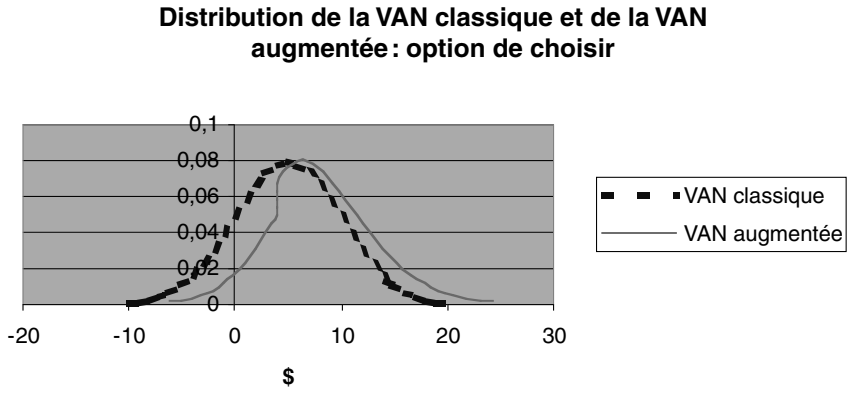


FIGURE A12.8



BIBLIOGRAPHIE

ANDERSEN, L. et M. BROADIE (2001), « A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options », working paper, Columbia University.

BOYLE, P., M. BROADIE et P. GLASSERMAN (1997), « Monte Carlo Methods for Security Pricing », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1267-1321.

BROADIE, M. et P. GLASSERMAN (1997), « Pricing American Style Securities Using Simulation », *Journal of Economic Dynamics and Control*, p. 1323-1352.

COPELAND, T. et V. ANTIKAROV (2001), *Real Options : A Practitioner's Guide*, New York, Texere.

LONGSTAFF, F.A. et E.S. SCHWARTZ (2001), « Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach », *Review of Financial Studies*, p. 113-147.

MUN, J. (2002), *Real Options Analysis : Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*, New York, John Wiley.

MYERS, S.C. (1977), « Determinants of Corporate Borrowing », *Journal of Financial Economics*, p. 6-13.

NEFTCI, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of financial Derivatives*, 2e édition, New York, Academic Press.

TAVELLA, D. (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*, New York, Wiley.

TRIGEORGIS, L. (1991), « A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investment », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, p. 309-326.

TRIGEORGIS, L. (1996), *Real Options*, Cambridge, MIT Press.

CHAPITRE

13

LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Nous avons étudié jusqu'ici deux grands outils du calcul numérique : l'arbre binomial et l'arbre trinomial. Or, il est possible de raffiner davantage les calculs en recourant à la méthode des différences finies. On peut démontrer que la méthode de l'arbre trinomial équivaut à la méthode explicite des différences finies, que nous étudierons dans un premier temps dans ce chapitre. Puis nous passerons à la méthode des différences finies implicite, d'abord la méthode classique et ensuite un raffinement de cette méthode, soit la méthode des différences finies de Crank-Nicolson.

Les diverses méthodes de différences finies sont maintenant très utilisées pour déterminer les prix des options dites exotiques, c'est-à-dire les options autres que les options classiques[1] d'achat et de vente (calls et puts). Dans ce chapitre, nous expliquerons ces diverses méthodes et nous verrons comment elles peuvent être transposées en langage Visual Basic. Mais comme nous allons recourir à l'équation différentielle de Black et Scholes pour illustrer ces méthodes, nous rappelons dans un premier temps comment est dérivée cette équation[2].

---

1. *Plain vanilla options*, en anglais.
2. Pour composer ce chapitre, nous sommes très redevables à Clewlow et Strickland (1998). Nous nous sommes entre autres inspirés du pseudo-code de leurs programmes de puts américains pour écrire nos programmes en Visual Basic. Nous remercions également notre collègue Pierre Rostan de nous avoir fourni une version préliminaire des programmes de puts américains en Visual Basic. Mais l'on ne doit pas négliger les autres références qui apparaissent dans la bibliographie et qui constituent les fondements de nos propos.

1. L'équation différentielle de Black et Scholes

Soit une fonction G(.) qui dépend de deux variables : x, qui suit un mouvement brownien, et t, qui représente ici le temps. L'expression de x est la suivante :

$$dx = adt + bz = adt + b\varepsilon\sqrt{dt} \tag{1}$$

où z est un processus de Wiener qui est le produit de la variable aléatoire ε, qui obéit à une distribution normale standard, et de $\sqrt{dt}$, où dt est une petite variation du temps. En vertu du lemme d'Ito, l'équation différentielle de G est la suivante :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2dt \tag{2}$$

Un cas particulier est celui où G ne dépend que de x et où x suit le mouvement brownien donné par l'équation (1). En vertu du lemme d'Ito, l'équation différentielle de G s'écrit alors :

$$dG = \frac{dG}{dx}dx + \frac{1}{2}b^2\frac{d^2G}{dx^2}dt \tag{3}$$

Supposons maintenant que G soit une fonction simple de S, qui désigne le prix d'une action. Par exemple, G peut être une option écrite sur S. Le prix de l'action S obéit au processus brownien géométrique suivant :

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz \tag{4}$$

Si le mouvement brownien était arithmétique, il s'écrirait plutôt comme suit :

$$dS = \mu dt + \sigma dz \tag{5}$$

Supposons que :

$$F = \ln(S) \tag{6}$$

On transforme en effet souvent le prix de l'action sous forme logarithmique avant de le simuler, car l'équation différentielle qui en résulte admet alors une discrétisation[3] exacte, ce qui ne serait pas le

3. Rappelons que discrétiser un processus signifie le faire passer du temps continu au temps discret.

cas si l'on simulait le prix de l'action en faisant appel à l'équation (4). En appliquant le lemme d'Ito à F, en obtient :

$$dF = \frac{dF}{dS}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2F}{dS^2}dt \tag{7}$$

b étant ici égal à σS. Puisque, F est égal à ln(S), ses dérivées première et seconde sont de :

$$\frac{dF}{dS} = \frac{1}{S} \quad \text{et} \quad \frac{d^2F}{dS^2} = -\frac{1}{S^2} \tag{8}$$

En substituant ces expressions dans l'équation de dF, on obtient :

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{S}\left(\mu S dt + \sigma S dz\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz \end{aligned} \tag{9}$$

Cette équation admet une discrétisation exacte pour le prix de l'action, qui est de :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon\right)} \tag{10}$$

Par conséquent, lorsque l'on veut simuler le mouvement lognormal du prix d'une action, il vaut mieux simuler sur l'équation différentielle du logarithme du prix de l'action plutôt que sur son niveau. Répétons-le, cette équation admet alors une discrétisation exacte. Cela signifie que lorsque l'option n'est pas *path-dependent*, chaque scénario du prix de l'action peut ne comporter qu'un seul pas. Il n'en va pas de même si l'on simule directement le prix de l'action à partir de son équation différentielle, soit :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{11}$$

La discrétisation du premier degré de ce processus, dite encore *discrétisation d'Euler*, est la suivante :

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta t} &= S_t + \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \varepsilon\sqrt{\Delta t} \\ &= S_t\left(1 + \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Si l'on simule le prix de l'action à l'aide de cette équation, les scénarios devront alors comporter un nombre important de pas car sinon l'erreur de simulation sera élevée puisque la discrétisation du mouvement brownien en est une du premier ordre. Tel n'est pas le cas si l'on simule à partir de l'équation différentielle du logarithme du prix de l'action puisque cette équation admet une discrétisation exacte. Certes, si l'on simule l'équation (12) en faisant tendre Δt vers 0, cette simulation donnera le même résultat que la simulation de l'équation (10)[4].

Fermons cette parenthèse et revenons au problème plus spécifique qui nous intéresse, soit l'équation différentielle de Black et Scholes. Soit C le prix d'un call qui dépend de deux variables : S et t. La variable S, soit le prix de l'action, obéit à un mouvement géométrique brownien. Selon le lemme d'Ito, l'équation différentielle de C s'écrit :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt \qquad (13)$$

Nous formons un portefeuille composé d'une position en compte (*long*) dans le call et d'une position à découvert (*short*) dans l'action sous-jacente égale à ΔS ($\Delta < 1$). La valeur Π de ce portefeuille est donc de :

$$\Pi = C(S, t) - \Delta S \qquad (14)$$

Le changement subi dans la valeur du portefeuille de t à t + dt est de :

$$d\Pi = dC - \Delta dS \qquad (15)$$

En remplaçant dC par sa valeur (équation 13), on a :

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt - \Delta dS \qquad (16)$$

4. On peut certes obtenir une plus grande précision en recourant à une discrétisation du second degré, dite encore *discrétisation de Milstein*, pour discrétiser le mouvement brownien du prix de l'action. Mais ce type de discrétisation est plutôt complexe. Pour plus de détails sur l'impact de la discrétisation sur la performance d'une simulation, voir Wilmott (2001), chap. 26.

Nous voulons éliminer le risque de ce portefeuille. Il y a deux variables dans cette équation : S et t. Ce sont les termes qui comprennent dS qui sont source de risque. Les termes qui incluent dt sont connus, puisqu'ils n'intègrent que les paramètres de l'équation, censément connus. Pour supprimer le risque, nous devons donc éliminer les termes qui incorporent dS. Pour ce faire, nous fixons le delta de l'équation au niveau suivant :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \tag{17}$$

En substituant cette valeur dans l'équation (16), on trouve :

$$d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt \tag{18}$$

Ce portefeuille est maintenant sans risque, puisque les termes comprenant dS ont été supprimés. Nous avons réussi cette manœuvre en fixant le delta au niveau donné par l'équation (17), qui représente la dérivée du prix du call par rapport au prix de l'action. Une telle opération de couverture, qui éponge tout risque, est appelée *delta hedging* en anglais. Certes, pour que le portefeuille demeure couvert, il faut constamment ajuster le delta puisque les éléments de l'équation différentielle (16) se modifient constamment. On parle alors de *rebalancement dynamique*.

Notre portefeuille étant maintenant sans risque, son taux de rendement doit être égal à celui du taux sans risque. On fait ici appel au principe bien connu de l'absence d'arbitrage en finance. Si le taux de rendement dudit portefeuille est différent du taux sans risque, il y a alors un arbitrage possible qui ramènera son rendement au taux sans risque. Soit r le taux sans risque. $d\Pi$ est donc égal à :

$$d\Pi = r\,\Pi\,dt \tag{19}$$

En remplaçant les variables de cette équation par leurs expressions respectives, on obtient :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt = r\left(C - \Delta S\right) dt = r\left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) dt \tag{20}$$

En divisant par dt et en réarrangeant, on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \qquad (21)$$

C'est là la fameuse équation différentielle de Black et Scholes. Si l'on suppose que l'action verse un dividende continu, l'équation (21) devient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - div)S\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \qquad (22)$$

Pour des fins de solution numérique, nous réécrivons l'équation (22) comme suit :

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - div)S\frac{\partial C}{\partial S} - rC \qquad (23)$$

Pour ces raisons invoquées auparavant, nous exprimons le prix de l'action en termes logarithmiques, c'est-à-dire :

$$x = \ln(S) \qquad (24)$$

À la suite de ce changement de variable, l'équation (23) devient :

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial C}{\partial S} - rC \qquad (25)$$

où :

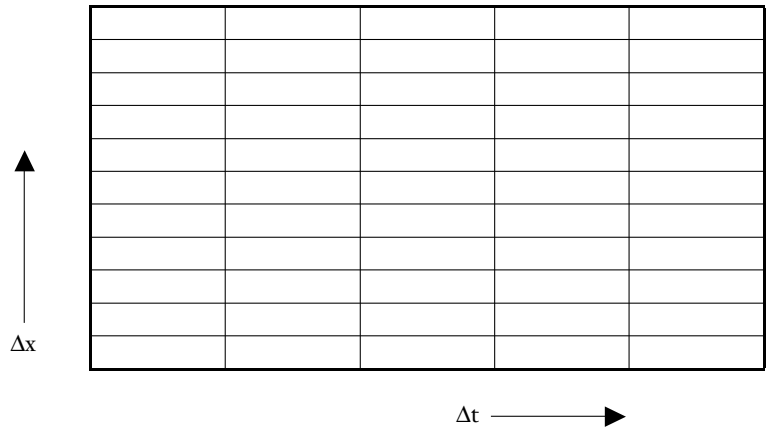
$$\nu = r - div - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \qquad (26)$$

Nous voulons maintenant solutionner l'équation (25) de façon numérique. Pour ce faire, nous devons la discrétiser, c'est-à-dire trouver des équivalents numériques aux dérivées qui apparaissent dans cette équation, ce qui constitue l'objet de la section suivante.

2. La transposition de l'équation différentielle de Black et Scholes au plan numérique

La méthode des différences finies est une simple extension des arbres binomiaux et trinomiaux. Nous verrons même ultérieurement que la méthode explicite des différences finies équivaut en fait à celle de

FIGURE 1



l'arbre trinomial. Au lieu de se situer dans un arbre, on se situe dans une grille complète. L'abscisse de la grille représente la division du temps et l'ordonnée, les variations du prix de l'action. Une telle grille apparaît à la figure 1.

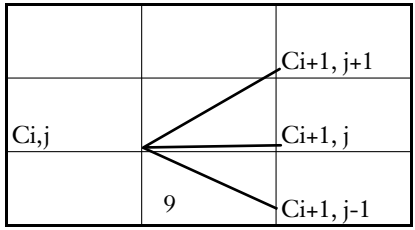
Pour des fins de convergence, Δx ne doit pas être choisi indépendamment de Δt. Sans le prouver, un bon choix de Δx est le suivant :

$$\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t} \tag{27}$$

Nous voulons solutionner l'équation différentielle (25) dans cette grille. Pour ce faire, nous devons d'abord évaluer les dérivées qui y apparaissent de façon numérique. Il y a plusieurs façons de procéder qui sont reliées à la méthode numérique retenue : explicite, implicite ou Crank-Nicolson. Nous donnons la version explicite de ces dérivées dans cette section. Les autres versions suivront.

La méthode explicite des différences finies calcule une différence forward pour évaluer la dérivée première. Introduisons le prix du call au temps i et dans l'état j sur la grille, soit C_{ij}, que nous voulons calculer à partir des trois nœuds indiqués de la période suivante. La représentation de ces nœuds apparaît à la figure 2 :

FIGURE 2



La méthode explicite des différences finies recourt à une différence forward pour calculer la dérivée de C par rapport à t et à des différences centrales pour calculer les autres dérivées de l'équation différentielle. On a donc :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t} \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1,j+1} - 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} \tag{29}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j-1}}{2\Delta x} \tag{30}$$

En substituant ces dérivées dans l'équation (25), on obtient :

$$-\frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \frac{C_{i+1,j+1} - 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} + \nu \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j-1}}{2\Delta x} - rC_{i+1,j} \tag{31}$$

On peut réécrire cette équation comme suit :

$$C_{ij} = \Delta t \left(\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{C_{i+1,j+1} - 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} \\ +\nu \dfrac{C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j-1}}{2\Delta x} - rC_{i+1,j} \end{array} \right) + C_{i+1,j} \tag{32}$$

On peut regrouper les termes comme suit :

$$C_{ij} = \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{2\Delta x}\right)\right]C_{i+1,j+1} + \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{2\Delta x}\right)\right]C_{i+1,j-1} + \ldots + \left[1 - \Delta t\,\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - r\Delta t\right]C_{i+1,j} \quad (33)$$

Comme les expressions entre crochets sont connues, nous pouvons simplifier davantage en écrivant :

$$p_u = \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{2\Delta x}\right)\right] \quad (34)$$

$$p_m = \left[1 - \Delta t\,\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - r\Delta t\right] \quad (35)$$

$$p_d = \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{2\Delta x}\right)\right] \quad (36)$$

L'équation différentielle s'écrit finalement :

$$C_{ij} = p_u C_{i+1,j+1} + p_m C_{i+1,j} + p_d C_{i+1,j-1} \quad (37)$$

L'équation (37) constitue la clef de voûte de la méthode explicite des différences finies. C'est elle qui servira à calculer le prix du call. Il suffira de débuter les calculs à la fin de la grille, là où les cash-flows de l'option sont connus, puis de reculer dans la grille jusqu'au nœud où se situe le prix de l'option, soit à C(0,0). Mais avant de détailler cette procédure, nous devons examiner davantage l'équation (37).

À première vue, cette équation ressemble beaucoup à l'équation de base de l'arbre trinomial. Il y a 3 p, qui peuvent être interprétés comme des probabilités neutres au risque. En fait, l'écriture de l'équation (37) n'est pas fortuite. Comme dans un arbre trinomial, p_u représente la probabilité d'un mouvement de hausse du prix de l'action, p_m la probabilité d'un mouvement nul et p_d, celle d'un mouvement de baisse. C_{ij} est la pondération, à l'aide de ces probabilités, des trois cash-flows qui lui sont rattachés à la période suivante de la grille. Cela se ramène évidemment à la procédure établie lors de la construction de l'arbre trinomial, comme nous le montrons dans la section suivante.

3. L'ÉQUIVALENCE ENTRE LA MÉTHODE EXPLICITE DES DIFFÉRENCES FINIES ET L'ARBRE TRINOMIAL

La procédure de l'arbre trinomial consiste à reproduire le mouvement brownien suivi par le logarithme du prix de l'action, c'est-à-dire le mouvement suivant :

$$dx = \nu dt + \sigma dz = \nu dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \tag{38}$$

Exprimées en termes discrets, l'espérance et la variance non centrée[5] de ce processus sont de :

$$E(\Delta x) = \nu\Delta t \tag{39}$$

$$E(\Delta x^2) = \sigma^2\Delta t + \nu^2\Delta t^2 \tag{40}$$

Puisque l'arbre trinomial veut reproduire le mouvement brownien de x, l'espérance et la variance de Δx dans l'arbre trinomial doivent être identiques à leur pendant brownien, c'est-à-dire :

$$E(\Delta x) = p_u(\Delta x) + pm(0) + p_d(-\Delta x) = \nu\Delta t \tag{41}$$

$$E(\Delta x^2) = p_u(\Delta x^2) + p_m(0) + p_d(\Delta x^2) = \sigma^2\Delta t + \nu^2\Delta t^2 \tag{42}$$

De plus, la somme des probabilités doit être égale à 1, c'est-à-dire :

$$p_u + p_m + p_d = 1 \tag{43}$$

Il est facile de résoudre ces trois équations en termes de p_u, p_m et p_d. Selon l'équation (41), p_u est égal à :

$$p_u = p_d + \nu\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{44}$$

Et selon l'équation (42), p_u est de :

$$p_u = -p_d + \frac{\sigma^2\Delta t + \nu^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \tag{45}$$

5. La variance centrée de x étant égale à : $V(x) = E[x - E(x)]^2$.

En égalisant les équations (44) et (45), on trouve p_d :

$$p_d = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2\Delta t + \nu^2\Delta t^2}{\Delta x^2} - \nu\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \tag{46}$$

En se servant de l'équation (44), on trouve p_u :

$$p_u = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2\Delta t + \nu^2\Delta t^2}{\Delta x^2} + \nu\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \tag{47}$$

Finalement, en recourant à l'équation de la somme des probabilités, on déduit p_m :

$$p_m = 1 - p_u - p_d = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t + \nu^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \tag{48}$$

À partir de ces probabilités neutres au risque, on peut écrire l'équation de base de l'arbre trinomial :

$$C_{i,j} = e^{-r\Delta t}(p_u C_{i+1,j+1} + p_m C_{i+1,j} + p_d C_{i+1,j-1}) \tag{49}$$

La valeur de l'option au nœud (i,j), soit $C_{i,j}$, est donc la valeur actualisée espérée des valeurs de l'option aux nœuds de la période subséquente : (i+1,j+1), (i+1,j) et (i+1,j–1), ces trois valeurs étant connues au nœud (i,j).

Quelques remarques s'imposent ici. D'abord, comme nous l'avons déjà mentionné, l'arbre trinomial retrace l'évolution du mouvement brownien du prix de l'action. En effet, il comporte la même espérance et la même variance que le mouvement brownien. Ensuite, le prix de l'option tel qu'il se dégage de l'arbre trinomial est une valeur espérée actualisée. Ce qui obéit au principe général qui veut que le prix d'une option soit la valeur actualisée de l'espérance neutre au risque du cash-flow final (*payoff*) de l'option, c'est-à-dire :

$$C = e^{-rT}E^*\left[\max\left(0, S_T - X\right)\right] \tag{50}$$

où T désigne la durée de l'option, ici un call ; S_T, le prix du sous-jacent à l'échéance de l'option et E*, l'opérateur de l'espérance neutre au risque.

L'équation de base de l'arbre trinomial, soit l'équation (49), ressemble beaucoup à l'équation de base de la méthode explicite des différences finies, soit l'équation (37). En fait, elle lui est quasi équivalente. Réécrivons l'équation de base de la méthode explicite des différences finies :

$$C_{ij} = p_u C_{i+1,j+1} + p_m C_{i+1,j} + p_d C_{i+1,j-1} \tag{51}$$

À l'instar de l'arbre trinomial, C_{ij} est la valeur espérée des cash-flows de l'option aux nœuds (i+1,j+1), (i+1,j) et (i+1,j–1), soit les cash-flows de la période suivante qui sont rattachés au nœud C_{ij}. Ces trois valeurs sont connues au nœud (i,j). À l'instar de l'arbre trinomial, on peut également montrer que C_{ij} est une valeur espérée actualisée de ces trois nœuds. Pour y arriver, on approxime le dernier terme de l'équation (51) au nœud (i,j) plutôt qu'au nœud (i+1,j). On obtient :

$$-\frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \frac{C_{i+1,j+1} - 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} + \nu \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j-1}}{2\Delta x} - rC_{i,j} \tag{52}$$

En regroupant les termes comme auparavant, on obtient :

$$C_{ij} = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(p_u C_{i+1,j+1} + p_m C_{i+1,j} + p_d C_{i+1,j-1}\right) \tag{53}$$

où :

$$p_u = \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{2\Delta x}\right)\right] \tag{54}$$

$$p_m = 1 - \Delta t \frac{\sigma^2}{\Delta x^2} \tag{55}$$

$$p_d = \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{2\Delta x}\right)\right] \tag{56}$$

Dans l'équation (53), le terme $\frac{1}{1 + r\Delta t}$ est un facteur d'actualisation discret plutôt que continu. L'équation (53) est bien une valeur espérée actualisée et est donc quasi équivalente à la procédure de

l'arbre trinomial, ce dernier étant une reproduction du processus de diffusion. Certes, les probabilités qui apparaissent dans l'équation de la méthode explicite des différences finies diffèrent de celles qui correspondent au processus trinomial. Mais n'oublions pas que nous évoluons dans le monde du calcul numérique, soit un monde d'approximations. Il y a plusieurs façons de définir les variables telles les dérivées d'une fonction, comme nous le verrons. Le calcul numérique comporte donc une part d'arbitraire.

4. TRANSPOSITION DES ÉQUATIONS DE LA MÉTHODE EXPLICITE DES DIFFÉRENCES FINIES DANS UNE GRILLE

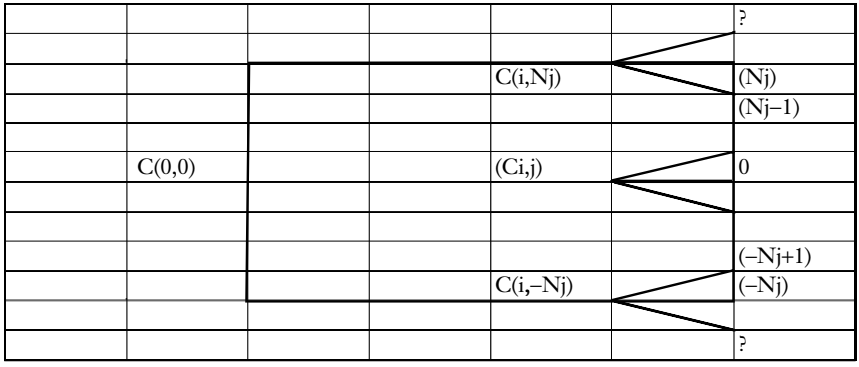
Nous voulons solutionner le système d'équations donné par :

$$C_{ij} = p_u C_{i+1,j+1} + p_m C_{i+1,j} + p_d C_{i+1,j-1} \qquad (57)$$

de façon à calculer le prix d'une option d'achat. Comme nous le verrons, cette équation convient également pour une option de vente. Ce sont les bornes et les cash-flows à l'échéance qui différencient les deux formes d'options d'un point de vue numérique.

Comme nous l'avons dit auparavant, nous solutionnons ce système d'équations dans une grille. Celle-ci apparaît à la figure 3.

FIGURE 3



Nous supposons que l'espace du temps est divisé en N sous-intervalles et que l'espace des états, qui représentent les variations du logarithme du prix de l'action, comprend $(2N_j + 1)$ sous-intervalles à chaque pas plutôt que $(2i + 1)$ comme dans l'arbre trinomial. N_j est ici égal à N bien qu'il puisse lui être supérieur. Nous l'égalerons habituellement à N à l'intérieur de ce chapitre.

En omettant le pas N, soit le dernier au bout de l'arbre où les cash-flows de l'option sont connus, il y a $(2N_j + 1)$ inconnues à chaque pas. Or, le système d'équations (57) ne nous permet de calculer que $(2N_j - 1)$ inconnues. On ne peut en effet calculer les valeurs de $C_{i,-Nj}$ et de $C_{i,Nj}$ qui se situent aux extrêmes de la grille. En effet, $C_{i,-Nj}$ dépend, entre autres, de $C_{i,-Nj-1}$ qui ne fait pas partie de la grille[6]. Pour sa part, $C_{i,Nj}$ dépend, entre autres, de $C_{i,Nj+1}$, qui lui-même ne fait pas partie de la grille. Il nous manque donc deux équations pour solutionner la grille. Ces deux équations nous sont données par les bornes de l'option, soit les suivantes. Pour un call, on peut écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = 1 \tag{58}$$

pour un prix de l'action important, c'est-à-dire qui excède sensiblement le prix d'exercice. En effet, un call très en jeu a un delta pratiquement égal à 1. En termes de la grille cette condition s'écrit :

$$\frac{C_{i,N_j} - C_{i,N_{j-1}}}{S_{i,N_j} - S_{i,N_{j-1}}} = 1 \tag{59}$$

c'est-à-dire :

$$C_{i,N_j} - C_{i,N_{j-1}} = \lambda_u \tag{60}$$

où $\lambda_u = S_{i,N_j} - S_{i,N_{j-1}}$. C'est là la borne supérieure de la grille pour un call. La borne inférieure est déduite de l'observation suivante. Quand le prix de l'action est très faible par rapport au prix d'exercice, le delta du call est pratiquement nul, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = 0 \tag{61}$$

6. Voir à cet effet les points d'interrogation indiqués sur la grille de la figure 3.

En termes de la grille, cette condition s'écrit :

$$\frac{C_{i,-N_{j+1}} - C_{i,-N_j}}{S_{i,-N_{j+1}} - S_{i,-N_j}} = 0 \tag{62}$$

soit :

$$C_{i,-N_{j+1}} - C_{i,-N_j} = \lambda_L \tag{63}$$

où λ_L représente la borne inférieure de la grille, égale à 0 pour un call.

Dans le cas d'un put[7], ces bornes sont inversées. Quand le prix de l'action est élevé, le put est complètement hors-jeu et son delta est alors de 0. Cette borne s'écrit :

$$C_{i,N_j} - C_{i,N_{j-1}} = \lambda_u \tag{64}$$

où λ_u est nul dans le cas d'un put. Par ailleurs, si le prix de l'action est faible, le put est très en-jeu et son delta est de (–1). La borne inférieure s'écrit alors :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C_{i,-N_{j+1}} - C_{i,-N_j}}{S_{i,-N_{j+1}} - S_{i,-N_j}} = -1 \tag{65}$$

d'où :

$$C_{i,-N_{j+1}} - C_{i,-N_j} = \lambda_L \tag{66}$$

où $\lambda_L = -(S_{i,-N_{j+1}} - S_{i,-N_j})$ dans le cas d'un put.

Le système d'équations (57), constitué de $2N_j - 1$ équations et les deux bornes (63) et (64) de la grille servent à calculer les $2N_j + 1$ inconnues à chaque pas i de la grille, cela pour un call. À l'instar des arbres binomiaux et trinomiaux, le calcul s'enclenche à la fin de la grille, là où les cash-flows (*payoff*) du call sont connus. Ainsi, les cash-flows $C_{N,-Nj}$ à $C_{N,Nj}$ sont connus puisqu'ils sont égaux à :

$$C_{N,j} = MAX(0,\ S_{Nj} - X) \tag{67}$$

7. Pour ne pas surcharger la notation, nous utilisons les mêmes symboles pour les équations du call et du put.

où $S_{N,j}$ est le prix de l'action à la période N dans l'état j. Chacune des équations (57) peut être résolue indépendamment de l'autre puisque les cash-flows à la période (i + 1) sont connus à la période i. Et l'on recule ainsi dans la grille jusqu'à ce que l'on ait calculé le prix du call, qui correspond à C(0,0).

5. Programmes Visual Basic pour déterminer les prix d'un call européen et d'un put américain par la méthode explicite des différences finies

5.1. Cas du call européen

Le programme qui apparaît au tableau 1 permet de calculer le prix d'un call européen par la méthode explicite des différences finies.

TABLEAU 1 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'un call européen par la méthode explicite des différences finies**

```
Sub méthode_explicite()

Sheet2.Activate

X = Range("Xexp").Value
T = Range("Texp").Value
S = Range("Sexp").Value
sigma = Range("sigmaexp").Value
r = Range("tauxexp").Value
div = Range("divexp").Value
N = Range("Nexp").Value
Nj = Range("Njexp").Value

Dim i, j As Integer
Dim edx, dt, nu, pu, pm, pd As Double
Dim lambda_L, lambda_U As Double
Dim c(), st() As Double

ReDim c(0 To N, -Nj To Nj)
ReDim st(-Nj To Nj)
```

TABLEAU 1 *(suite)*

```
dt = T / N
Range("dtexp") = dt
dx = sigma*sqr (3*dt)
Range("dxexp") = dx
nu = r - div - 0.5 * sigma ^ 2
Range("nuexp") = nu
edx = Exp(dx)
Range("edxexp") = edx

pu = 0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 + nu / dx)
Range("puexp") = pu
pm = 1 - dt * (sigma / dx) ^ 2 - r * dt
Range("pmexp") = pm
pd = 0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 - nu / dx)
Range("pdexp") = pd

' Calcul des prix de l'action à l'échéance

st(-Nj) = S * Exp(-Nj * dx)
Range("stockexp").Offset(Nj, 0) = st(-Nj)

For j = -Nj + 1 To Nj
st(j) = st(j - 1) * edx
Range("stockexp").Offset(-j, 0) = st(j)
Next j

' Calcul des cash-flows de l'option à l'échéance

For j = -Nj To Nj
c(N, j) = Application.Max(0, st(j) - X)
Range("callgrid").Offset(-j, N) = c(N, j)
Next j

' Marche arrière dans la grille

For i = N - 1 To 0 Step -1

For j = -Nj + 1 To Nj - 1
c(i, j) = pu * c(i + 1, j + 1) + pm * c(i + 1, j) + pd * c(i + 1, j
- 1)
Range("callgrid").Offset(-j, i) = c(i, j)
Next j

c(i, -Nj) = c(i, -Nj + 1)
Range("callgrid").Offset(j, i) = c(i, -Nj)
c(i, Nj) = c(i, Nj - 1) + (st(Nj) - st(Nj - 1))
Range("callgrid").Offset(-j, i) = c(i, Nj)
Next i

Range("call1") = c(0, 0)

End Sub
```

Comme à l'accoutumée, on déclare les variables de la sous-routine. c est le vecteur qui enregistrera les cash-flows du call à chaque pas. Le premier indice est le pas, qui va de 0 à N, et le deuxième indice est l'état, qui s'étire de $(-N_j)$ à N_j, N_j étant égal à N.

```
ReDim c(0 To N, -Nj To Nj)
```

Par ailleurs, le vecteur st enregistrera les prix de l'action à l'échéance de l'option, nécessaires au calcul des cash-flows de l'option à l'échéance, qui se confondent alors avec la valeur intrinsèque de l'option. Il existe un prix d'action pour chaque état j, j variant de $(-N_j)$ à N_j.

```
ReDim st(-Nj To Nj)
```

On calcule par la suite les constantes du programme, soit : le pas (T/N), T étant la durée de l'option, dx, edx, qui servira à calculer les prix de l'action à l'échéance ainsi que les probabilités : p_u, p_m et p_d.

```
dt = T / N
Range("dtexp") = dt
dx = sigma*sqr (3*dt)
Range("dxexp") = dx
nu = r - div - 0.5 * sigma ^ 2
Range("nuexp") = nu
edx = Exp(dx)
Range("edxexp") = edx
pu = 0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 + nu / dx)
Range("puexp") = pu
pm = 1 - dt * (sigma / dx) ^ 2 - r * dt
Range("pmexp") = pm
pd = 0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 - nu / dx)
Range("pdexp") = pd
```

On calcule le prix de l'action à l'échéance dans l'état inférieur $(-N_j)$:

```
st(-Nj) = S * Exp(-Nj * dx)
Range("stockexp").Offset(Nj, 0) = st(-Nj)
```

Puis on remonte dans la grille jusqu'à l'état supérieur (N_j) :

```
For j = -Nj + 1 To Nj
st(j) = st(j - 1) * edx
```

```
Range("stockexp").Offset(-j, 0) = st(j)
Next j
```

Maintenant que l'on dispose des $(2N_j + 1)$ prix de l'action à l'échéance, on calcule les cash-flows du call à l'échéance :

```
For j = -Nj To Nj
c(N, j) = Application.Max(0, st(j) - X)
Range("callgrid").Offset(-j, N) = c(N, j)
Next j
```

Puis on recule progressivement dans la grille. On calcule d'abord les cash-flows de l'option au pas (N – 1) en se servant des cash-flows calculés au pas N et de l'équation de base d'actualisation des cash-flows de la méthode explicite des différences finies.

```
' Marche arrière dans la grille

For i = N - 1 To 0 Step -1

For j = -Nj + 1 To Nj - 1
c(i, j) = pu * c(i + 1, j + 1) + pm * c(i + 1, j) + pd *
c(i + 1, j - 1)
Range("callgrid").Offset(-j, i) = c(i, j)
Next j
```

On calcule les cash-flows de l'option aux extrêmes de la grille en recourant aux bornes :

```
c(i, -Nj) = c(i, -Nj + 1)
Range("callgrid").Offset(j, i) = c(i, -Nj)
c(i, Nj) = c(i, Nj - 1) + (st(Nj) - st(Nj - 1))
Range("callgrid").Offset(-j, i) = c(i, Nj)
```

Les cash-flows de l'option à l'étape (N – 1) étant ainsi calculés, on effectue les calculs pour le pas précédent :

```
Next i
```

Et l'on recule ainsi dans la grille jusqu'à la période 0, là où se trouve le prix du call recherché, soit C(0,0), que l'on demande de reporter sur le chiffrier :

```
Range("call1") = c(0, 0)
```

Pour illustrer ce programme, nous calculons le prix d'un call européen dont les données se trouvent au tableau 2.

TABLEAU 2

	A	B
2	X	45
3	T	1
4	S	45
5	sigma	0.2
6	taux	0.03
7	div	0.02
8	N	3

Les prix de l'action sous-jacente à l'échéance de l'option, des états (3) à (–3), sont pour leur part au tableau 3.

TABLEAU 3

	D
7	81.99535
8	67.13211
9	54.96312
10	45
11	36.84288
12	30.1644
13	24.69652

Les cash-flows correspondants du call à l'échéance, soit (S – X), sont le lot du tableau 4.

L'on ramène ces cash-flows au début de la grille (tableau 5) en recourant à l'équation de base de la méthode explicite des différences finies. Le prix du call est de 3,41 $ lorsque N est égal à 3.

TABLEAU 4

	M
3	36.99535
4	22.13211
5	9.963124
6	0
7	0
8	0
9	0

TABLEAU 5

	J	K	L	M
3	37.08595	37.01442	36.9978	36.99535
4	22.22272	22.15119	22.13456	22.13211
5	10.78184	10.37804	10.0467	9.963124
6	3.41171	2.626616	1.577495	0
7	0.579896	0.24977	0	0
8	0.039547	0	0	0
9	0.039547	0	0	0

Selon la formule de Black et Scholes, le prix du call européen correspondant aux données du tableau 2 est de 3,7198 $. Le programme Visual Basic utilisé pour calculer ce prix se lit au tableau 6.

On peut étudier la convergence de la méthode explicite en augmentant N (N_j = N). La figure 4 retrace cette simulation.

On constate que la méthode explicite des différences finies converge rapidement vers la solution B.-S. Si N = 20, le prix du call est de 3,6784 $ et si N = 25, il est de 3,6868 $.

TABLEAU 6 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'un call européen par la formule de Black et Scholes**

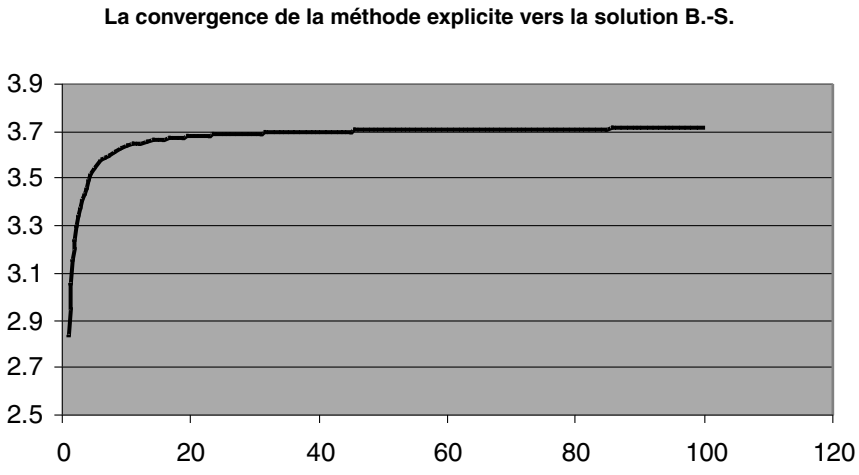
```
Function callBS(S, X, T, sigma, r, div)

logSX = Log(S / X)
nud = (r - div + (0.5 * sigma ^ 2)) * T
done = (logSX + nud) / (sigma * Sqr(T))

dtwo = done - sigma * Sqr(T)
callBS = (S * Exp(-div * T) * Application.NormSDist(done)) - _
X * Exp(-r * T) * Application.NormSDist(dtwo)

End Function
```

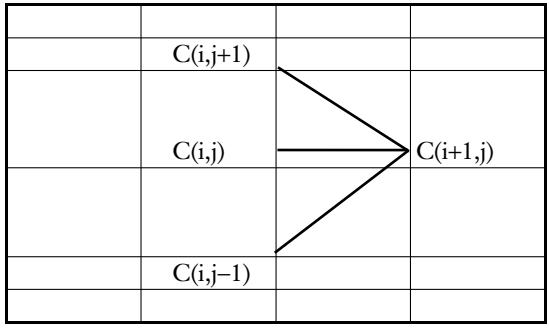
FIGURE 4



6. LA MÉTHODE IMPLICITE DES DIFFÉRENCES FINIES

Le principe de base de la méthode implicite des différences finies est illustré à la figure 5.

FIGURE 5



Les dérivées sont donc centrées sur le point i plutôt que sur le point (i + 1) comme c'était le cas pour la méthode explicite des différences finies. L'équation différentielle de Black et Scholes s'écrit alors :

$$-\frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \nu \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta x} - rC_{i,j} \quad (68)$$

En regroupant les termes comme dans le cas de la méthode explicite des différences finies, on obtient :

$$p_u C_{i,j+1} + p_m C_{i,j} + p_d C_{i,j-1} = C_{i+1,j} \quad (69)$$

où :

$$p_u = -\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{\Delta x}\right) \quad (70)$$

$$p_m = 1 + \Delta t \frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + r\Delta t \quad (71)$$

$$pd = -\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{\Delta x}\right) \quad (72)$$

Les bornes sont les mêmes que dans le cas de la méthode explicite, c'est-à-dire :

$$C_{i,N_j} - C_{i,N_{j-1}=\lambda_u} \tag{73}$$

$$C_{i,-N_j+1} - C_{i,-N_j=\lambda_L} \tag{74}$$

Contrairement à la méthode explicite, les $(2N_j + 1)$ équations constituées par les équations (69), (73) et (74) ne peuvent être solutionnées indépendamment les unes des autres. On s'en rend compte en examinant la figure 5. Il y a trois inconnues rattachées à $C_{i+1,j}$, ce dernier étant connu. Dans le cas de la méthode explicite, on solutionnait $C_{i,j}$ à partir de trois points connus puisque les dérivées étaient centrées sur $(i + 1)$. Alors comment solutionner ?

On peut découvrir la solution en écrivant les équations en commençant au haut de la grille (N_j) et en descendant vers le bas de la grille $(-N_j)$, cela pour un i donné. On a comme système d'équations :

$$C_{i,N_j} - C_{i,N_{j-1}} = \lambda_u \tag{75}$$

$$p_u C_{i,N_j} + p_m C_{i,N_{j-1}} + p_d C_{i,N_{j-2}} = C_{i+1,N_{j-1}} \tag{76}$$

$$\cdots$$

$$p_u C_{i,-N_{j+2}} + p_m C_{i,-N_{j+1}} + p_d C_{i,-N_j} = C_{i+1,-N_{j+1}} \tag{77}$$

$$C_{i,-N_{j+1}} - C_{i,-N_j} = \lambda_L \tag{78}$$

Sous forme matricielle, ce système d'équations devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ p_u & p_m & p_d & 0 & . & . & 0 \\ 0 & p_u & p_m & p_d & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & p_u & p_m & p_d & 0 \\ 0 & . & . & 0 & p_u & p_m & p_d \\ 0 & . & . & . & . & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{i,N_j} \\ C_{i,N_{j-1}} \\ C_{i,N_{j-2}} \\ . \\ C_{i,-N_{j+2}} \\ C_{i,-N_{j+1}} \\ C_{i,-N_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_u \\ C_{i+1,N_{j-1}} \\ C_{i+1,N_{j-2}} \\ . \\ C_{i+1,-N_{j+2}} \\ C_{i+1,-N_{j+1}} \\ \lambda_L \end{bmatrix} \tag{79}$$

La matrice qui sert à représenter le système d'équations de la méthode implicite est tridiagonale. Le calcul numérique propose plusieurs façons de solutionner le système d'équations (79) lorsque la matrice qui le représente est tridiagonale. Nous éliminerons ici la diagonale supérieure pour en arriver à la solution. On pourrait également supprimer la diagonale inférieure.

Pour ne pas surcharger la notation, nous supposerons, pour montrer comment effectuer la suppression de la diagonale supérieure, que $N = N_j = 3$. Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous devons enclencher les calculs à la période $(N - 1)$, ici 2, puisque l'on connaît alors les cash-flows de l'option, c'est-à-dire le vecteur qui apparaît à droite du système d'équations (79). Pour éliminer la diagonale principale de ladite matrice, nous débutons par la dernière équation du système (79) :

$$C_{2,-3} = C_{2,-2} - \lambda_L \tag{80}$$

On substitue cette équation dans la précédente, soit :

$$p_u C_{2,-1} + p_m C_{2,-2} + p_d C_{2,-3} = C_{3,-2} \tag{81}$$

$$p_u C_{2,-1} + p_m C_{2,-2} + p_d \left(C_{2,-2} - \lambda_L\right) = C_{3,-2} \tag{82}$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$p_u C_{2,-1} + p'_{m,-2} C_{2,-2} = p'_{-2} \tag{83}$$

où :

$$p'_{m,-2} = p_m + p_d \tag{84}$$

$$p'_{-2} = C_{3,-2} + p_d \lambda_L \tag{85}$$

À partir de l'équation (83), on peut mettre en évidence $C_{2,-2}$:

$$C_{2,-2} = \frac{p'_{-2} - p_u C_{2,-1}}{p'_{m,-2}} \tag{86}$$

On substitue cette valeur dans l'équation de $(j = -1)$

$$p_u C_{2,0} + p_m C_{2,-1} + p_d C_{2,-2} = C_{3,-1} \tag{87}$$

$$p_u C_{2,0} + p_m C_{2,-1} + p_d\left(\frac{p'_{-2} - p_u C_{2,-1}}{p'_{m,-2}}\right) = C_{3,-1} \tag{88}$$

Cette dernière équation peut être réécrite comme suit :

$$p_u C_{2,0} + p'_{m,-1} C_{2,-1} = p'_{-1} \tag{89}$$

où :

$$p'_{m,-1} = p_m - \frac{p_u}{p'_{m,-2}} p_d \tag{90}$$

$$p'_{-1} = C_{3,-1} - \frac{p'_{-2}}{p'_{m,-2}} p_d \tag{91}$$

Ce processus se poursuit en remontant la grille jusqu'à j = 2, où l'on obtient :

$$p_u C_{2,3} + p'_{m,2} C_{2,2} = p'_2 \tag{92}$$

c'est-à-dire :

$$C_{22} = \frac{p'_2 - p_u C_{23}}{p'_{m,2}} \tag{93}$$

Résumons la démarche que nous venons de suivre. Nous avons supprimé la diagonale principale, constitué des p_d, en écrivant les équations sous la forme (89). Pour ce faire, nous avons effectué une substitution rétrograde de variables à partir de la fin de la matrice de façon à supprimer une inconnue pour chacune des équations. Ce faisant, nous avons créé une série de constantes, les p' et p'_m, qui nous servent dans une deuxième étape à trouver les inconnues de la période 2, soit les $C_{2,-3}$ à $C_{2,3}$.

Pour des fins de programmation, il faudra donc calculer deux types de constantes pour éliminer la diagonale supérieure de la matrice tridiagonale. Pour chaque pas i, et ce de l'état j = (–Nj + 2) à l'état (Nj – 1), on calculera les p'_m en utilisant la forme générale récursive suivante :

$$pm'_j = p_m - \frac{p_u}{pm'_{j-1}} p_d \tag{94}$$

Et pour les p′ de la période i, la forme récursive générale est la suivante :

$$p'_j = C_{i+1,j} - \frac{p'_{j-1}}{pm'_{j-1}} p_d \tag{95}$$

Ces constantes permettent d'éliminer la diagonale principale de la matrice tridiagonale, qui est constituée des p_d. Ces derniers sont absorbés par les constantes p′ et p'_m. Par ailleurs, pour calculer ces constantes à l'état $(-N_j + 1)$, on se sert de la borne inférieure, comme cela a été indiqué auparavant.

Nous en sommes à la deuxième étape, celle de la solution des équations proprement dite. Pour ce faire, nous revenons au début de la matrice. La première équation est la suivante, soit la borne supérieure :

$$C_{2,3} - C_{2,2} = \lambda_u \tag{96}$$

Or, selon l'équation (93), C_{22} est égal à :

$$C_{22} = \frac{p'_2 - p_u C_{23}}{p'_{m,2}} \tag{97}$$

En substituant l'équation (96) dans l'équation (97), on obtient :

$$C_{22} = \frac{p'_2 - p_u (C_{22} + \lambda_u)}{p'_{m,2}} \tag{98}$$

et l'on trouve alors C_{22} :

$$C_{22} = \frac{p'_2 - p_u \lambda_u}{p'_{m,2} + p_u} \tag{99}$$

On a donc trouvé deux inconnues : C_{23} et C_{22}. Le reste des calculs est une simple substitution de variables en descendant la matrice. On a établi dans la première étape :

$$C_{21} = \frac{p'_1 - p_u C_{22}}{p'_{m,1}} \tag{100}$$

Le calcul antérieur de C_{22} nous permet de calculer C_{21} puisque les p' et les p'_m sont des constantes. Et l'on procède ainsi jusqu'à $C_{2,-2}$. Pour calculer $C_{2,-3}$, on se sert de la borne inférieure de la grille :

$$C_{2,-2} - C_{2,-3} = \lambda_L \tag{101}$$

Pour les fins de la programmation, la procédure de substitution obéira à la procédure récursive suivante de l'état $(N_j - 2)$ à l'état $(-N_j + 1)$:

$$C_{i,j} = \frac{p'_j - p_u C_{i,j+1}}{p'_{m,j}} \tag{102}$$

Par ailleurs, pour calculer C_{ij} aux états N_j, $(N_j - 1)$ et $-N_j$, on se sert des bornes supérieure et inférieure de la grille, comme cela a été indiqué dans cette section.

On a ainsi calculé les inconnues de la période 2, c'est-à-dire les cash-flows du call de la période 2. Celles-ci deviennent les inputs pour calculer les cash-flows de la période 1. La procédure à suivre est la même qu'à la période 1. Et on procède de la sorte jusqu'à ce qu'on ait calculé C(0,0), soit le prix du call recherché.

6.1. Cas du call européen

Au tableau 7, on retrouve un programme Visual Basic qui calcule le prix d'un call européen par la méthode implicite des différences finies.

TABLEAU 7 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'un call européen par la méthode implicite des différences finies**

```
Sub callméthode_implicite()
Sheet1.Activate

X = Range("X").Value
T = Range("T").Value
S = Range("S").Value
sigma = Range("sigma").Value
r = Range("taux").Value
div = Range("div").Value
N = Range("N").Value
```

TABLEAU 7 *(suite)*

```
Dim i As Integer, j As Integer
Dim edx As Double, dt As Double, nu As Double, pu As Double, _
pm As Double, pd As Double
Dim lambda_L As Double, lambda_U As Double
Dim c() As Double, st() As Double

Nj = N
Range("Nj") = Nj

ReDim c(0 To N, -Nj To Nj)
ReDim st(-Nj To Nj)

Dim pmp() As Double, pp() As Double
Dim k As Integer, w As Integer
ReDim pmp(-Nj To Nj)
ReDim pp(-Nj To Nj)

' Calcul des constantes
dt = T / N
Range("dt") = dt
dx = sigma * Sqr(3 * dt)
Range("dx") = dx

nu = r - div - 0.5 * sigma ^ 2
Range("nu") = nu
edx = Exp(dx)
Range("edx") = edx
pu = -0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 + nu / dx)
Range("pu") = pu
pm = 1 + dt * (sigma / dx) ^ 2 + r * dt
Range("pm") = pm
pd = -0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 - nu / dx)
Range("pd") = pd

' Calcul des prix de l'action à l'échéance

st(-Nj) = S * Exp(-Nj * dx)
Range("stock").Offset(Nj, 0) = st(-Nj)

For j = -Nj + 1 To Nj
st(j) = st(j - 1) * edx
Range("stock").Offset(-j, 0) = st(j)
Next j

' Calcul des cash-flows de l'option à l'échéance

For j = -Nj To Nj
c(0, j) = Application.Max(0, st(j) - X)
Range("putmat").Offset(-j, 0) = c(0, j)

Next j

' Calcul des bornes de l'option

lambda_U = (st(Nj) - st(Nj - 1))
```

TABLEAU 7 *(suite)*

```
Range("lambdaU") = lambda_U
lambda_L = 0
Range("lambdaL") = lambda_L

' Marche arrière dans la grille

For i = N - 1 To 0 Step -1

' Solution du système tridiagonal

   ' substitution des bornes à j = -Nj dans j = -Nj+1

   pmp(-Nj + 1) = pm + pd
   Range("pmp").Offset(Nj - 1, i) = pmp(-Nj + 1)
   pp(-Nj + 1) = c(0, -Nj + 1) + pd * lambda_L
   Range("pp").Offset(Nj - 1, i) = pp(-Nj + 1)

   ' élimination de la diagonale supérieure

   For k = -Nj + 2 To Nj - 1
   pmp(k) = pm - pu * pd / pmp(k - 1)
   Range("pmp").Offset(-k, i) = pmp(k)
   pp(k) = c(0, k) - pp(k - 1) * pd / pmp(k - 1)
   Range("pp").Offset(-k, i) = pp(k)
   Next k

   ' Recours à la borne à  j = Nj et à l'équation à j=Nj-1

   c(1, Nj) = (pp(Nj - 1) + pmp(Nj - 1) * lambda_U) / (pu + pmp(Nj
   - 1))
   Range("calltrid").Offset(-Nj, i) = c(1, Nj)

   c(1, Nj - 1) = c(1, Nj) - lambda_U
   Range("calltrid").Offset(-Nj + 1, i) = c(1, Nj - 1)

   ' substitution rétrograde

   For w = Nj - 2 To -Nj + 1 Step -1

   c(1, w) = (pp(w) - pu * c(1, w + 1)) / pmp(w)
   Range("calltrid").Offset(-w, i) = c(1, w)

   c(1, -Nj) = c(1, -Nj + 1) - lambda_L

   Range("calltrid").Offset(Nj, i) = c(1, -Nj)

   Next w

' Construction de la grille de l'option

   For j = -Nj To Nj
   c(0, j) = c(1, j)
   Next j

Next i

Range("put") = c(0, 0)

End Sub
```

Le début du programme est sensiblement le même que celui ayant servi à implanter la méthode implicite : déclaration des variables puis calcul des constantes du programme. Les formules des probabilités sont toutefois différentes. Par ailleurs, on remarquera que le premier indice du vecteur c ne comporte que deux indices, 0 et 1. L'indice 0 est utilisé pour donner les valeurs finales des cash-flows à un nœud et l'indice 1, pour stocker temporairement les cash-flows de l'option lors de l'élimination de la diagonale supérieure de la matrice tridiagonale. On réalise ainsi une économie d'indices.

On calcule par la suite les prix de l'action à l'échéance du call selon les divers états ($-N_j$ à N_j) et les cash-flows correspondants du call.

```
' Calcul des prix de l'action à l'échéance

      st(-Nj) = S * Exp(-Nj * dx)
  Range("stock").Offset(Nj, 0) = st(-Nj)

        For j = -Nj + 1 To Nj
      st(j) = st(j - 1) * edx
  Range("stock").Offset(-j, 0) = st(j)
                  Next j

' Calcul des cash-flows de l'option à l'échéance

            For j = -Nj To Nj
  c(0, j) = Application.Max(0, st(j) - X)
  Range("putmat").Offset(-j, 0) = c(0, j)
```

On calcule ensuite les bornes de l'option pour un call.

```
lambda_U = (st(Nj) - st(Nj - 1))
   Range("lambdaU") = lambda_U
          lambda_L = 0
   Range("lambdaL") = lambda_L
```

Puis le programme s'engage dans une grande boucle dans laquelle on fait machine arrière de façon à calculer les cash-flows de la grille. Les calculs débutent d'abord à la période (N – 1) et l'on recule par pas d'une période par la suite.

```
For i = N - 1 To 0 Step -1
            ...
        Next i
```

On calcule dans un premier temps le p'_m et le p' qui correspondent à la borne inférieure pour un état donné. Les formules de ceux-ci, qui apparaissent aux équations (84) et (85), diffèrent de leurs homologues des autres états.

```
pmp(-Nj + 1) = pm + pd
Range("pmp").Offset(Nj - 1, i) = pmp(-Nj + 1)
pp(-Nj + 1) = c(0, -Nj + 1) + pd * lambda_L
Range("pp").Offset(Nj - 1, i) = pp(-Nj + 1)
```

Puis on élimine progressivement la diagonale supérieure en calculant, selon les équations (94) et (95), les p'_m et les p' que l'on stocke puisqu'il serviront par la suite à calculer les inconnues d'un pas donné.

```
For k = -Nj + 2 To Nj - 1
pmp(k) = pm - pu * pd / pmp(k - 1)
Range("pmp").Offset(-k, i) = pmp(k)
pp(k) = c(0, k) - pp(k - 1) * pd / pmp(k - 1)
Range("pp").Offset(-k, i) = pp(k)
Next k
```

À remarquer que pour calculer les constantes p' et p'_m associées à chaque état, on remonte de l'état $(-N_j + 2)$ à $(N_j - 1)$, ce dernier étant l'état qui précède immédiatement la borne supérieure.

Une fois ce processus terminé, on se sert de la borne supérieure pour calculer les cash-flows du call aux états N_j et $N_j - 1$, cela en conformité avec les équations (96) et (99).

```
c(1, Nj) = (pp(Nj - 1) + pmp(Nj - 1) * lambda_U) /
(pu + pmp(Nj - 1))
Range("calltrid").Offset(-Nj, i) = c(1, Nj)

c(1, Nj - 1) = c(1, Nj) - lambda_U
Range("calltrid").Offset(-Nj + 1, i) = c(1, Nj - 1)
```

On effectue par la suite une substitution rétrograde pour calculer les cash-flows de l'état $(N_j - 2)$ à l'état $(-N_j + 1)$, soit l'état qui précède la borne inférieure, en appliquant pour y arriver l'équation (102).

```
For w = Nj - 2 To -Nj + 1 Step -1

c(1, w) = (pp(w) - pu * c(1, w + 1)) / pmp(w)
Range("calltrid").Offset(-w, i) = c(1, w)
```

Pour calculer le cash-flow de l'état $-N_j$, on se sert de la borne inférieure :

```
c(1, -Nj) = c(1, -Nj + 1) - lambda_L

Range("calltrid").Offset(Nj, i) = c(1, -Nj)
```

On peut alors stocker les valeurs des cash-flows pour l'état j :

```
For j = -Nj To Nj
c(0, j) = c(1, j)
     Next j
```

Et on refait ces calculs en reculant comme l'indique le programme jusqu'à la période 0. On peut alors stocker le prix recherché du call, soit C(0,0).

Nous avons calculé le prix d'un call à l'aide de la méthode implicite pour les mêmes données que dans le cas précédent. Nous avons obtenu un prix de 2,9952 $, résultat qui étonnamment est plus éloigné de la cible B.-S. que la méthode explicite, cela pour les mêmes données. Lorsque l'on double le nombre d'états dans la grille ($N_j = 2N$), on n'améliore pas sensiblement le résultat.

Pour bien comprendre la méthode implicite, nous allons dans ce qui suit détailler les calculs. Le tableau 8 fournit les constantes du modèle. Comme on peut le constater, p_u et p_d sont négatifs et ne peuvent donc plus être interprétés comme des probabilités.

TABLEAU 8

	A	B
12	dt	0.333333
13	nu	-0.01
14	edx	1.221403
15	pu	-0.158333
16	pm	1.343333
17	pd	-0.175
18	lambdaL	0
19	lambdaU	14.86323

On calcule les prix de l'action à l'échéance de l'option (tableau 9) et on en dégage les cash-flows de l'option à l'échéance (tableau 10).

TABLEAU 9 **Prix de l'action à l'échéance du call**

	D
6	81.99534602
7	67.13211139
8	54.96312412
9	45
10	36.84288389
11	30.16440207
12	24.69652362

TABLEAU 10 **Cash-flows du call à son échéance**

	E
6	36.99534602
7	22.13211139
8	9.963124117
9	0
10	0
11	0
12	0

La grille des cash-flows du call pour les périodes (i) de 0 à 2 et pour les états (j) de −3 à 3 est reportée au tableau 11. Nous pouvons calculer les cash-flows de la période 2 à partir des cash-flows connus de la période 3.

Pour calculer les cash-flows de l'option de la période 2, il nous faut calculer les constantes p' et p'_m, essentielles à la solution (tableau 12).

TABLEAU 11 **Grille des cash-flows du call**

	P	Q	R	S	T
1					
2					**j**
3		37.21905	37.10532	37.03069	**3**
4		22.35581	22.24208	22.16745	**2**
5		10.83547	10.49182	10.18843	**1**
6		2.99522	2.193806	1.219938	**0**
7		0.652327	0.376395	0.146373	**-1**
8		0.146596	0.067988	0.019837	**-2**
9		0.146596	0.067988	0.019837	**-3**
10	**i**	**0**	**1**	**2**	
11					

TABLEAU 12 **Les constantes du système tridiagonal**

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		**pmp**					**pp**			
2										
3					**j**					**j**
4		1.32238	1.32238	1.32238	**2**		23.66986	23.53747	23.4506	**2**
5		1.322379	1.322379	1.322379	**1**		10.78894	10.3525	9.963124	**1**
6		1.322336	1.322336	1.322336	**0**		2.245071	1.239743	0	**0**
7		1.319617	1.319617	1.319617	**-1**		0.386579	0.149345	0	**-1**
8		1.168333	1.168333	1.168333	**-2**		0.067988	0.019837	0	**-2**
9	**i**	**0**	**1**	**2**		**i**	**0**	**1**	**2**	
10										

Rappelons le calcul de ces constantes. Calculons d'abord $p'_{m,-2}$. Selon le programme antérieur, celui-ci est égal à :

$$p'_{m,-2} = p_m + p_d = 1{,}3433 - 0{,}175 = 1{,}1683 \qquad (103)$$

C'est bien le résultat que l'on peut lire au tableau des pmp au nœud (2,–2) de la grille. On se sert de $C_{3,2}$ (connu) pour calculer p'_{-2} :

$$p'_{-2} = C_{3,-2} - p_d\lambda_L = 0 - \left(-0{,}175\right) \times 0 = 0 \qquad (104)$$

C'est bien le résultat que l'on peut lire au tableau des pp au nœud (2,–2) de la grille. Par la suite, pour calculer les p' et les p'_m, on se sert des formes récusives données par les équations (94) et (95).

$$p'_{m,-1} = p_m - \frac{p_u}{p'_{m,-2}} p_d = 1{,}3433 - \frac{(-0{,}1583)}{(1{,}1683)}(-0{,}175) = 1{,}3196 \quad (105)$$

$$p'_{-1} = C_{3,-1} - \frac{p'_{-2}}{p'_{m,-2}} p_d = 0 \quad (106)$$

Et ainsi de suite. Une fois ces constantes calculées, on revient au haut de la grille pour calculer les cash-flows de la période 2 en commençant pas C_{22} (équation 99) :

$$C_{22} = \frac{p'_2 - p_u \lambda_u}{p'_{m,2} + p_u} = \frac{23{,}45 - (-0{,}1583 \times 14{,}8632)}{1{,}3223 - 0{,}1583} = 22{,}1674 \quad (107)$$

$$C_{2,3} = C_{2,2} + \lambda_u = 22{,}1674 + 14{,}8632 = 37{,}0306 \quad (108)$$

Puis on descend la grille, toujours en demeurant à la période 2, en se servant de la forme récursive (102) pour dégager les cash-flows des autres états.

$$C_{2,1} = \frac{p'_1 - p_u C_{22}}{p'_{m,1}} = \frac{9{,}9631 - (-0{,}1583)(22{,}1674)}{1{,}3223} = 10{,}1884 \quad (109)$$

$$C_{2,0} = \frac{p'_0 - p_u C_{21}}{p'_{m,0}} = \frac{0 - (-0{,}1583)(10{,}1884)}{1{,}3223} = 1{,}2199 \quad (110)$$

$$C_{2,-1} = \frac{p'_{-1} - p_u C_{20}}{p'_{m,-1}} = \frac{0 - (-0{,}1583)(1{,}2199)}{1{,}3196} = 0{,}1463 \quad (111)$$

$$C_{2,-2} = \frac{p'_{-2} - p_u C_{2,-1}}{p'_{m,-2}} = \frac{0 - (-0{,}1583)(0{,}1463)}{1{,}1683} = 0{,}0198 \quad (112)$$

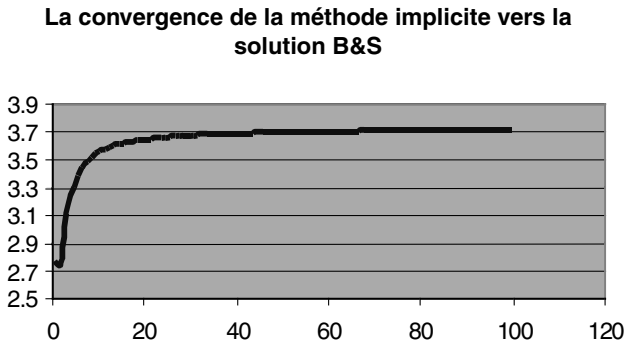
Finalement, pour calculer le cash-flow du nœud inférieur de la grille à la période 2, on recourt à la borne inférieure :

$$C_{2,-2} - C_{2,-3} = 0$$
$$C_{2,-3} = 0{,}0198 \quad (113)$$

Les cash-flows de la période 2 étant calculés, les calculs que nous venons d'effectuer se répètent à la période 1 en prenant cette fois-ci comme inputs les cash-flows de la période 2, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait trouvé le prix du call qui est associé au nœud (0,0) de la grille.

Pour les données antérieures, la convergence du prix du call européen vers la cible B.-S. est retracée à la figure 6. On se rend compte que cette convergence est moins rapide que ce n'était le cas pour la méthode explicite des différences finies.

FIGURE 6



6.2. Cas du put américain

Le programme du put américain ressemble beaucoup à celui du call européen. Les changements à apporter sont les suivants :

i) Les cash-flows du put à l'échéance sont évidemment le maximum des deux nombres suivants :

$$C_{N,j} = \text{MAX}\left(0, X - S_{N,j}\right) \tag{114}$$

ii) Les bornes inférieures et supérieures de la grille doivent être calculées en conformité avec les équations (64) et (66).

iii) Comme le put est ici américain, on doit vérifier à chaque nœud la règle d'exercice du put, c'est-à-dire que pour un nœud donné (i,j) :

$$C_{i,j} = MAX\left(C^*_{i,j}, X - S_{N,j}\right) \tag{115}$$

où $C^*_{i,j}$ désigne le prix du put au nœud (i,j) découlant de la solution du système tridiagonal d'équations. On remarquera que pour un état j donné, c'est toujours le prix de l'action correspondant à la date d'échéance de l'option, soit $S_{N,j}$, qui est utilisé, cela quelle que soit la période où l'on se situe dans la grille, contrairement à la procédure suivie dans un arbre binomial où le prix de l'action diffère à chaque nœud. Le programme Visual Basic du calcul du prix du put américain par la méthode implicite des différences finies se retrouve au tableau 13.

TABLEAU 13 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'un put américain par la méthode implicite des différences finies**

```
Sub putméthode_implicite()
Sheet1.Activate

X = Range("X").Value
T = Range("T").Value
S = Range("S").Value
sigma = Range("sigma").Value
r = Range("taux").Value
div = Range("div").Value
N = Range("N").Value

Dim i As Integer, j As Integer
Dim edx As Double, dt As Double, nu As Double, pu As Double, _
pm As Double, pd As Double
Dim lambda_L As Double, lambda_U As Double
Dim c() As Double, st() As Double

Nj = N
Range("Nj") = Nj

ReDim c(0 To N, -Nj To Nj)
ReDim st(-Nj To Nj)

Dim pmp() As Double, pp() As Double
Dim k As Integer, w As Integer
ReDim pmp(-Nj To Nj)
ReDim pp(-Nj To Nj)
```

TABLEAU 13 *(suite)*

```
' Calcul des constantes

dt = T / N
Range("dt") = dt
dx = sigma * Sqr(3 * dt)
Range("dx") = dx
nu = r - div - 0.5 * sigma ^ 2
Range("nu") = nu
edx = Exp(dx)
Range("edx") = edx
pu = -0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 + nu / dx)
Range("pu") = pu
pm = 1 + dt * (sigma / dx) ^ 2 + r * dt
Range("pm") = pm
pd = -0.5 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 - nu / dx)
Range("pd") = pd

' Calcul des prix de l'action à l'échéance

st(-Nj) = S * Exp(-Nj * dx)
Range("stock").Offset(Nj, 0) = st(-Nj)

For j = -Nj + 1 To Nj
st(j) = st(j - 1) * edx
Range("stock").Offset(-j, 0) = st(j)
Next j

' Calcul des cash-flows de l'option à l'échéance

For j = -Nj To Nj
c(0, j) = Application.Max(0, X - st(j))
Range("putmat").Offset(-j, 0) = c(0, j)

Next j

' Calcul des bornes de l'option

lambda_L = -1 * (st(-Nj + 1) - st(-Nj))
Range("lambdaL") = lambda_L
lambda_U = 0
Range("lambdaU") = lambda_U

' Marche arrière dans la grille

For i = N - 1 To 0 Step -1

' Solution du système tridiagonal

' substitution des bornes à j = -Nj into j = -Nj+1

   pmp(-Nj + 1) = pm + pd
   Range("pmp").Offset(Nj - 1, i) = pmp(-Nj + 1)
   pp(-Nj + 1) = c(0, -Nj + 1) + pd * lambda_L
   Range("pp").Offset(Nj - 1, i) = pp(-Nj + 1)
```

TABLEAU 13 *(suite)*

```
   ' Élimination de la diagonale supérieure
   For k = -Nj + 2 To Nj - 1
   pmp(k) = pm - pu * pd / pmp(k - 1)
   Range("pmp").Offset(-k, i) = pmp(k)
   pp(k) = c(0, k) - pp(k - 1) * pd / pmp(k - 1)
   Range("pp").Offset(-k, i) = pp(k)
   Next k

   ' Recours à la borne à  j = Nj et à l'équation à j=Nj-1
   c(1, Nj) = (pp(Nj - 1) + pmp(Nj - 1) * lambda_U) / (pu + pmp(Nj
   - 1))
   Range("calltrid").Offset(-Nj, i) = c(1, Nj)
   c(1, Nj - 1) = c(1, Nj) - lambda_U
   Range("calltrid").Offset(-Nj + 1, i) = c(1, Nj - 1)
   ' substitution rétrograde
   For w = Nj - 2 To -Nj + 1 Step -1
   c(1, w) = (pp(w) - pu * c(1, w + 1)) / pmp(w)
   Range("calltrid").Offset(-w, i) = c(1, w)

   c(1, -Nj) = c(1, -Nj + 1) - lambda_L
   Range("calltrid").Offset(Nj, i) = c(1, -Nj)

   Next w
' Application de la règle d'exercice
For j = -Nj To Nj
Range("callverif").Offset(-j, i) = c(1, j)
c(0, j) = Application.Max(c(1, j), X - st(j))
Range("callfin").Offset(-j, i) = c(0, j)
Next j
Next i
Range("put") = c(0, 0)
End Sub
```

Sous les mêmes données que le problème précédent, le prix du put américain, tel que calculé par le programme de la méthode implicite, est de 2,57 $. Au tableau 14, nous révélons les grilles qui servent à retracer cette solution.

TABLEAU 14 **Détail du calcul du prix du put américain selon la méthode implicite**

	D	E
1	**Prix de l'action à l'échéance**	**Cash-flows du put**
2		**à l'échéance**
3		
4		
5		
6	81.99534602	0
7	67.13211139	0
8	54.96312412	0
9	45	0
10	36.84288389	8.157116111
11	30.16440207	14.83559793
12	24.69652362	20.30347638

	A	B
12	dt	0.333333
13	nu	-0.01
14	edx	1.221403
15	pu	-0.158333
16	pm	1.343333
17	pd	-0.175
18	lambdaL	-5.467878
19	lambdaU	0

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		**pmp**					**pp**		
2									
3					**j**				
4		1.32238	1.32238	1.32238	**2**		0.177361	0.083029	0.024439
5		1.322379	1.322379	1.322379	**1**		0.801232	0.468755	0.184676
6		1.322336	1.322336	1.322336	**0**		3.311227	2.46776	1.395447
7		1.319617	1.319617	1.319617	**-1**		10.56861	10.52261	10.52261
8		1.168333	1.168333	1.168333	**-2**		15.79248	15.79248	15.79248
9	**i**	**0**	**1**	**2**		**i**	**0**	**1**	**2**

	P	Q	R	S	T
1		**Grille des cash-flows du put**			
2					**j**
3		0.152366	0.071328	0.020995	**3**
4		0.152366	0.071328	0.020995	**2**
5		0.624145	0.363019	0.142168	**1**
6		2.578807	1.909679	1.072312	**0**
7		8.318261	8.203117	8.102646	**-1**
8		14.64439	14.62879	14.61517	**-2**
9		20.11227	20.09667	20.08305	**-3**
10	**i**	**0**	**1**	**2**	

7. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES DE CRANK-NICOLSON

Cette procédure pour calculer le prix d'une option est un raffinement de la méthode implicite des différences finies. C'est, au dire de Clewlow et Strickland, une méthode pleinement centrée en ce sens

que les dérivées de l'équation différentielle de Black et Scholes sont centrées sur une période imaginaire (i + 1/2). Après le recentrage de ces dérivées, l'équation différentielle de Black et Scholes devient :

$$-\frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\left(C_{i+1,j+1} - 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1}\right) + \left(C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}\right)}{2\Delta x^2}\right) + \ldots$$
$$+ \nu\left(\frac{\left(C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j-1}\right) + \left(C_{i,j+1} - C_{i,j-1}\right)}{4\Delta x}\right)$$
$$- r\left(\frac{C_{i+1,j} + C_{i,j}}{2}\right) \qquad (116)$$

On voit que la méthode effectue une moyenne des approximations des dérivées aux points (i) et (i + 1), donc en fait au point (i + 1/2), tandis que dans la méthode des différences finies implicites, les dérivées n'étaient calculées que par rapport au point i. En fait, la méthode de Crank-Nicholson fait une moyenne des dérivées telles que calculées par les méthodes implicite et explicite : on calcule les dérivées aux point i et (i + 1) et l'on fait une moyenne. Mais la méthode Crank-Nicolson demeure une méthode implicite puisque sa solution requiert la résolution d'une matrice tridiagonale.

En regroupant les termes, l'équation (116) devient :

$$p_u C_{i,j+1} + p_m C_{i,j} + p_d C_{i,j-1} = -p_u C_{i+1,j+1} - (p_m - 2)C_{i+1,j} - p_d C_{i+1,j-1} \qquad (117)$$

où :

$$p_u = -\frac{1}{4}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{\Delta x}\right) \qquad (118)$$

$$p_m = 1 + \Delta t\,\frac{\sigma^2}{2\Delta x^2} + \frac{r\Delta t}{2} \qquad (119)$$

$$p_d = -\frac{1}{4}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{\Delta x}\right) \qquad (120)$$

Comme dans les cas précédents, il y a $(2N_j + 1)$ inconnues à chaque pas. Il existe $(2N_j - 1)$ équations du type (117). Pour résoudre le système d'équations à chaque pas de la grille, il faut ajouter ses bornes supérieure et inférieure :

$$C_{i,N_j} - C_{i,N_{j-1}} = \lambda_u \tag{121}$$

$$C_{i,-N_{j+1}} - C_{i,-N_j} = \lambda_L \tag{122}$$

Les $(2N_j - 1)$ équations du type (117) et les deux bornes constituent un système tridiagonal d'équations pour calculer les $(2N_j + 1)$ inconnues à chaque pas, qui sont les cash-flows de l'option à ce pas. La procédure pour solutionner ce système d'équations est identique à celle de la méthode implicite.

7.1. Cas du call européen

Au tableau 15 apparaît le programme Visual Basic du calcul du prix d'un call européen par la méthode de Crank-Nicolson, qui n'est qu'une simple variante de celui présenté pour la méthode implicite.

TABLEAU 15 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'un call européen par la méthode de Crank-Nicolson**

```
Sub call_CrankN()

Sheet3.Activate


X = Range("Xcn").Value
T = Range("Tcn").Value
S = Range("Scn").Value
sigma = Range("sigmacn").Value
r = Range("tauxcn").Value
div = Range("divcn").Value
N = Range("Ncn").Value
Nj = Range("Njcn").Value
dx = Range("dxcn").Value

Dim i As Integer, j As Integer
Dim edx As Double, dt As Double, nu As Double, pu As Double, _
pm As Double, pd As Double
```

TABLEAU 15 *(suite)*

```
Dim lambda_L As Double, lambda_U As Double
Dim c() As Double, st() As Double

ReDim c(0 To N, -Nj To Nj)
ReDim st(-Nj To Nj)

Dim pmp() As Double, pp() As Double
Dim k As Integer, w As Integer
ReDim pmp(-Nj To Nj)
ReDim pp(-Nj To Nj)


dt = T / N
Range("dtcn") = dt
nu = r - div - 0.5 * sigma ^ 2
Range("nucn") = nu
edx = Exp(dx)
Range("edxcn") = edx


pu = -0.25 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 + nu / dx)
Range("pucn") = pu
pm = 1 + 0.5 * dt * (sigma / dx) ^ 2 + 0.5 * r * dt
Range("pmcn") = pm
pd = -0.25 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 - nu / dx)
Range("pdcn") = pd

st(-Nj) = S * Exp(-Nj * dx)
Range("stockcn").Offset(Nj, 0) = st(-Nj)

For j = -Nj + 1 To Nj
st(j) = st(j - 1) * edx
Range("stockcn").Offset(-j, 0) = st(j)
Next j

'
For j = -Nj To Nj
c(0, j) = Application.Max(0, st(j) - X)
Range("putmatcn").Offset(-j, 0) = c(0, j)


Next j


lambda_U = (st(Nj) - st(Nj - 1))
Range("lambdaUcn") = lambda_U
lambda_L = 0
Range("lambdaLcn") = lambda_L
```

TABLEAU 15 *(suite)*

```
For i = N - 1 To 0 Step -1


pmp(-Nj + 1) = pm + pd
   Range("pmpcn").Offset(Nj - 1, i) = pmp(-Nj + 1)
pp(-Nj + 1) = -pu * c(0, -Nj + 2) - (pm - 2) * c(0, -Nj + 1) - pd *
c(0, -Nj) + pd * lambda_L
   Range("ppcn").Offset(Nj - 1, i) = pp(-Nj + 1)


For k = -Nj + 2 To Nj - 1
pmp(k) = pm - pu * pd / pmp(k - 1)
Range("pmpcn").Offset(-k, i) = pmp(k)
pp(k) = -pu * c(0, k + 1) - (pm - 2) * c(0, k) - pd * c(0, k - 1) -
pp(k - 1) * pd / pmp(k - 1)
   Range("ppcn").Offset(-k, i) = pp(k)
Next k

c(1, Nj) = (pp(Nj - 1) + pmp(Nj - 1) * lambda_U) / (pu + pmp(Nj -
1))
Range("calltridcn").Offset(-Nj, i) = c(1, Nj)
c(1, Nj - 1) = c(1, Nj) - lambda_U
Range("calltridcn").Offset(-Nj + 1, i) = c(1, Nj - 1)
' back-substitution

For w = Nj - 2 To -Nj + 1 Step -1
c(1, w) = (pp(w) - pu * c(1, w + 1)) / pmp(w)
   Range("calltridcn").Offset(-w, i) = c(1, w)


c(1, -Nj) = c(1, -Nj + 1) - lambda_L

     Range("calltridcn").Offset(Nj, i) = c(1, -Nj)


Next w

For j = -Nj To Nj

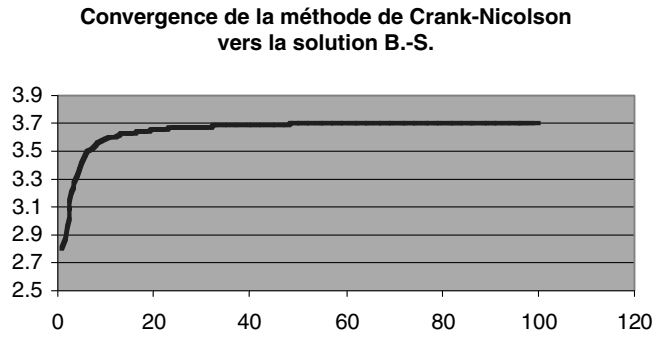
c(0, j) = c(1, j)


Next j
Next i

Range("put1") = c(0, 0)
End Sub
```

Toujours selon les mêmes données, la figure de la convergence de la méthode de Crank-Nicolson vers la solution B.-S. apparaît à la figure 7. Cette convergence est un peu plus rapide que dans le cas de la méthode implicite, bien que la méthode explicite continue de tenir le haut du pavé.

FIGURE 7



7.2. Cas du put américain

Finalement, le tableau 16 propose un programme Visual Basic pour déterminer le prix d'un put américain par la méthode de Crank-Nicolson.

TABLEAU 16 **Programme Visual Basic du calcul du prix d'un put américain par la méthode de Crank-Nicolson**

```
Sub put_CrankN()

Sheet3.Activate

X = Range("Xcn").Value
T = Range("Tcn").Value
S = Range("Scn").Value
sigma = Range("sigmacn").Value
r = Range("tauxcn").Value
div = Range("divcn").Value
```

TABLEAU 16 *(suite)*

```
N = Range("Ncn").Value
Nj = Range("Njcn").Value
dx = Range("dxcn").Value

Dim i As Integer, j As Integer
Dim edx As Double, dt As Double, nu As Double, pu As Double, _
pm As Double, pd As Double
Dim lambda_L As Double, lambda_U As Double
Dim c() As Double, st() As Double

ReDim c(0 To N, -Nj To Nj)
ReDim st(-Nj To Nj)

Dim pmp() As Double, pp() As Double
Dim k As Integer, w As Integer
ReDim pmp(-Nj To Nj)
ReDim pp(-Nj To Nj)

dt = T / N
Range("dtcn") = dt
nu = r - div - 0.5 * sigma ^ 2
Range("nucn") = nu
edx = Exp(dx)
Range("edxcn") = edx

pu = -0.25 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 + nu / dx)
Range("pucn") = pu
pm = 1 + 0.5 * dt * (sigma / dx) ^ 2 + 0.5 * r * dt
Range("pmcn") = pm
pd = -0.25 * dt * ((sigma / dx) ^ 2 - nu / dx)
Range("pdcn") = pd

st(-Nj) = S * Exp(-Nj * dx)
Range("stockcn").Offset(Nj, 0) = st(-Nj)

For j = -Nj + 1 To Nj
st(j) = st(j - 1) * edx
Range("stockcn").Offset(-j, 0) = st(j)
Next j

For j = -Nj To Nj
c(0, j) = Application.Max(0, X - st(j))
Range("putmatcn").Offset(-j, 0) = c(0, j)

Next j

lambda_L = -1 * (st(-Nj + 1) - st(-Nj))
Range("lambdaLcn") = lambda_L
lambda_U = 0
Range("lambdaUcn") = lambda_U

For i = N - 1 To 0 Step -1
```

TABLEAU 16 *(suite)*

```
pmp(-Nj + 1) = pm + pd
   Range("pmpcn").Offset(Nj - 1, i) = pmp(-Nj + 1)
pp(-Nj + 1) = -pu * c(0, -Nj + 2) - (pm - 2) * c(0, -Nj + 1) - pd *
c(0, -Nj) + pd * lambda_L
   Range("ppcn").Offset(Nj - 1, i) = pp(-Nj + 1)

For k = -Nj + 2 To Nj - 1
pmp(k) = pm - pu * pd / pmp(k - 1)
Range("pmpcn").Offset(-k, i) = pmp(k)
pp(k) = -pu * c(0, k + 1) - (pm - 2) * c(0, k) - pd * c(0, k - 1) -
pp(k - 1) * pd / pmp(k - 1)
   Range("ppcn").Offset(-k, i) = pp(k)
Next k

c(1, Nj) = (pp(Nj - 1) + pmp(Nj - 1) * lambda_U) / (pu + pmp(Nj -
1))
Range("calltridcn").Offset(-Nj, i) = c(1, Nj)
c(1, Nj - 1) = c(1, Nj) - lambda_U
Range("calltridcn").Offset(-Nj + 1, i) = c(1, Nj - 1)
' back-substitution
For w = Nj - 2 To -Nj + 1 Step -1
c(1, w) = (pp(w) - pu * c(1, w + 1)) / pmp(w)
   Range("calltridcn").Offset(-w, i) = c(1, w)

      c(1, -Nj) = c(1, -Nj + 1) - lambda_L
      Range("calltridcn").Offset(Nj, i) = c(1, -Nj)

Next w

For j = -Nj To Nj

c(0, j) = Application.Max(c(1, j), X - st(j))

Next j

Next i
Range("put1") = c(0, 0)

End Sub
```

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

BLACK, F. et M. SCHOLES (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, mai-juin, p. 637-659.

BRYIS, E. *et al.* (1998), *Options, Futures and Exotic Derivatives : Theory, Application and Practice*, New York, Wiley Frontiers in Finance.

CLEWLOW L. et C. STRICKLAND (1998), *Implementing Derivative Models*, Chichester, Wiley.

DEITEL, H.M., P.J. DEITEL et T.R. NIETO (1999), *Visual Basic 6 : How to Program*, New York, Prentice Hall.

GREEN, J. (1999), *Excel 2000 VBA Programmer's Reference*, Birmingham, Wrox Press Ltd.

HULL, J.C. (2000), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 4e édition, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

HULL, J.C. (1998), *Introduction to Futures and Options Markets*, Upper Saddle Hill (N.J.), Prentice Hall.

HULL, J.C. (1989), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 1re édition, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall.

HULL, J. et A. WHITE (1993), « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-dependent Options », *Journal of Derivatives*, vol. 1, p. 21-32.

JACKSON, M. et M. STAUTON (2001), *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley.

JAMES, J. et N. WEBBER (2000), *Interest Rate Modelling*, New York, Wiley.

JUDD, K.L. (1998), *Numerical Methods in Economics*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

NEFTCI, S.N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, San Diego, Academic Press.

PRESS, W.H. *et al.* (1992), *Numerical Recipes in C*, New York, Cambridge University Press.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2000), *Traité de gestion de portefeuille : titres à revenus fixes et produits dérivés*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

ROSS, S.M. (1999), *An Introduction to Mathematical Finance : Options and Other Topics*, Cambridge (R.-U.), Cambridge University Press.

ROSTAN, P. (2001), *Produits dérivés et Visual Basic : les premiers outils de l'ingénierie financière*, Montréal, Guérin universitaire

TAVELLA, D. et C. RANDALL (2000), *Pricing Financial Derivatives : the Finite Difference Method*, New York, Wiley.

WALKENBACH, J. (2000), *Microsoft Excel 2000 Power Programming with VBA*, New York, Hungry Minds.

WILMOTT, P. (2001), *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, New York, Wiley.

WILMOTT, P. (2000), *On Quantitative Finance*, volumes 1 et 2, New York, Wiley.

WILMOTT, P. (1998), *Derivatives*, New York, Wiley.

CHAPITRE

14

L'ANALYSE DES DONNÉES À HAUTE FRÉQUENCE

Dans les chapitres 14 et 15, nous nous intéressons aux méthodes modernes de la finance empirique, c'est-à-dire les méthodes issues de l'économétrie financière récente. Nous nous concentrons plus particulièrement sur les erreurs de spécification en économétrie financière. Dans le chapitre 14, nous analysons les techniques d'estimation et les tests d'ajustement pour un modèle très utilisé dans la littérature récente, le modèle Weilbull. Nous présentons également, de façon détaillée, deux applications ainsi que leurs programmes. Après analyse de la procédure à suivre pour estimer et tester le modèle Weibull avec des données en coupe transversale, nous élargissons notre spécification de ce modèle pour être en mesure de l'appliquer aux données en séries temporelles.

Dans le chapitre 15, nous dirigerons notre attention vers un autre contexte pour étudier les erreurs de spécification. Nous analyserons les erreurs de mesure sur les variables explicatives dans le cadre de la régression linéaire. Nous présenterons également une application

1. Pour ce chapitre et le suivant, nous tenons à remercier les professeurs : Marcel Boyer, Ph.D., Cirano-Université de Montréal ; Alain Coën, Ph.D., ÉSG/UQAM, Denis Cormier, Ph.D., ÉSG/UQAM ; Paul André, Ph.D., HÉC et Christian Calmès, Ph.D., économiste-chercheur à la Banque du Canada, pour avoir lu une première version de ce texte.

des techniques d'estimation développées dans ce chapitre au modèle de marché. Nous proposons une nouvelle spécification du modèle de marché qui tient compte des erreurs sur les variables. Nous utilisons les résultats de notre estimation pour calculer le coût moyen du capital. Des programmes pour effectuer ce calcul sont présentés afin de rendre l'utilisateur opérationnel sur le sujet.

Précisons d'abord que la première application présentée dans le chapitre 14 a pour but ultime de tester la forme fonctionnelle Weibull sur des données socioéconomiques canadiennes, utilisées du fait qu'elles sont moins contaminées et moins complexes à analyser que les données financières et, plus particulièrement, celles observées à haute fréquence, qui feront l'objet de la seconde application. Dans chacune de nos applications, nous utilisons une statistique pour vérifier l'ajustement du modèle Weibull. Entres autres, dans la première, nous effectuons un test de moments à la Tauchen-Newey en utilisant le logiciel GQOPT. Dans la deuxième, nous généralisons le modèle Weibull aux séries temporelles financières et présentons également la méthodologie particulière aux processus de points.

Peu d'études ont été réalisées sur le type de données transitionnelles que nous utilisons dans ces applications économiques et financières. En effet, la première application concerne les données socioéconomiques du phénomène de la monoparentalité au Canada (Lebourdais *et al.*, 1994). Cette application du modèle de hasard Weibull s'adresse donc à des données transitionnelles. Par contre, l'application de ce modèle sur des durées de grèves semble avoir connu un certain succès, bien que l'utilisation d'autres formes paramétriques et non paramétriques soit fortement encouragée (Lancaster, 1979 ; Kennan, 1985).

Notre application du modèle de hasard Weibull aux épisodes de monoparentalité confirme certains résultats trouvés dans la littérature. Par exemple, le fait que les femmes d'un certain âge ont plus de difficulté à sortir de l'état monoparental que les jeunes femmes et que l'âge des enfants a un effet positif et proportionnel sur la probabilité de sortir de cet état (LeBourdais *et al.*, 1994). Par contre, le calcul du test nous indique que le modèle utilisé est probablement inadéquat pour ces données. Ce qui n'est pas contradictoire avec la littérature sur le sujet (LeBourdais *et al.*, 1994).

Très peu d'études ont été effectuées sur la forme fonctionnelle Weibull dans ses rapports avec la finance. Comme nous l'avons mentionné, les recherches récentes sur celle-ci se consacrent surtout à la l'application de ce modèle aux données sur l'emploi (Lancaster 1979, Røed & Zhang 2002) ou aux données sur les grèves (Kennan 1985). Mis à part le développement et l'application du modèle Weibull aux données observées à haute fréquence effectués par Engle et Russel (1998) et l'application de celui-ci aux taux d'intérêt pour tenir compte des valeurs extrêmes dans les queues de la distribution[2] comme, par exemple, dans l'évaluation de produits dérivés sur taux d'intérêt prenant en compte la « *volatility smile* » de Kuan et Webber (1998), peu de recherches ont été effectuées dans ce domaine. Dans notre application financière, nous montrons comment généraliser et appliquer le modèle Weibull aux transactions à haute fréquence du titre d'IBM. Ce type particulier de données transitionnelles est caractérisé par le phénomène dit de « déformation temporelle ». En effet, l'information sur les transactions arrive à intervalles irréguliers impliquant donc une non-concordance entre le temps économique et le temps usuel (*calendar time*). À l'instar de Engle et Russel (1998), nous montrons également comment modifier la fonction de vraisemblance pour estimer les paramètres de notre modèle.

Ce chapitre se divise en trois parties. La partie 1 présente les développements requis pour obtenir la fonction de vraisemblance et le test d'ajustement du modèle avec une extension possible pour la présence de censure. La partie 2 présente l'analyse descriptive des données et les résultats d'estimation du modèle. La partie 3 se penche sur la théorie et l'application du modèle Weibull dans le cadre de données transitionnelles empreintes du phénomène de déformation temporelle. Enfin, une conclusion fait part de nos réserves quant à l'utilisation du modèle de hasard Weibull pour notre application socioéconomique ainsi que de suggestions de solutions pour la correction du test de moments. Nous discutons également des avenues de recherches possibles dans le domaine des séries financières observées

2. Dans ce type d'analyse, les distributions Weibull (queue fine), Fréchet (queue épaisse) et Gumbel (queue normale) sont les plus utilisées dans la recherche empirique concernant les taux d'intérêt (voir James et Webber, 2000).

à haute fréquence en relation avec l'évaluation des prix des produits dérivés et, finalement, d'extensions possibles de la forme fonctionnelle Weibull qui n'ont pas été testées dans cette littérature.

1. MÉTHODOLOGIE

1.1. Fonction de vraisemblance

On cherche à modéliser les durées d'épisodes de monoparentalité, soit des données avec censure, à l'aide d'une fonction de hasard Weibull. Cette fonction prend la forme suivante :

$$\theta(t) = p\theta_i^{\,p} t_i^{\,p-1}$$

où

$$\theta_i = e^{-\beta' X_i} \qquad (1)$$

avec $\theta(t)$, le hasard d'un épisode de monoparentalité ; t, la durée de cet épisode, $p = 1/\sigma$[3] et β un vecteur de paramètres à estimer. La censure étant définie comme $\delta_i = 1$ si l'état est complété et $\delta_i = 0$ s'il est censuré. Pour estimer les paramètres β et p, il faut construire la fonction de vraisemblance. Pour cela, il est nécessaire de montrer la relation qui existe entre la fonction de hasard, la fonction de densité et la fonction de survie. Cette relation est indiquée par la définition théorique de $\theta(t)$, (1) étant la forme paramétrique imposée. Elle se définit comme suit :

$$\theta(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\text{prob}\,(t \le T \le t + dt \mid T \ge t)}{dt}$$

Mais par la loi des probabilités conditionnelles, on peut simplifier cette expression de la façon suivante :

$$\text{prob}\,(t \le T < t + dt \mid T \ge t) = \frac{\text{prob}(t \le T < t + dt)}{\text{prob}(T \ge t)}$$

en supposant que $\text{prob}(T \ge t) > 0$. En terme de fonction de distribution, on peut réécrire cette expression comme suit :

3. p estimé nous indiquera la pente de la fonction de hasard Weibull.

$$\frac{F(t + dt) - F(t)}{1 - F(t)}$$

Enfin, en divisant cette expression par dt tout en prenant sa limite vers 0, on obtient[4] :

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \lim_{dt \to 0} \frac{F(t + dt) - F(t)}{dt} \times \frac{1}{1 - F(t)} \\ &= F'(t) \times \frac{1}{1 - F(t)} \\ &= f(t) \times \frac{1}{1 - F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{S(t)} \end{aligned} \quad (2)$$

Donc, $\theta(t)$[5] est ainsi égal au ratio de f(t), la fonction de densité, et S(t)[6] la fonction de survie. S(t) est étroitement liée à la *fonction de hasard intégrée*, qui prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= \int_0^t \theta\ (t)\ dt \\ &= \int_0^t \theta p\ (\theta t)^{p-1}\ dt \\ &= \frac{\theta p \theta^{p-1} t^p}{p} = (\theta t)^p \end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle de cette fonction, on obtient :

$$S(t) = e^{-\Lambda(t)} = e^{-(\theta t)^p} \quad (3)$$

4. T est une variable aléatoire qui a une fonction de distribution f(t), où t est une réalisation de T. F(t) est la c.d.f. de f(t). $F'(t) = dF(t) / dt = f(t)$.
5. Probabilité moyenne de sortir d'un état, par unité de temps, dans un petit intervalle de temps dt après t. Autrement dit : étant donné que l'état a duré t périodes de temps, quelle est la probabilité de sortir de cet état peu de temps après t ?
6. Probabilité qu'un état soit de durée supérieure ou égale à t. Elle est aussi définie comme étant la probabilité de survie jusqu'à t.

Ainsi, S(t) dépend de θ, qui dépend lui-même des paramètres à estimer. L'équation (3) sera utilisée dans la fonction de vraisemblance. Afin de simplifier l'estimation, une transformation logarithmique est effectuée sur la fonction de hasard intégrée :

$$\Psi_i = \ln \Lambda(t) - p \ln(\theta_i t_i)$$

En substituant, dans cette équation, les expressions de θ_i et p définies en (1), on a que :

$$\Psi_i = \ln \Lambda(t) = \frac{\ln t_i - \beta' X_i}{\sigma} \tag{4}$$

Une dernière étape est nécessaire afin d'obtenir la fonction de vraisemblance : il s'agit de remplacer t par Ψ_i dans θ(t), S(t) et f(t). Par (1), on obtient :

$$\theta(\Psi_i) = p e^{\Psi_i} \tag{5}$$

De (3), il résulte :

$$\begin{aligned} \ln S(t) &= -(\theta t)^p \\ -\ln S(t) &= (\theta t)^p \\ \ln S(t) &= -e^{p \ln \theta t} \\ S(t) &= \exp(-e^{p \ln \theta t}) \\ \Rightarrow S(\Psi_i) &= \exp(-e^{\Psi_i}) \end{aligned}$$

et de (2), on obtient :

$$\begin{aligned} f(\Psi_i) &= \theta(\Psi_i) \times S(\Psi_i) \\ &= p e^{\Psi_i} \times \exp(-e^{\Psi_i}) \\ &= p(\Psi_i - e^{\Psi_i}) = 1/\sigma(\Psi_i - e^{\Psi_i}) \end{aligned} \tag{6}$$

La fonction de vraisemblance est définie comme étant la densité de probabilité de générer l'échantillon observé. Donc, on peut écrire la fonction de vraisemblance pour le modèle Weibull de la façon suivante :

$$L = \prod_i^N f(\psi_i)^{\delta_i} \times S(\psi_i)^{1-\delta_i}$$ [7]

7. Cette définition implique de faire le produit des densités avec et sans censure. Notons la similitude de cette fonction de vraisemblance avec celle d'un modèle Tobit.

En prenant le logarithme de cette expression, on a :

$$\begin{aligned}\ln L &= \sum_i \delta_i f(\Psi_i) \times (1 - \delta_i) \ln S(\Psi_i) \\ &= \sum_i \delta_i(\Psi_i - e^{\Psi_i} - \ln \sigma) + (1 - \delta_i)(-e^{\Psi_i}) \\ &= \sum_i (\delta_i \Psi_i - \delta_i e^{\Psi_i} - \delta_i \ln \sigma - e^{\Psi_i} + \delta_i e^{\Psi_i}) \\ &= \sum_i ((\delta_i(\Psi_i - \ln \sigma)) - e^{\Psi_i}) \qquad (7)\end{aligned}$$

Finalement, en substituant (4) par sa valeur on obtient le logarithme de la fonction de vraisemblance en fonction des paramètres à estimer :

$$\ln L = \sum_i \left(\delta_i \left(\frac{\ln t_i - \beta' X_i}{\sigma} - \ln \sigma \right) - e^{\frac{1-\beta' Xi}{\sigma}} t_i \right) \qquad (8)$$

1.2. Test d'ajustement du modèle Weibull

Pour tester si la fonction de hasard Weibull est pertinente (hypothèse H0), un test de moments à la Tauchen-Newey est effectué. Ce test est basé sur les moments théoriques de la distribution exponentielle unitaire, donnés par $E(\varepsilon^r) = r!$. La procédure utilisée s'inspire de Jaggia (1991).

La première étape consiste à calculer les *résidus généralisés* (au sens de Cox-Snell). Ils se calculent comme suit :

$$\begin{aligned}e_i &= (\theta_i t_i)^{\hat{p}} \\ &= (\exp(-\hat{\beta}' X_i) t_i)^{\hat{p}} \qquad (9)\end{aligned}$$

où p et β sont les estimations des paramètres cherchés[8]. Les résidus ainsi calculés sont comparés aux moments théoriques :

8. Notons que e_i est aussi la fonction de hasard intégrée avec ses paramètres estimés.

$$E(\varepsilon^2) = 2$$
$$E(\ln \varepsilon) = \Psi(1) = -0,577^{9}$$

Le test étant distribué comme une χ_2^2, il s'écrit comme suit :

$$N\tilde{\tau}'(V_{mm} - V_{md}H^{-1}V_{md})^{-1}\tau \qquad (10)$$

où N est la taille de l'échantillon. Dans cette expression, $\tilde{\tau}$ est la différence entre les moments échantillonnaux et les moments théoriques et est donné par :

$$\tilde{\tau}' = \left(\frac{\Sigma e_i^2}{N} - 2, \frac{\Sigma \ln e_i}{N} - 0,5772 \right)$$

La matrice variance-covariance de $\tilde{\tau}$ est :

$$(V_{mm} - V_{md}H^{-1}V_{md})$$

Jaggia (1991) montre que cette matrice peut se réduire à :

$$\begin{pmatrix} 4 - 4q & -1 + 2q \\ -1 + 2q & 0,6449 - q \end{pmatrix} \qquad (11)$$

q étant le nombre de restrictions (q = 2).

Finalement, en substituant (11) dans (10) et $\tilde{\tau}$ par sa valeur, on obtient le test d'ajustement du modèle Weibull :

$$N\begin{pmatrix} \Sigma e_i^2 \ / \ N - 2 \\ \Sigma \ln e_i \ / \ N - 0,5572 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 4 - 4q & -1 + 2q \\ -1 + 2q & 0,6449 - q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma e_i^2 \ / \ N - 2 \\ \Sigma \ln e_i \ / \ N - 0,5572 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

9. Si l'échantillon est suffisamment grand, on peut calculer les moments d'ordre supérieur à 2. Mais pour nos besoins, les moments d'ordre inférieur ou égal à 2 sont suffisants.

1.3. Conditions d'applicabilité du test

En présence de censure, le test présenté ci-dessus peut poser un problème, car il est basé sur les résidus généralisés au sens de Cox-Snell (1968). Ces résidus peuvent être mal adaptés. Jaggia (1991) ne mentionne pas sur quel type de résidus on devrait se baser pour construire le test. Par contre, Lancaster (1985) explique que les résidus généralisés ne peuvent pas être correctement calculés en présence de censure dû au fait que certaines réalisations t de T ne sont pas connues. Il présente une forme de résidus considérant la censure à droite (notre cas dans l'application). Ces résidus prennent la forme suivante :

$$\varepsilon_i(t) = e_i(t) + c_i \tag{13}$$

où les $e_i(t)$ sont les résidus généralisés présentés plus haut et c_i, la censure. Plus précisément, $c_i = 1$ s'il y a censure et 0 autrement. Dans notre cas, $c_i = 1$ correspond à $1 - \delta_i = 1$.

Pour bâtir le nouveau test, on peut procéder tel que présenté ci-dessus, mais en utilisant la matrice de variance-covariance originelle :

$$(V_{mm} - V_{md}H^{-1}V_{md})$$

où

$$V_{mm} = E(mm') = 1 / N \sum \tilde{m}_i \, \tilde{m}_i$$

$$V_{md} = E(md') = 1 / N \sum \tilde{m}_i \, \tilde{d}_i$$

$$H = E(dd') = 1 / N \sum \tilde{d}_i \tilde{d}_i \text{ avec } d_i = \partial \ln f_i / \partial \theta' \text{ et } \theta = (\beta', p).$$

Toutefois, même en considérant les résidus de Lancaster, l'application du test d'ajustement aux données avec censure pose toujours problème. Il concerne les $\tilde{m}_i$. Les $\tilde{m}_i$ sont les moments échantillonnaux contraints par les moments théoriques. Dans le cas présenté plus haut, les $\tilde{m}_i$ ont la forme suivante :

$$\tilde{\tau}' = \left(\frac{\Sigma e_i^2}{N} - 2, \frac{\Sigma \ln e_i}{N} - 0,5772 \right)$$

où 2 et 0,5772 sont les moments théoriques. Dans le cas où il y a censure, la valeur de ces moments est en effet inconnue. Pour l'instant, cette question demeure sans réponse. À défaut d'avoir ces

moments dans le cas où il y a censure, une façon d'approcher numériquement leurs valeurs est de recourir à la simulation et de substituer le résultat dans $\tilde{m}_i$ et, enfin, de procéder au calcul du test.

2. APPLICATION ÉCONOMIQUE DU MODÈLE WEIBULL

2.1. Données

L'analyse descriptive des données sera faite à l'aide du tableau 1[10]. Située dans le haut du tableau, la variable dépendante (t) utilisée dans l'équation (1) est l'épisode de monoparentalité. Les données pour cette variable sont constituées à partir de 763 observations sur 5 regroupements provinciaux (nprov : Atlantique, Québec, Ontario, Prairies-Saskatchewan et Colombie-Britanique). La durée moyenne d'un épisode de monoparentalité est d'environ 3,7 ans. La durée d'un

TABLEAU 1 **Données utilisées pour l'estimation des paramètres β et p de la fonction de hasard Weibull**

Variables	Nombre d'obs.	Moyenne	Écart-type	Min	Max
Épisodes de monoparentalité (t)	763	3,7	3,3	0,1	15
Indicateur de censure (x5)	763	0,58	–	0	1
Âge au début de l'épisode (x2)	763	30,4	10,9	14	66,2
Âge du plus jeune enfant (x3)	763	8,3	6,4	0	21
Nombre d'enfants (x4)	763	1,4	0,7	1	5
Cause de l'entrée : fille mère (c1)	763	0,3	–	0	1
Veuvage (c2)	763	0,1	–	0	1
Divorce (c1 = c2 = 0)	763	0,6	–	0	0
Province (nprov)	763	33,7	14,1	10	59
Éducation secondaire (eds)	763	0,62	–	0	1
Éducation technique (edt)	763	0,25	–	0	1
Éducation universitaire (edu)	763	0,08	–	0	1

10. Les données de ce tableau proviennent de l'Enquête sociale générale sur les familles réalisée par Statistique Canada.

épisode peut varier de 0,1 an à un maximum de 15 ans. Environ 42 % (x5 = 1 – 0,58) des épisodes sont censurés. Il est donc important d'en tenir compte lors de l'estimation.

La construction des variables explicatives s'effectue à partir de neuf variables. Suivant l'ordre du tableau, l'âge moyen de la femme au début de l'épisode (x2) est de 30,4 ans (sur 763 observations) et varie de 14 à 66,2 ans. Cet âge maximum est expliqué par le fait que x3, l'âge du plus jeune enfant, varie entre 0 et 21 ans (avec une moyenne de 8,3 ans).

Le nombre d'enfants (x4) de la femme moyenne dans l'échantillon est de 1,4. Ce nombre varie de 1 à 5. La famille moyenne de cet échantillon est composée de moins de deux enfants (moyenne = 1,4).

La cause principale de l'entrée de ces femmes en état de monoparentalité est le divorce (cl = c2 = 0). Respectivement, 60 % (0,6 = 1 – (0,1 + 0,4)) des entrées représentent des divorcées, 30 %, des filles mères (cl) et 10 % des veuves (c2 = veuvage).

La variable nprov = provinces divise le territoire échantillonnal canadien en 5 regroupements provinciaux : Altantique (1-13), Québec (24), Ontario (35), les Prairies (Manitoba, Saskatchewan et Alberta) (44 et moins), et Colombie Britannique (59). La majorité des femmes de cet échantillon proviennent de l'Ontario et du Québec, puisque la moyenne de la variable nprov est de 33,7 (s.d. = 14,1).

Finalement, ces femmes sont regroupées par niveaux d'éducation : éducation secondaire (eds), éducation technique (edt) et éducation universitaire (edu). Approximativement 60 % des femmes de l'échantillon ont fait des études secondaires, 25 % des études techniques et un peu moins de 10 % ont fait des études universitaires.

2.2. Résultats

Le tableau 2 présente les estimations des paramètres β et p. En commençant par le haut du tableau, les variables âge25, âge35, âge45 et âge45+ sont des variables dichotomiques qui ont été bâties à partir de la variable x2 et ceci pour mieux capter l'effet de chaque groupe d'âge sur la fonction de hasard. Ainsi, âge25, qui représente les femmes ayant un âge ≤ 25 ans au début de l'épisode de mono-

TABLEAU 2 **Estimation des paramètres du modèle de hasard Weibull avec censure aux données socioéconomiques**

Variables	Coefficients	Statistiques-t	Gradients
âge25 (x2<25)	0,64225	2,23	–1,81D-07
âge35 (25<x2<35)	0,63353	2,17	–5,32D-06
âge45 (35<x2<45)	–0,26433	–0,81	–1,53D-06
âge 45+ (x2>45)	–1,0660	–2,98	–5,17D-06
x3 (âge + jeune	0,14985	12,74	–1,45D-04
enfant)	0,09244	1,43	–1,35D-05
x4 (nb. d'enfants)	0,14739	1,24	1,47D-06
cl (fille mère)	–0,45129	–3,12	–2,05D-06
c2 (veuvage)	–0,06051	–0,27	–8,16D-07
atlantique	0,03027	0,13	–1,88D-06
québec	0,09271	0,42	–1,33D-06
ontario	–0,01171	–0,50	–3,25D-06
ouest	–0,01444	–0,09	–5,55D-06
eds	–0,06583	–0,37	–2,11D-06
edt	0,14944	0,67	–5,32D-07
edu			
P = 1/s	1,29	23,29	5,54D-06
Test d'ajustement	1 296 > χ_2^2		
Nb. d'observations	763		
Nb. d'itérations	26		

Note : Le logiciel GQOPT a été utilisé pour l'estimation des paramètres (voir appendice).

parentalité, a un coefficient positif égal à 0,64225 et significatif. Sachant que le modèle de hasard Weibull fait partie de la famille de modèles à hasard proportionnel, on peut interpréter les coefficients comme les dérivées partielles de la fonction de hasard par rapport aux variables explicatives (Keifer 1988). Donc, $\partial \ln \theta(t)/\partial$âge25 = 0,64285 implique un déplacement vers le haut de la fonction de hasard montrant donc que ces femmes ont une probabilité accrue de sortie de l'état monoparentale. Il en va de même pour les femmes âgées de 25 ans à 35 ans (âge35 = 0,63353). Par contre, les

femmes dont l'âge est supérieur à 45 ans ont une probabilité de sortie diminuée. Ceci est représenté par un déplacement vers le bas de la fonction de hasard (âge45+ = –1,0660).

L'âge du plus jeune enfant a un effet positif sur la fonction de hasard (x3 = 0,14985, t = 12,74). Ce résultat peut s'expliquer de la façon suivante : plus l'âge du plus jeune enfant sera élevé, moins il sera un poids financier et moins il représentera une présence forcée pour le futur mari (LeBourdais *et al.*, 1994). Par contre, le nombre d'enfants (x4) devrait avoir un effet négatif sur la fonction de hasard. Mais on obtient un coefficient positif et non significatif. Donc on ne peut conclure pour ce paramètre avec l'estimation à la Weibull.

La cause de l'entrée en état de monoparentalité semble avoir un effet sur la fonction de hasard surtout lorsqu'il est dû à la perte du conjoint (c2). On remarque, au tableau 2, que l'effet est négatif et significatif (c2 = –0,6051, t = –3,12). Vraisemblablement, les femmes qui ont investi dans leur mariage et qui, par la suite, ont perdu leur conjoint, considèrent ensuite le gain associé au remariage trop faible par rapport au risque encouru.

Les variables dichotomiques de provinces ne sont pas significatives de même que les variables d'éducation. Pour ces variables, surtout pour la variable dichotomique d'éducation universitaire, on s'attendrait à une valeur négative et significative, ce qui n'est pas le cas ici. La raison serait la suivante : les femmes qui ont investi dans leur éducation avant le mariage et qui ont continué à accumuler de l'expertise ont plus de valeur sur le marché du travail. Elles sont donc plus enclines à rester dans l'état monoparental. Elles auront aussi moins d'enfants et donc moins de capital spécifique accumulé par le couple. Il en va de même pour les gains apportés par un nouveau mariage (LeBourdais *et al.*, 1994).

Toutefois, notre analyse des résultats de l'estimation du modèle Weibull sur les épisodes de monoparentalité, même si elle apparaît conforme à la littérature, doit être considérée avec certaines réserves. Il est important de noter, en effet, que le test d'ajustement présenté au bas du tableau 2 nous indique un fort rejet de l'hypothèse H0 au niveau de confiance 5 %, H0 étant l'hypothèse que le modèle Weibull est approprié. Quelques commentaires doivent être faits concernant la force du rejet et les raisons théoriques qui expliqueraient ce rejet.

On note que la valeur du test d'ajustement est égale à 1 296. Ceci peut être expliqué par le fait que les résidus généralisés sont probablement inadaptés aux données avec censure. Comme il a été mentionné, Lancaster (1985) explique que ces résidus ne sont pas correctement calculés dans ce cas et qu'il vaut mieux utiliser la forme de résidus présentée à l'équation (13). Mais pour le moment le test correspondant n'existe pas, car le calcul des moments théoriques prenant en compte la censure est inconnu.

D'après certaines estimations trouvées dans la littérature (LeBourdais *et al.*, 1994), la fonction de hasard Weibull est probablement inadéquate pour ces données (t) : t prendrait la forme d'un U au lieu d'une forme exponentielle croissante (p = 1,29) qui est la Weibull estimée ici. Ceci peut être expliqué de la façon suivante : les femmes entrant en état de monoparentalité restent seules pendant un certain temps. Ceci explique la pente négative au début de l'épisode. Ensuite elles commencent à se chercher un mari et puis, éventuellement, se remarient. Ceci explique le changement de signe de la pente (de – à +). Avec la fonction de hasard de Weibull, si cette théorie est vraie, on ne capte que la partie croissante de t.

3. Application financière du modèle Weibull : modèle Weibull de durée conditionnellement autorégressive (WACD)

Dans la section précédente, nous avons discuté une application économique du modèle Weibull de données transitionnelles pour tenter d'expliquer les facteurs influençant la probabilité de sortie de l'état de monoparentatilé vers un état (ou statut) de non-célibat. Pour ce faire, nous avons utilisé des données concernant les femmes canadiennes de différentes provinces en coupe transversale. Cette recherche nous révèle que le modèle Weibull est à tout le moins cohérent en regard de nos attentes par rapport aux facteurs influençant la probabilité de sortie. Par contre, le test d'ajustement que nous avons effectué nous révèle que le modèle Weibull ne semble pas approprié pour ce type de données transitionnelles.

Dans ce qui suit, nous allons tenter d'appliquer le modèle Weibull aux données transitionnelles des transactions boursières des actions d'IBM. La première section de cette application décrit les données et les manipulations que nous avons dû effectuer pour pouvoir estimer notre modèle. La deuxième section décrit les différentes formulations possibles et la méthodologie utilisée pour le calibrage de celui-ci. Ces formulations concernent le caractère temporel de la série financière que nous analysons. En effet, notre première application utilisait des données en coupe transversale alors que celle-ci utilise une série temporelle. Les modèles autorégressifs sont des plus populaires, car ils permettent de capter l'autocorrélation souvent présente dans ce type de données transitionnelles. Ainsi, nous introduirons un modèle paru récemment dans la littérature sur les modèles de données transitionnelles, soit le modèle de durée conditionnelle autorégressive. Pour modéliser la durée conditionnelle, nous présentons deux types de formulations de celle-ci : la formulation autorégressive d'ordre un, notée : AR(1), et la formulation autorégressive de moyenne mobile, notée : ARMA(1,1)[11]. De plus, nous présentons une application au calcul de la probabilité d'arrivée de nouvelles informations en utilisant le modèle Weibull. En combinant la formulation autorégressive de la durée au modèle Weibull de la probabilité de changement d'état, on obtient le modèle WACD[12]. Nous exposons également les formulations mathématiques des fonctions de vraisemblance ainsi que les programmes à effectuer afin de pouvoir estimer les paramètres de ces modèles. Finalement, dans la dernière section, nous faisons part des résultats d'estimation en comparant l'ajustement de nos deux modèles.

3.1. Données financières à haute fréquence

Les données utilisées dans cette application sont les transactions boursières des actions d'IBM. Elles sont naturellement espacées de façon irrégulière. Ces données transitionnelles sont composées de deux

11. On reconnaîtra ici la modélisation habituelle des ouvrages sur l'analyse des séries temporelles.

12. WACD est la traduction anglaise de *Weibull Autoregressive Conditional Duration model*.

types de variables aléatoires : le moment (le temps) où les transactions s'effectuent et les *marks* à ce moment. Dans notre application, un point[13] dans le temps est le temps ou moment où un contrat donnant droit à un certain nombre d'actions d'IBM est transigé. Les *marks* sont composés du volume de transactions, du prix du titre et des prix d'offre (*bid*) et de demande (*ask*) du contrat s'ils sont disponibles à ce temps-là. Plus précisément, notre échantillon est composé de 60 000 transactions effectuées à la Bourse de New York (NYSE) échelonnées sur une période débutant de novembre 1990 et se terminant en janvier 1991. À l'instar d'Engle (2000), nous retenons seulement les transactions qui se sont produites entre 9 h 30 et 16 h. Les transactions qui se sont faites durant les jours fériés ne sont pas retenues non plus dans notre échantillon[14]. Afin de tenir compte de *l'effet calendrier*, c'est-à-dire de l'effet intra-journalier par analogie à l'effet des jours de la semaine, qui est représenté par une augmentation de la fréquence des transactions près de l'ouverture et de la fermeture des marchés financiers, les données doivent être corrigées pour les saisonnalités[15]. Plus précisément, considérons l'exemple suivant où les durées sont ajustées pour l'effet des saisons (l'effet intra-journalier). La durée ajustée est donnée par :

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\varphi(t_{i-1}; \beta)} \tag{14}$$

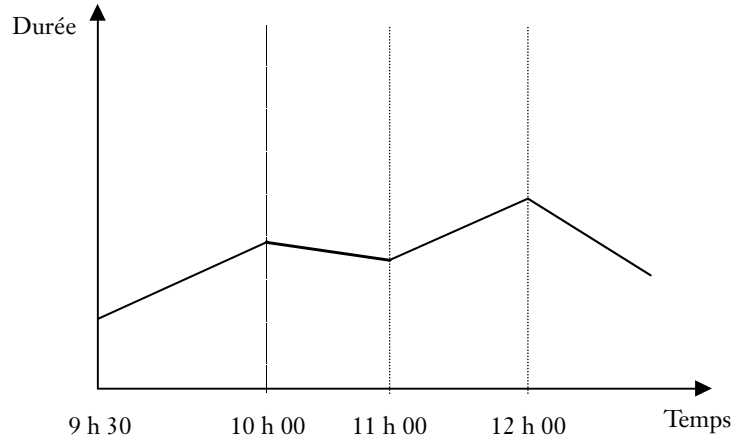
où $x_i = t_i - t_{i-1}$ est la durée entre chaque transaction et $\varphi(.)$ est une fonction *spline* utilisée pour ajuster les données pour l'effet intra-journalier. La figure 1 illustre la *spline* linéaire que nous utilisons pour ce faire.

13. Par référence au processus connu sous l'appellation anglaise de *point process*.

14. Les durées, c'est-à-dire le temps écoulé entre chaque transaction, qui se sont produites durant la nuit ne sont pas non plus considérées.

15. Engle et Russel (1998) traduisent cet ajustement par *to diurnally adjust*.

FIGURE 1 **Représentation d'une fonction *spline* linéaire**



Les nœuds sont les points où les segments de droite de la fonction *spline* se joignent. Ils sont situés aux temps 9:30, 10:00, 11:00, 12:00, 13:00, 14:00, 15:00, 15:30. Spécifiquement, l'ajustement des saisonnalités est effectué en régressant les durées sur le temps, cela en utilisant une fonction *spline* linéaire[16] qui prend la forme suivante :

$$x = c + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 + \beta_4 t_4 + \beta_5 t_5 + \beta_6 t_6 + \beta_7 t_7 + \beta_8 t_8 + e \quad (15)$$

16. En fait, la fonction *spline* n'est qu'une fonction linéaire par morceaux, les morceaux étant représentés par des segments de droites tel qu'illustré à la figure 1. Nous avons utilisé une fonction *spline* linéaire. Nous aurions pu utiliser une fonction *spline* d'ordre k. Cette fonction est en fait une approximation polynomiale par morceaux de degrée k qui est différentiable k – 1 fois en tout point. Par exemple, une fonction *spline* cubique est une fonction *spline* d'ordre trois qui est différentiable deux fois en tout point. À chaque point de nœud, la pente doit concorder et il en va de même pour la courbure de chaque côté du nœud. Un exemple de fonction *spline* cubique est donné par la formule suivante :

$$s(\tau) = \sum_{i=0}^{3} a_i \tau^i + \frac{1}{3!} \sum_{p=1}^{n-1} b_p (\tau - \varepsilon_p)_+^3 \text{ où } (\tau - \varepsilon_p)_+^3 = \max(\tau - \varepsilon_p, 0).$$

Comme nous pouvons le constater, s(.) est une combinaison linéaire de τ^i et $(\tau - \varepsilon_p)^p$. En général, une fonction *spline* d'ordre k a (n + k) paramètres où n est le nombre de points de nœud. Une façon pratique d'écrire la fonction s(.) qui porte l'appellation de fonction *B-spline*, notée B(.), est de trouver un ensemble de fonctions de base et de représenter les *splines* comme une combinaison linéaire de celles-ci. Pour de plus amples informations à ce sujet, on consultera : James et Webber (2000).

où t_{i-1} pour i = 2,…,9 sont des vecteurs de variables dichotomiques construites à partir des nœuds. De cette régression, nous obtenons $\hat{x}_i = \varphi(t_{i-1}; \hat{\beta})$. Les variables résultant de ces opérations, notées $\hat{x}_i$, qui sont exemptes de la saisonnalité intra-journalière, représentent des fractions des durées qui sont situées soit au-dessus soit en dessous de la normale.

3.2. Méthodologie : modèle de durée conditionnellement autorégressif (modèle ACD) et fonction de vraisemblance du modèle Weibull à haute fréquence et processus de points

Pour le modèle Weibull, rappelons-le, la fonction de hasard est définie par :

$$\lambda(x) = \gamma c^{\gamma} x^{\gamma-1} \tag{16}$$

pour les (c, γ). Cette équation est habituellement appelée *fonction de hasard*, comme nous l'avons expliqué dans l'application précédente, particulièrement dans le contexte où l'objet de l'étude a trait à plusieurs individus. Dans le contexte actuel où l'objet est un processus de points ou *point process*[17], on nomme cette fonction « intensité conditionnelle ». Plus précisément, un *point process* est un processus stochastique pour une séquence observée de temps d'arrivée :

$$\{t_0, t_1, ..., t_n, ...\} \quad \text{avec} \quad t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n ...$$

Associée à ces temps d'arrivée est la fonction N(t) qui compte le nombre d'événements qui se sont produits au temps t. Cette fonction est donc continue à partir de la gauche avec limite à droite. Aussi, s'il y a d'autres informations associées aux arrivées comme, par exemple,

17. C'est-à-dire, un processus de mouvement qui, d'état en état, génère une séquence de points dans le temps, le temps étant le moment où les transitions sont effectuées. Étant donné le caractère probabiliste des mouvements, le passage d'une personne ou d'un actif financier dans le temps, par exemple, est une réalisation d'un processus stochastique de points. Les processus de points sont une classe générale de modèles stochastiques de transitions entre ensembles discrets d'états en temps continu. Dans notre application, nous nous intéressons à la fois aux séquences et aux durées des états à travers lesquelles un titre passe dans le temps.

des prix ou des volumes de transactions, ce qui est le cas dans notre application financière, alors on nomme ce processus stochastique : processus ponctuel marqué (*marked point process*).

La description complète d'un processus ponctuel[18] est donnée par son processus d'intensité conditionnelle qui se définit :

$$\lambda(t|N(t), t_1, ..., t_{N(t)}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(N(t + \Delta t) > N(t) \middle| N(t), t_1, ..., t_{N(t)}\right)}{\Delta t} \quad (17)$$

Comme il est discuté dans Lancaster (1990), Snyder et Miller (1991) et Engle et Russel (1998), l'intensité conditionnelle, la densité des durées (temps d'attentes) entre événements et la fonction de survie conditionnelle sont toutes capables de fournir une description complète d'un processus stochastique conditionnellement ordonné.

Ainsi, le logarithme de la fonction de vraisemblance peut s'écrire en fonction de la densité conditionnelle ou de l'intensité conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\ell = \ln L &= \sum_{i=1}^{N(T)} \ln p_i\left(t_i \middle| t_0, t_1 ..., t_{i-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N(T)} \ln\left[\lambda\left(t_i \middle| t_0, t_1, ..., t_{i-1}\right) S\left(t_i \middle| t_0, t_1, ..., t_{i-1}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N(T)} \ln\left[\lambda\left(t_i \middle| t_0, t_1, ..., t_{i-1}\right) \exp\left[-\int_{t_0}^{T} \lambda\left(t_i \middle| t_0, t_1, ..., t_{i-1}\right) dv\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N(T)} \left[\ln \lambda\left(t_i \middle| i - 1, t_0, t_1, ..., t_{i-1}\right) - \int_{t_0}^{T} \lambda\left(v \middle| N(v), t_0, t_1, ..., t_{N(v)}\right) dv\right]
\end{aligned} \quad (18)$$

18. Apportons quelques précisions sur les point processes. Un processus défini sur l'intervalle $[t_0, \infty]$ est dit évoluant sans effet à retards (*to evolve without after-effects*) si pour $\forall\ t > t_0$, les réalisations de *points* durant $[t, \infty]$ ne dépendent pas de la séquence de *points* compris dans l'intervalle $[t_0, t]$. Un processus de comptage est dit être conditionnellement ordonné au temps $t \geq t_0$ si pour un intervalle de temps suffisamment petit et conditionnel à tout événement P défini par les réalisations du processus sur l'intervalle $[t_0, t]$, la probabilité que deux événements ou plus se réalisent est infinitésimale comparativement à la probabilité d'un seul événement. Dans notre application financière, nous ne nous intéressons qu'aux processus qui sont à la fois avec effet à retards et conditionnellement ordonnés (Snyder et Miller, 1991 ; Engle et Russell, 1998).

où l'intégrale de la troisième égalité vient du fait que $\lambda(t) = [f(t) / S(t)]$ où S(t), la fonction de survie, est définie par $S(t) = 1 - F(t)$, f(t) étant égal à [–dS(t)/dt]. λ(t) est donc une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient variable[19] en t sujette à la condition initiale que $S(0) = 1$ et a comme solution $S(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right]$.

L'intensité conditionnelle telle que nous l'avons définie est une fonction générale d'intensité d'un *point process* connue sous l'acronyme anglais de *self-exciting process*. Ce processus fut originalement développé par Hawkes (1971a,b ; 1972) et par Rubin (1972) et a comme propriété que la structure de probabilités d'événements futurs soit une fonction de l'évolution des événements passés. Le *point process* le plus connu et le plus simple faisant partie de cette classe est le processus de Poisson pour lequel l est un paramètre constant. Pour augmenter la flexibilité de ce dernier, on a introduit le processus de Poisson non homogène pour lequel l'intensité varie seulement en fonction de t et où le taux d'arrivée est supposé être une fonction déterministe du temps. Mais le problème avec ces deux modèles est qu'ils ne tiennent pas compte de l'influence des événements passés

---

19. Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient variable et à terme nul est définie par $\frac{dS(t)}{dt} + S(t)\lambda(t) = w(t)$ où S(t) et w(t) représentent, respectivement, le coefficient variable et le terme qui est nul dans notre cas. En réécrivant l'équation différentielle de façon à mettre λ en facteur (et en posant $w(t) = 0$), on obtient : $\frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda(t)$. Maintenant, développons les intégrales des côtés gauche et droit de cette dernière. Côté gauche : $\int \frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt}dt = \int \frac{dS(t)}{S(t)} = \ln S(t) + c$. Côté droit : $\int -\lambda(t)dt = -\int \lambda(t)dt$ et avec bornes d'intégration, on a : $-\int_0^t \lambda(u)du$. En égalisant le côté droit au côté gauche, on a $\ln S(t) = -c - \int_0^t \lambda(u)du \Rightarrow S(t) = e^{\ln S(t)} = e^{-c}e^{-\int_0^t \lambda(u)du} = A\exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right]$ avec pour condition initiale $S(0) = 1$. Cela implique que : $S(0) = e^{-c}e^{-\int_0^0 \lambda(u)du} = e^{-c}e^0 = 1 \Rightarrow e^{-c} = A = S(0) = 1$.

sur les arrivées futures, c'est-à-dire qu'ils évoluent sans effet à retards. Rubin (1972) introduisit alors les processus de comptage à mémoire limitée qu'il nomme *m-memory self-exciting counting process* où m désigne les m plus récents temps d'arrivée qui sont inclus dans l'intensité conditionnelle[20]. Wold (1948) fut le premier à introduire un modèle similaire au modèle ARMA dans un contexte où l'intérêt est centré sur la modélisation des intervalles entre les événements. Graver et Lewis (1980), Lawrence et Lewis (1980), et Jacobs et Lewis (1977) reformulent ce dernier selon le modèle autorégressif de moyenne mobile exponentielle EARMA(p,q). Mais c'est Cox (1972b) qui fut le premier à suggérer un modèle de durée avec variables retardées, et c'est Lancaster qui a introduit ces modèles en économétrie. L'aspect dynamique de ceux-ci fut développé en économétrie par Heckman et Borjas (1980) et Heckman (1981) dans une application où l'intérêt était centré sur l'impact du chômage passé d'individus sur l'épisode actuel. Dans ces modèles, l'analyse est dirigée sur plusieurs individus observés dans le temps et les séries temporelles sont typiquement de courte durée.

Le modèle que nous présentons fait partie d'une nouvelle famille de processus *self-exciting* et leur intensité conditionnelle est différente des modèles généralement utilisés pour l'analyse des données transitionnelles comme, par exemple, dans notre application socioéconomique présentée en première partie de ce chapitre.

Dans le cas où l'on se situe dans le cadre d'un processus de points et d'un modèle décrit par l'équation (16), l'intensité conditionnelle prend une forme un peu plus complexe et est donnée par :

$$\begin{aligned}\lambda\left(t\middle|x_{N(t)},\ldots,x_1\right) &= \gamma c^{\gamma}x^{\gamma-1}\\ &= \gamma\left(\Gamma\left(1+1/\gamma\right)\theta_{N(t)+1}^{-1}\right)^{\gamma}\left(t-t_{N(t)}\right)^{\gamma-1}\end{aligned} \qquad (19)$$

où nous avons ici généralisé le modèle de base pour prendre en compte le caractère autorégressif des séries observées à haute

20. Un processus de naissance (*birth process*) markovien est un processus *self-exciting* avec une mémoire m égale à zéro. Un processus homogène ayant une mémoire m égale à un est un processus de renouvellement (*renewal process*).

fréquence. En effet, cette caractéristique peut être captée par q(.), soit notre modèle ACD, et est donnée par :

$$\theta_i = \omega + \sum_{j=0}^{m} \alpha_i x_{i-j} + \sum_{j=0}^{q} \beta_j \theta_{i-j} \tag{20}$$

ce qui est très apparenté, on le reconnaîtra, à un modèle GARCH (m,q).

Donnons ici quelques précisions au sujet du modèle ACD. Celui-ci a été développé initialement par Engle et Russell (1998). Ensuite, Jasiak (1999), Gouriéroux, Jasiak et Le Fol (1999), Gouriéroux et Jasiak (2001) et Engle (2000) ont raffiné et appliqué ce modèle dans un contexte similaire. La formulation du modèle ACD se présente comme suit. Supposons que la durée $x_i = t_i - t_{i-1}$ définit l'intervalle de temps entre deux arrivées. Soit aussi l'espérance conditionnelle de la $i^{ème}$ durée :

$$E\left(x_i \middle| x_{i-1}, ..., x_1\right) = \theta\left(x_{i-1}, ..., x_1; \psi\right) \equiv \theta_i \tag{21}$$

En supposant que :

$$x_i = \theta_i e_i \tag{22}$$

où $\{e_i\}$ ~ i.i.d. avec une certaine fonction de densité $p(e;\phi)$. La fonction de hasard de base (*baseline hazard*) qui est le ratio de p_0, soit la densité de e, et de S_0, soit la fonction de survie associée, est :

$$\lambda_0(t) = \frac{p_0(t)}{S_0(t)} \tag{23}$$

C'est la définition habituelle utilisée dans la littérature pour le modèle à hasard proportionnel. Dans ce cadre, Engle et Russell (1998) définissent l'intensité conditionnelle d'un modèle ACD qui peut être écrit sous forme générale comme suit :

$$\lambda\left(t \middle| N(t), t_1, t_2, ..., t_{N(t)}\right) = \lambda_0\left(\frac{t - t_{N(t)}}{\theta_{N(t)+1}}\right)\frac{1}{\theta_{N(t)+1}} \tag{24}$$

où l'on peut constater que l'histoire influence l'intensité conditionnelle par, à la fois, un facteur multiplicatif et un changement dans la fonction de hasard de base. Ce modèle est appelé « modèle d'accélération du

temps de défaut » (*accelerated failure time*) parce que les informations passées influencent le taux auquel le temps passe. Dans le domaine médical, ce type de modèle est souvent utilisé pour capter les aptitudes qu'ont certains patients à guérir rapidement (*i.e.* passage rapide à travers l'état de maladie) que d'autres dans la même situation. En finance, la littérature sur la déformation temporelle suggère que quelquefois le temps s'écoule très rapidement sur les marchés financiers alors que, dans d'autres périodes, il passe moins vite. Dans ce cas, le taux auquel le temps s'écoule dépend des événements d'arrivée d'informations (*arrivals time*) passées et cela est capté par la fonction θ.

Dans la version la plus simple du modèle ACD, on suppose que les durées sont conditionnellement exponentielles, de sorte que la fonction de hasard de base est de 1 et l'intensité conditionnelle est :

$$\lambda\left(t \middle| x_{N(t)}, x_{N(t)-1}, ..., x_2, x_1\right) = \theta^{-1}_{N(t)+1} \tag{25}$$

Une intensité conditionnelle de mémoire m implique que seulement les m plus récentes durées influencent la durée conditionnelle, ce qui suggère une représentation possiblement autorégressive de celle-ci :

$$\theta_i = \omega + \sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_{i-j} \tag{26}$$

Clairement, la généralisation possible de ce modèle est la représentation GARCH(m,q) présentée ci-dessus et que Engle et Russell (1998) nomment ACD(m,q), où m et q réfèrent à l'ordre des retards.

Ce modèle présente l'avantage que les calculs des moments se font sans référence particulière à la fonction de hasard de base. En effet, on peut écrire le processus de durées x_i sous la forme d'un modèle ARMA(m,q) donné par :

$$x_i = w + \sum_{j=0}^{m} (\alpha_j + \beta_j) x_{i-j} - \sum_{j=0}^{q} \beta_j \varepsilon_{i-j} + \varepsilon_i \tag{27}$$

où $\varepsilon_i \equiv x_i - \theta_i$ est défini comme une différence de martingales[21], ce qui implique que son espérance est nulle. L'espérance conditionnelle de x_i, déjà calculée à l'équation (21), est θ_i et l'espérance non conditionnelle est donnée par

$$E(x_i) = \frac{w}{1 - \sum_{j=0}^{q=m} \left(\alpha_j + \beta_j\right)} = \mu \tag{28}$$

ce qui est un résultat comparable au calcul de la variance non conditionnelle d'un modèle GARCH. Ce résultat n'est valable que si toutes les racines associées à l'équation de différence sont en dehors du cercle unitaire.

Dans le cas particulier du modèle ACD(1,1)[22], donné par :

$$\theta_i = w + \alpha x_{i-1} + \beta\theta_{i-1} \tag{29}$$

pour $\alpha, \beta \geq 0$, $w > 0$, $\forall i$ $(i = 1,\ldots,N)$, sa variance conditionnelle est de θ_i^2 alors que sa variance non conditionnelle est donnée par :

$$\sigma^2 = w^2\left(\frac{1 - \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha^2}\right) \tag{30}$$

Introduisons maintenant un important corollaire dû à Lee et Hansen (1994). Celui-ci tire son importance du fait qu'il nous permet d'utiliser les mêmes logiciels et procédures d'estimation que dans les modèles GARCH typiques simplement en introduisant un terme tenant compte de la durée entre les transactions.

21. Soit $\{p_t\}$ un processus stochastique, par exemple, de prix. $\{p_t\}$ est une martingale si $E_t\left(p_{t+1}\right) = E\left(p_{t+1}\middle|p_t, p_{t-1}, \ldots\right) = p_t$. Alors, une différence de martingales est définie par $E\left(p_{t+1} - p_t\middle|p_t, p_{t-1}, \ldots\right) = 0$.
22. Est aussi appelé EACD(1,1) lorsque la distribution des erreurs est exponentielle.

Corollaire aux théorèmes[23] de Lee et Hansen (1994)[24]

Si :

a) $E_{i-1}(x_i) \equiv \theta_{0,i} = w_0 + \alpha_0 x_{i-1} + \beta_0 \theta_{0,i-1}$;

b) $e_i \equiv x_i / \theta_{0,i}$ est
(i) strictement stationnaire et ergodique[25],
(ii) non dégénérée,
(iii) a des moments conditionnels bornés,
(iv)[26] $\sup_i E\left[\ln(\beta_0 + \alpha_0 e_i) \middle| F_{i-1}\right] < 0$ a.s. ;

c) $\psi_0 \equiv (w_0, \alpha_0, \beta_0)$ est à l'intérieur de Ψ ;

d) $$L(\psi) = -\sum_{i=1}^{N(T)} \left\{ \log(\theta_i) + \frac{x_i}{\theta_i} \right\}$$

où

$\theta_i = w + \alpha x_{i-1} + \beta \theta_{i-1}$ pour $i > 1$,

$\theta_i = w / (1 - \beta)$ pour $i = 1$;

---

23. Théorème sur les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance :
Théorème 1 : sous les hypothèses du corollaire, l'estimateur du QMLE $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$;
Théorème 2 : sous les hypothèses du corollaire et si : $\alpha_0 + \beta_0$ est strictement inférieur à 1, $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

24. Voir : Engle, R.F. et J.R. Russel (1998), « Autoregressive conditional duration : A new model for irregularly spaced transaction data », *Econometrica*, vol. 66, n° 5, p. 1127-1162 ; Lee, S. et B. Hansen (1994), « Asymptotic theory for the GARCH(1,1) quasi-maximum likelihood estimator », *Econometric Theory*, vol. 10, p. 29-52.

25. Essentiellement, l'ergodicité, souvent requise après la condition de stationnarité, implique que si les événements sont suffisamment distants dans le temps, alors ils sont asymptotiquement indépendants. L'ergodicité fait donc référence à la mémoire des processus stochastiques. Comme nous le savons, la majorité de l'arsenal économétrique est basé sur la théorie asymptotique. Nous pouvons donc imaginer toute l'importance de cette condition pour l'estimation de paramètres. Pour plus de détails à ce sujet, on consultera : Greene (2003), Racicot (2003) ou White (2001).

26. Supremum, sup : plus grande borne inférieure ; Infinimum, inf : plus petite borne supérieure. F : filtration. La condition (iv) concerne les premiers moments conditionnels : ils sont bornés supérieurement (asymptotiquement *almost surely*) par 0.

alors :

A) le résultat obtenu de la maximisation de L est convergent et asymptotiquement normal avec un matrice variance-covariance donnée par les écarts types robustes de Lee et Hansen ; et

B) le modèle peut être estimé par les logiciels ayant une routine ARCH en prenant comme variable dépendante et en posant la moyenne égale à zéro.

En utilisant le corollaire de Lee et Hansen (1994), nous pouvons écrire la fonction de vraisemblance du modèle Weibull[27] qui incorpore la modélisation de la durée conditionnelle et autorégressive (ACD) :

$$\sum_{i=1}^{N(T)} \left[\ln\left(\frac{\gamma}{x_i}\right) + \gamma \ln\left(\frac{\Gamma\left(1+1/\gamma\right)x_i}{\theta_i}\right) - \left(\frac{\Gamma\left(1+1/\gamma\right)x_i}{\theta_i}\right)^{\gamma} \right] \quad (31)$$

où $\Gamma(.)$[28] est la fonction gamma[29] et elle est définie par

$$\Gamma(P) = \int_0^{\infty} t^{P-1} e^{-1} dt \quad (32)$$

27. Nous avons décidé d'estimer le modèle Weibull par principe de parcimonie. Pour augmenter le degré de généralité de ce modèle, Lancaster (1990) suggère la possibilité d'appliquer une transformation Box-Cox à notre processus de points. Il présente en effet cette généralisation du modèle de points, dont le modèle Weibull est un cas particulier, dans le cadre d'une méthode de vraisemblance marginale utilisée dans le cas d'informations limitées ou incertaines. Il mentionne aussi le fait que peu de recherches ont été effectuées dans cette avenue.

28. Les deux premières dérivées du logarithme de la fonction gamma, notées par $\Psi(P) = \Gamma' / \Gamma$ et $\Psi'(P) = (\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2) / \Gamma^2$, sont connues sous le nom de fonctions *digamma* et *trigamma*. Une autre fonction reliée à la fonction gamma est la fonction bêta. Elle est définie par $\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ pour des constantes a et b.

29. Comme on peut le constater au tableau 3 de la section résultats, la fonction gamma se calcule simplement dans le logiciel EViews en utilisant la fonction @gamma(x).

pour P, une constante positive. Elle obéit à la récursion $\Gamma(P) = (P - 1)\,\Gamma(P - 1)$ et pour un nombre entier P, on a que $\Gamma(P) = (P - 1)!$ et si $P = 0{,}5$, la fonction gamma est de : $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$. L'une des approximations utilisées dans la littérature pour effectuer le calcul de la fonction gamma est connue sous le nom d'« approximation de Sterling » et donnée par :

$$\ln \Gamma(P) \approx (P - 0,5) \ln P - P + 0,5 \ln(2\pi) + K + e(P)$$

où K est un terme de correction défini par $K = w^{-1}/12 - w^{-3}/360 - w^{-5}/1260 + w^{-7}/1680 - y$ où $w = P$ et $y = 0$ si $P > 18$ ou bien $w = P + j$ et $y = \ln [P(P + 1)(P + 2)\ldots(P + j - 1)]$ et $j = [18 -$ valeur entière de (P)], sinon.

3.3. Résultats et programme EViews

Nous avons programmé la fonction de vraisemblance représentée par l'équation (31) dans le logiciel EViews. Ce programme est présenté au tableau 3.

Deux modèles ont été estimés : modèle 0 et modèle 1. Ces modèles diffèrent par le fait qu'une variable retardée, θ_{i-1}, a été rajoutée dans le modèle 1 pour élargir la forme fonctionnelle du modèle ACD. Les modèles 0 et 1 sont donnés par :

– Modèle 0 : $\theta_i = w + \alpha x_{i-1}$

– Modèle 1 : $\theta_i = w + \alpha x_{i-1} + \beta \theta_{i-1}$

Les résultats obtenus de l'estimation des modèles 0 et 1 de la fonction de hasard Weibull ACD appliquée aux transactions à haute fréquence de l'actif d'IBM sont présentés aux tableaux 4 et 5.

On constate rapidement, à la lecture de ces tableaux, que le modèle 1 est celui qui semble le mieux représenter nos données. En effet, les critères d'ajustement AIC et SC sont respectivement égaux à 1,9871 et 1,9887 pour le modèle 1, comparativement à 2,0524 et 2,0536 pour le modèle 0, ce qui nous indique qu'effectivement le modèle 1 est à retenir car ses critères d'ajustement ont des valeurs plus faibles. On remarque également que ces modèles nous donnent des statistiques z fortement significatives, c'est-à-dire que les écarts-types sont faibles relativement aux coefficients estimés. Cela nous

TABLEAU 3

```
smpl 3 20000

' Programmé par : Francois-E. Racicot (2002/10/17)
' Programme servant à estimer le modèle Weibull autoregressif

' Modèle 0
' Note : pour le modèle 0, on utilise le fichier UHF2.wf1

logl Weibull_ACD0

' param c(1) .5 c(2) .5 c(3) .5

Weibull_ACD0.append @logl loglW
Weibull_ACD0.append P=1+(1/c(1))
Weibull_ACD0.append theta=c(2)+c(3)*duree(-1)

' Fonction de vraisemblance

Weibull_ACD0.append loglW=log(c(1)/
duree)+c(1)*log((@gamma(P)*duree)/theta)-((@gamma(P)*duree)/
theta)^c(1)

' Maximum de vraisemblance (ml)

Weibull_ACD0.ml(b,d)

' Modèle 1
' Note : pour le modèle 1, on utilise le fichier uhf1.wf1

equation ACD1.arch(c,h) sqr(duree)
acd.makegarch theta

logl Weibull_ACD1
' param c(1) .5 c(2) .5 c(3) .5 c(4) .5
Weibull_ACD1.append @logl loglW1
Weibull_ACD1.append P=1+(1/c(1))
Weibull_ACD1.append theta=c(2)+c(3)*duree(-1)+c(4)*theta(-1)

' Fonction de vraisemblance

' Weibull_ACD1.append loglW1=log(c(1)/
duree)+c(1)*log((@gamma(P)*duree)/theta)-((@gamma(P)*duree)/
theta)^c(1)

' Maximum de vraisemblance (ml)

Weibull_ACD1.ml(b,d)
```

TABLEAU 4 **Résultats de l'estimation par maximum de vraisemblance du modèle 0**

	Paramètres	Écarts-types	Statistiques z	p-value
λ	0,8671	0,0051	168,47	0,0000
W	0,8981	0,0102	88,33	0,0000
α	0,1478	0,0089	16,56	0,0000
AIC	2,0524			
SC	2,0536			
Nb d'obs.	19998			

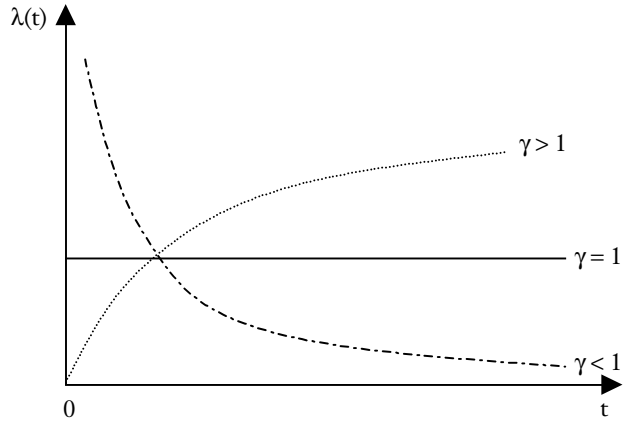
TABLEAU 5 **Résultats de l'estimation par maximum de vraisemblance du modèle 1**

	Paramètres	Écarts-types	Statistiques z	p-value
λ	0,8983	0,0054	167,17	0,0000
W	0,0102	0,0013	7,68	0,0000
α	0,0635	0,0030	21,31	0,0000
β	0,9278	0,0035	266,53	0,0000
AIC	1,9871			
SC	1,9887			
Nb d'obs.	19998			

conforte sur la validité du modèle Weibull pour ce type de données transitionnelles. À ce sujet, on se rappellera les résultats beaucoup moins encourageants obtenus pour ce modèle dans l'application économique présentée dans la section précédente.

L'équation (16) nous indique que l'interprétation des résultats obtenus de l'estimation du modèle Weibull peut se faire de façon similaire à celle de l'application économique de la section précédente. En effet, nous avons expliqué, rappelons-le ici, que si le paramètre γ (p dans l'application économique) prend une valeur inférieure à 1 ou supérieure 1, alors la fonction de hasard connaît, respectivement, une décroissance ou une croissance monotone. Mais si le paramètre en

FIGURE 2 **Fonction de hasard Weibull**



question prend une valeur égale à 1, alors la fonction de hasard a une pente nulle, c'est-à-dire qu'elle devient invariante face au temps, et est alors de forme exponentielle. La figure 2 donne une représentation schématique des différentes formes que la fonction de hasard Weibull peut prendre.

Nous avons trouvé que la valeur estimée du paramètre γ est inférieure à 1 et cela pour les deux modèles testés. À la lumière de la figure 2, on peut interpréter ce résultat comme suit. Plus le temps s'écoule lors de la dernière transaction, plus la probabilité de transaction est faible pour l'instant suivant. En d'autres termes, si plusieurs transactions se succèdent en peu de temps, alors la probabilité de transaction est forte pour l'instant suivant. Mais si le temps qui les sépare augmente, alors la probabilité de transaction pour l'instant suivant diminue. Donc, le résultat que nous avons trouvé semble refléter la réalité. Les présents modèles diffèrent également de l'application économique du fait que nous avons modélisé le temps, c'est-à-dire la durée entre les transactions. Nous avons des modèles ACD et ils s'avèrent tous les deux fortement significatifs avec pour paramètres et statistiques, respectivement, pour les modèles 0 et 1 : $w = 0{,}8671$ (88,33) ; $\alpha = 0{,}1478$ (16,56) ; $w = 0{,}0102$ (7,68) ; $\alpha = 0{,}0635$ (21,31) et $\beta = 0{,}9278$ (266,53). On remarque le niveau élevé de signification du paramètre β, ce qui justifie aussi le fait que les critères d'ajustement AIC et SC soient, pour ce modèle, inférieurs au modèle 0.

4. CONCLUSION

Nous avons appliqué le modèle de hasard Weibull à des données socioéconomiques de type transitionnel dans le but initial de tester cette forme fonctionnelle, les données économiques étant beaucoup moins contaminées que les données transitionnelles financières. Le modèle Weibull est rejeté pour ce type particulier de données mais, même dans ce cas, l'interprétation des variables explicatives est satisfaisante en ce sens qu'elle respecte nos a priori sur le sujet. Un point particulier à noter concernant le rejet du modèle Weibull est que non seulement le modèle est rejeté mais il l'est beaucoup trop fortement. La raison est que le test de moments à la Tauchen-Newey n'a pas été généralisé pour le cas où il y a présence de censure dans les observations. Nous sommes justement en présence de censure et cela pourrait fortement biaiser ce test. Une contribution de ce chapitre est d'avoir découvert ce fait empirique. Une avenue future de recherche dans ce domaine serait de corriger le test en utilisant les méthodes de simulation afin de calculer les valeurs probables des moments théoriques requis dans la construction du test.

Nous avons également généralisé notre application du modèle de hasard Weibull aux données financières observées à haute fréquence. Cette généralisation passe par le fait que ces données sont empreintes du phénomène dit de déformation temporelle. Cette application particulière aux transactions boursières d'IBM nous donne des résultats plus que satisfaisants pour les deux modèles utilisés mais nous ne retenons que le modèle le moins parcimonieux. Une avenue possible de recherche au niveau des formes fonctionnelles du genre est la possibilité de généraliser la forme fonctionnelle que avons utilisée pour l'inclusion d'un terme issu des réseaux neuronaux. Ce terme pourrait aider notre modèle à capter, si elles sont présentes, les non-linéarités résiduelles qui ne sont pas prises en compte par notre modèle actuel. Donaldson et Kamstra (1997) adoptent une approche analogue mais sans toutefois appliquer celle-ci dans un contexte où l'objet de la recherche est le calcul d'une probabilité de transition d'un état à l'autre. Ils l'ont plutôt transposée à l'amélioration de l'ajustement de modèles standards de volatilité conditionnelle. Une possibilité d'extension du modèle Weibull suggérée par Lancaster (1990) et valable pour nos deux applications serait d'appliquer une transformation Box-Cox à celui-ci afin d'obtenir une

forme fonctionnelle beaucoup plus polyvalente. En effet, cette transformation a la capacité de couvrir toute une panoplie de modèles : linéaire, logarithmique et non linéaire. Comme Lancaster le mentionne – et notre recherche de la littérature abonde dans le même sens –, cette possibilité n'a pas été investiguée dans la littérature empirique économique ou financière.

ANNEXE 14.1

Programme Fortran et GQOPT

```
      program hazard
      implicit double precision (a-h,o-z)
      character*8 alabel
      dimension beta(20),alabel(20)
      dimension x(770,11)
      common/bstack/aint(19999)
      common/bstak/nq,ntop
      common/bnobs/nobs
      common/btrat/itrflg
      common/xdata/depvar(770),age25(770),age35(770),age45(770),
     *a45plus(770),x3(770),x4(770),x5(770),c1(770),c2(770),c3(770),
     *prov1(770),prov2(770),prov3(770),prov4(770),eds(770),
     *edt(770),edu(770),ndosr
      external trn
      external dfp

      open(unit=10,status='old',file='racicot.raw')
      open(unit=8,status='new',file='res.new')

      call dflt
      nbrdos=770
      np=18
      nq=np*np+8*np+np*np
      nobs=0
      itrflg=1
      max=1
      iterl=500
      acc=1.d-15
      alabel(1)='cte'
      alabel(2)='age25'
      alabel(3)='age35'
      alabel(4)='age45'
      alabel(5)='a45plus'
      alabel(6)='x3'
      alabel(7)='x4'
      alabel(8)='c1'
      alabel(9)='c2'
      alabel(10)='c3'
      alabel(11)='atlan'
      alabel(12)='que'
      alabel(13)='ont'
      alabel(14)='ouest'
      alabel(15)='eds'
      alabel(16)='edt'
      alabel(17)='edu'
      alabel(18)='sigma'

c     Initialiser les paramètres

      beta(1)=0.00000d0
      beta(2)=0.00000d0
      beta(3)=0.00000d0
      beta(4)=0.00000d0
      beta(5)=0.00000d0
      beta(6)=0.00000d0
      beta(7)=0.00000d0
      beta(8)=0.00000d0
      beta(9)=0.00000d0
```

```
      beta(10)=0.00000d0
      beta(11)=0.00000d0
      beta(12)=0.00000d0
      beta(13)=0.00000d0
      beta(14)=0.00000d0
      beta(15)=0.00000d0
      beta(16)=0.00000d0
      beta(17)=0.00000d0
      beta(18)=0.90000d0

c       Lecture des données

      i=1
       do 5 k=1,nbrdos
      read(10,*,end=111) (x(k,j),j=1,11)

c       Création des variables dummy

      depvar(i)=x(k,1)
      if(x(k,2).lt.25) then
         age25(i)=1
       else
         age25(i)=0
       endif
      if(x(k,2).ge.25.and.x(k,2).lt.35) then
          age35(i)=1
       else
          age35(i)=0
       endif
      if(x(k,2).ge.35.and.x(k,2).lt.45) then
          age45(i)=1
        else
          age45(i)=0
       endif
      if(x(k,2).ge.45) then
          a45plus(i)=1
        else
          a45plus(i)=0
        endif
      x3(i)=x(k,3)
      x4(i)=x(k,4)
      x5(i)=x(k,5)
      c1(i)=x(k,6)
      c2(i)=x(k,7)
       if(x(k,6).eq.0.and.x(k,7).eq.0) then
          c3(i)=1
        else
          c3(i)=0
       endif
      if(x(k,8).lt.14) then
          prov1(i)=1
        else
          prov1(i)=0
        endif
      if(x(k,8).eq.24) then
          prov2(i)=1
        else
          prov2(i)=0
        endif
      if(x(k,8).eq.35) then
          prov3(i)=1
       else
        prov3(i)=0
      endif
```

```
      if(x(k,8).gt.35) then
        prov4(i)=1
       else
        prov4(i)=0
       endif
      eds(i)=x(k,9)
      edt(i)=x(k,10)
      edu(i)=x(k,11)
c      write(8,13) (x(k,j),j=1,11)
c      write(10,14) prov1(i),prov2(i),prov3(i),prov4(i)
c   14 format(4(2x,f3.1))
c     depv1,mina1,x31,x41,x51,c11,c21,nprov,eds1,edt1,edu1
c   13 format(11(2x,f4.1))

c    Calcul de la prédiction

      xb1=age25(i)*.642256 + age35(i)*.633539 - age45(i)*.264335 -
     *    a45plus(i)*1.06602 + x3(i)*.149854 + x4(i)*.092452 +
     *    c1(i)*.147393 - c2(i)*.451288 - c3(i)*.085469-prov1(i)*.060507 +
     *    prov2(i)*.030278 + prov3(i)*.092711 - prov4(i)*.117137 -
     *    eds(i)*.044371 - edt(i)*.065831 + edu(i)*.149448

c    Calcul des résidus généralisés

    dxb1=dexp(-xb1)*depvar(i)
      p=1/.776460
      ei2=ei2+((dxb1**p)**2)
      ei1=ei1+dlog(dxb1**p)
      esp=esp+dexp(p*xb1)
      i=i+1
    5 continue
  111 continue
      ndosr=i-1
      write(8,56) ei2,ei2/ndosr,ei1,ei1/ndosr,esp/ndosr
   56  format(2x,5(f10.3))

c    Appel de la routine GQOPT

      call opt(beta,np,f,dfp,iterl,max,ier,acc,trn,alabel)
      call optout(3)
c      do 60 i=1,np
c      write(12,118) alabel(i),beta(i)
c  118 format(1x,a10,'=   ',f13.8)
c   60 continue
      stop
      end
      subroutine trn(beta,np,f,*)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension beta(np)
      common/xdata/depvar(770),age25(770),age35(770),age45(770),
     *a45plus(770),x3(770),x4(770),x5(770),c1(770),c2(770),c3(770),
     *prov1(770),prov2(770),prov3(770),prov4(770),eds(770),edt(770),
     *edu(770),ndosr
      f=0.d0
      do 17 i=1,763
c      y0=0.do
c      y1=0.do
c      if(depvar(i).le.2.0) y0
c      pr0=0.d0
c      pr1=0.d0
c       pic=0.d0
c       pir=0.d0
      xb=beta(2)*age25(i)+beta(3)*age35(i)+beta(4)*age45(i)+
     *   beta(5)*a45plus(i)+beta(6)*x3(i)+beta(7)*x4(i)+
```

```
     *   beta(8)*c1(i)+beta(9)*c2(i)+ beta(10)*prov1(i) +
     *   beta(11)*c3(i)+
     *   beta(12)*prov2(i)+beta(13)*prov3(i)+
     *   beta(14)*prov4(i)+beta(15)*eds(i)+beta(16)*edt(i)+
     *   beta(17)*edu(i)
      if(xb.gt.174.0d0) xb=174.0d0
      if(xb.lt.-180.0d0) xb=-180.0d0
c      vd1=dexp(xb)
c      vds=1.d0+vd1
c      pic=vd1/vds
c      pir=1.d0-pic
c      if(pir.le.1.d-30) pir=1.d-30
c      if(pic.le.1.d-30) pic=1.d-30
c      f=f+x5(i)*dlog(pic)+(1-x5(i))*dlog(pir)
c      probit
c      pr1=cum(xb)


c      ei=0.d0
      ewi=0.d0
      delta=x5(i)
      depv=dlog(depvar(i))
      sigma=beta(18)
      wi=(depv/sigma)-(xb/sigma)
      ewi=dexp(wi)

c    Fonction de vraisemblance du modèle de hasard Weibull

      f=f+((delta*(wi-dlog(sigma)))-ewi)
   17 continue
      return
      end
```

BIBLIOGRAPHIE

COX, D.R. (1972b), « The Statistical Analysis of Dependencies in Point Processes », dans P.A.W. Lewis (dir.), *Symposium on Point Processes*, New York, Wiley, p. 55-66.

ENGLE, R.F. et J.R. RUSSELL (1998), « Autoregressive Conditional Duration : A new model for irregularly spaced transaction data », *Econometrica*, vol. 66, p. 1127-1162.

ENGLE, R.F. (2000), « The econometrics of ultra-high-frequency data », *Econometrica*, vol. 68, p. 1-22.

GRAVER, D.P. et P.A.W. LEWIS (1980), « First order autoregressive gamma sequences and point processes », *Advances in Applied Probability*, vol. 12, p. 727-745.

GREENE, W.H. (2003), *Econometric Analysis*, New York, Prentice-Hall.

HAWKES, A.G. (1971a), « Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes », *Biometrika*, vol. 58, p. 83-90.

HAWKES, A.G. (1971b), « Point spectra of some mutually exciting point processes », *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 33, p. 438-443.

HAWKES, A.G. (1972), « Spectra of some mutually exciting point processes with associated variables », dans P.A.W. Lewis (dir.), *Stochastic Point Processes*, New York, Wiley, p. 261-271.

HECKMAN, J.J. (1981), « Heterogeneity and State Dependence », dans S. Rosen (dir.), Studies in Labor Markets, NBER, Chicago, University of Chicago Press, p. 91-139.

HECKMAN, J.J. et B.J. BORJAS (1980), « Does unemployment cause future unemployment ? Definitions, questions and answers from a continuous time model of heterogeneity and state dependence », *Economica*, vol. 47, p. 247-283.

JACOBS, P.A. et P.A.W. LEWIS (1977), « A mixed AutoRegressive-Moving Average Exponential sequence and point process EARMA(1,1) », *Advances in Applied Probability*, vol. 9, p. 87-94.

KNUT, R. et T. ZHANG (2002), « A note on the Weilbull distribution and time aggregation bias », *Applied Economics Letters*, vol. 9, p. 469-462.

KUAN, C.H. et N.J. WEBBER (1998), « Valuing interest rate derivatives consistent with a volatility smile », *Working Paper*, University of Warwick, p. 1-30.

LANCASTER, T. (1979), « Econometric methods for duration of unemployment », *Econometrica*, vol. 47, p. 939-956.

LAWRANCE, A.J. et P.A.W. LEWIS (1980), « The exponential Auto-Regressive-Moving Average EARMA(p,q) process », *Journal of the Royal Statistical Society*, B, vol. 42, p. 150-161.

RACICOT, F.-É. (2003), « Classical and advanced nonlinear models in empirical finance », chap.1, thèse de doctorat : *Trois essais sur l'analyse des données économiques et financières*, miméo., Université du Québec à Montréal.

RACICOT, F.-É. (2003), « Les modèles de durée classiques et modernes avec applications aux données économiques et financières », chap. 2, thèse de doctorat : *Trois essais sur l'analyse des données économiques et financières*, miméo., Université du Québec à Montréal.

RUBIN, I. (1972), « Regular point processes and thier detection », *IEEE Transaction on Information Theory*, ITT-18, p. 547-557.

SNYDER, D.L. et M.I. MILLER (1991), *Random Point Processes in Time and Space*, 2e édition, New York, Springer-Verlag.

YANG, Z., S.P. SEE et M. XIE (2002), « An investigation of transformation-based prediction interval for the Weibull median life », *Metrika*, vol. 56, p. 19-29.

WHITE, H. (2001), *Asymptotic Theory for Econometrician*, New York, Academic Press.

JAMES, J. et N. WEBBER (2000), *Interest Rate Modelling*, New York, Wiley.

WOLD, H. (1948), « On stationary point processes and Markov chains », *Skandinavisk Aktuarietidskrist*, vol. 31, p. 229-240.

CHAPITRE

15

LE TRAITEMENT ÉCONOMÉTRIQUE DES ERREURS SUR LES VARIABLES PAR LES VARIABLES INSTRUMENTALES

PROGRAMMES GAUSS ET EVIEWS

La plupart des données utilisées dans les études économiques et financières empiriques contiennent des erreurs de mesure. Ces erreurs sont relativement plus importantes dans les données macroéconomiques (Morgenstern, 1972 ; Langanskens et Van Rickeghem, 1974), mais elles sont aussi présentes dans la plupart des études microéconomiques. Comme l'a souligné Morgenstern (1972), ce phénomène n'a jamais été pris sérieusement en considération dans le développement des techniques économétriques. Bien que dans les applications, les auteurs avertissent généralement les lecteurs que la présence possible d'erreurs de mesure peut biaiser les résultats et même conduire à la non-convergence de l'estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO), aucun effort particulier n'est entrepris pour atténuer ces biais et aucun test sur la présence de ces erreurs, en l'occurrence le test bien connu d'Hausman (1978), n'est effectué. L'attitude de la plupart des chercheurs empiriques est probablement, dans bon nombre de cas, due au fait qu'il n'est pas toujours facile de vérifier si les variables instrumentales disponibles utilisées pour obtenir des estimateurs sans biais satisfont aux conditions requises pour justifier leur utilisation. Dans d'autres cas, les instruments ne sont tout simplement pas accessibles aux chercheurs.

Ce chapitre vise à donner un nouvel éclairage au phénomène des erreurs de mesure. Il se subdivise en quatre grandes parties. D'abord, de nouveaux estimateurs pour traiter les erreurs de mesure sont présentés. Ensuite, un test sur la performance de ces estimateurs

est exposé. Sont également effectuées des simulations Monte Carlo mesurant la performance relative de ces nouveaux estimateurs en regard de l'estimateur des MCO. Finalement, nous présentons une application financière du problème des erreurs de mesure. Nous généralisons l'application et la définition de celles-ci dans le cadre des séries temporelles et montrons comment estimer les paramètres du modèle de marché. Nous proposons en effet une nouvelle spécification pour celui-ci et comparons les résultats de son estimation par notre nouvelle méthode d'estimation à ceux obtenues par les MCO. Nous comparons également les résultats du calcul du coût moyen du capital (WACC) en utilisant ces deux méthodes.

1. Conséquences des erreurs sur les variables

Les causes des erreurs sur les variables sont trop connues pour que l'on s'y attarde démesurément. Mentionnons cependant qu'il existe trois sources possibles de statistiques erronées : *i*) l'observateur, en faisant un choix du phénomène à observer et de sa mesure, introduit *ipso facto* un biais qu'il est impossible d'éviter, car un phénomène complexe ne peut jamais être décrit de façon exhaustive. Ce biais est commun à toutes les sciences et ne retient pas notre attention ; *ii*) l'observateur peut dissimuler de l'information pour satisfaire à ses hypothèses ou à des fins politiques ; *iii*) les répondants peuvent mentir à l'enquêteur ou ne pas savoir la réponse exacte. Ce sera le cas, par exemple, de la richesse personnelle, où l'individu ne connaît pas exactement la valeur marchande de ses biens matériels mais ne dispose que d'une approximation de cette valeur. Par ailleurs, il est fréquent que les variables que l'on utilise pour expliquer un phénomène ne soient pas observables ou bien qu'elles soient observées de façon erronée. À titre d'exemple, dans le modèle de Cagan (1956) sur les attentes adaptatives, les quantités offertes peuvent dépendre de variables non observables tel le prix anticipé, les anticipations étant révisées en fonction de l'erreur associée au niveau antérieur des anticipations.

Il convient maintenant de s'attarder aux conséquences des erreurs sur les variables. Le terme d'erreur est souvent représenté par une constante à laquelle s'ajoute un terme aléatoire. L'espérance mathématique de ce terme d'erreur n'est donc pas nulle. Si on utilise

un modèle de régression, le terme constant de l'erreur incorporé dans la variable explicative causera un biais systématique qui n'affectera que l'estimation de la constante de la régression. Comme cette estimation est souvent de moindre intérêt, on ne s'intéressera ici qu'à la partie aléatoire de l'erreur, qu'on supposera de moyenne nulle. L'exemple suivant illustre ce problème.

Soit :

$$Y = \alpha + \tilde{X}\beta + e \tag{1}$$

où

$X = \tilde{X} + w$ et $w = E(w) + w - E(w)$, $E(w) = c$, $v = w - E(w)$ et $w = c + v$, où c est la partie constante de l'erreur (w) et v, la partie aléatoire. En faisant les substitutions appropriées, on obtient :

$$\begin{aligned} Y &= \alpha + X\beta + e - w\beta \\ &= \alpha + X\beta + e - c\beta - v\beta \\ &= \alpha - c\beta + X\beta + e - v\beta \end{aligned} \tag{2}$$

Certes, $c\beta$ est la partie qui biaise cette estimation (ce que l'on obtient est une estimation de $\alpha - c\beta$). Mais beaucoup plus intéressante est l'estimation du paramètre β. On suppose que $X = \tilde{X} + v$ et $E(v) = 0$[1].

Un premier résultat ayant trait aux conséquences des erreurs de mesure est le suivant. S'il y a présence d'erreurs de mesure aléatoires sur les variables dépendantes, ces erreurs se combineront à l'erreur de la régression sans créer de biais d'estimation. Mais dans le cas où les variables explicatives sont affectées d'erreurs de mesure, les conséquences sont alors tout autres.

Un modèle de régression linéaire univarié sans terme constant illustre bien ce problème[2]. Soit :

$$Y = \tilde{X}\beta + e \tag{3}$$

1. Les problèmes de corrélation entre les erreurs d'observation ne sont pas considérés. On se contentera de traiter le problème plus simple des erreurs de mesure qui ne sont pas autocorrélées.
2. Pour le cas multivarié, voir l'annexe 15.1.

Dans cette équation, Y est un vecteur de variables dépendantes de dimension $N \times 1$ et $\tilde{X}$, un vecteur de variables explicatives de dimension $N \times 1$ avec $E(\tilde{X}_i^2) = \sigma_{\tilde{X}}^2$. e est un vecteur d'erreurs de dimension $N \times 1$ avec $E(e) = 0$ et $E(ee') = \sigma_e^2 I$, $E(e_i^2) = \sigma_e^2$. Enfin β est un paramètre à estimer. On suppose que les vraies variables $\tilde{X}$ ne sont pas observables. On observe plutôt :

$$X = \tilde{X} + v \tag{4}$$

où v est un vecteur d'erreurs de mesure avec $E(v) = 0$ et $E(v_i^2) = \sigma_v^2$. On suppose aussi que : $E(ve') = E(\tilde{X}v') = E(\tilde{X}e') = 0$. En remplaçant $\tilde{X}$ par $X - v$ dans l'équation de base, on obtient :

$$\begin{aligned} Y &= X\beta - \beta v + e \\ &= X\beta + e^* \end{aligned} \tag{5}$$

où $e^* = e - \beta v$. Si on applique les MCO sur la dernière équation, on a :

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'e^*$$

L'estimateur qui en résulte est non convergent puisque :

$$p\lim(\hat{\beta}) = \beta + p\lim(X'X / N)^{-1} p\lim(X'e^* / N) \tag{6}$$

En utilisant les théorèmes sur le calcul de la limite en probabilité (plim) apparaissant à l'annexe 15.2, on a, sous les hypothèses appropriées :

$$p\lim(X'X / N) = E_{N\to\infty}(X'X / N)$$

et

$$p\lim(X'e^* / N) = E_{N\to\infty}(X'e^* / N)$$

On développe ces deux expressions comme suit :

$$\begin{aligned} E_{N\to\infty}(X'X / N) &= E_{N\to\infty}[\textstyle\sum_{i=1}^{N}(\tilde{X}_i + v_i)(\tilde{X}_i + v_i)] / N \\ &= E_{N\to\infty}[\textstyle\sum_{i=1}^{N}(\tilde{X}_i^2 + 2\tilde{X}_i v_i + v_i^2)] / N \\ &= \sigma_{\tilde{X}}^2 + \sigma_v^2 \end{aligned}$$

$$E_{N\to\infty}(X'e^* / N) = E_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}(\tilde{X}_i + v_i)(e_i - \beta v_i) / N\right] = -\beta\sigma_v^2$$

et, par conséquent,

$$p\lim\left(\hat{\beta}\right) = \beta - \beta\frac{\sigma_v^2}{\sigma_{\tilde{x}}^2 + \sigma_v^2} = \frac{\beta}{1+\lambda} \tag{7}$$

où :

$$\lambda = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_{\tilde{x}}^2} \tag{8}$$

On peut conclure que les MCO sont asymptotiquement biaisés et non convergents et que le biais dépend de λ, soit de l'importance relative de la variance des erreurs de mesure sur les variables explicatives. En effet, λ est défini comme le ratio de la variance des erreurs de mesure à la variance des variables explicatives non observées ($\tilde{X}$). λ peut être vu aussi comme l'importance relative des erreurs de mesure dans les variables explicatives.

Le second résultat ayant trait aux conséquences des erreurs de mesure est associé à la fonction de vraisemblance. Quel est en effet l'impact des erreurs de mesure dans les variables explicatives sur les estimateurs du maximum de vraisemblance ? Pour répondre à cette interrogation, reconsidérons le modèle de régression linéaire univarié présenté plus haut et supposons que e et v sont normalement et indépendamment distribués (i.i.d.), soit :

$$\begin{aligned} E(e) = E(v) = 0, E(ev') = 0 \\ E(ee') = \sigma_e^2 I, E(e_i^2) = \sigma_v^2 \\ E(vv') = \sigma_v^2 I, E(v_i^2) = \sigma_v^2 \end{aligned}$$

Le paramètre β ne peut pas être estimé de façon convergente par le maximum de vraisemblance, car il y a carence d'information pour identifier le paramètre. Le problème de pénurie d'information peut être détecté lorsqu'on applique la méthode du maximum de vraisemblance. La fonction de densité conjointe de e et v est :

$$f(e, v) = (2\pi\sigma_e^2)^{-N/2}\exp[-(e'e) / 2\sigma_e^2] \times (2\pi\sigma_v^2)^{-N/2}\exp[-(v'v) / 2\sigma_v^2] \tag{9}$$

et, à l'aide du Jacobien, on trouve la fonction de vraisemblance de Y et X soit :

$$\begin{aligned} L(Y, X; \beta, \sigma_e^2, \sigma_v^2, \tilde{X}) = {} & (2\pi\sigma_e^2)^{-N/2}(2\pi\sigma_v^2)^{-N/2} \\ & \exp[-((Y - X\beta)'(Y - X\beta)) / 2\sigma_e^2] \\ & \exp[-((X - \tilde{X})'(X - \tilde{X})) / 2\sigma_v^2] \end{aligned} \tag{10}$$

Le logarithme de cette fonction est égal à :

$$\begin{aligned}\ln\ L(Y, X; \beta, \sigma_e^2, \sigma_v^2, \tilde{X}) = &- N(\ln 2\pi) - N / 2(\ln \sigma_e^2 + \ln \sigma_v^2 \\ &- (X - \tilde{X})'(X - \tilde{X}) / 2\sigma_v^2 - ... \\ &- (Y - \tilde{X}\beta)'(Y - \tilde{X}\beta) / 2\sigma_e^2 \qquad (11)\end{aligned}$$

Si l'on dérive L par rapport aux paramètres recherchés, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial L / \partial \beta = 0 &\Rightarrow \tilde{X}^{*\prime}(Y - \tilde{X}^*\beta^*) = 0 \\ \partial L / \partial \sigma_v^2 = 0 &\Rightarrow (X - \tilde{X}^*)'(X - \tilde{X}^*) = N\sigma_v^2 \\ \partial L / \partial \sigma_e^2 = 0 &\Rightarrow (Y - \tilde{X}^*\beta^*)'(Y - \tilde{X}^*) = N\sigma_e^{2*} \\ \partial L / \partial \tilde{x} = 0 &\Rightarrow (X - \tilde{X}^*)\sigma_e^{2*} + \beta^*(Y - \tilde{X}^*\beta^*)\sigma_v^{2*} = 0\end{aligned}$$

et si l'on résout le système d'équations, on a :

$$\sigma_v^{2*} = \beta^{2*}\sigma_e^{2*} \qquad (12)$$

ce qui n'est pas un résultat satisfaisant (voir l'annexe 15.1). L'incapacité de la méthode du maximum de vraisemblance de fournir une seule estimation est le résultat d'un manque d'information. Le système est sous-identifié (Judge *et al.*, 1985).

2. LES ESTIMATEURS

2.1. Les estimateurs usuels

Pour obtenir des estimateurs convergents en présence d'erreurs de mesure au chapitre des variables explicatives, une méthode préconisée par la plupart des économètres est celle des variables instrumentales. Cette méthode usuelle pour générer des estimateurs convergents en présence d'erreurs de mesure consiste à trouver une matrice d'instruments pour éliminer le problème de corrélation entre la matrice des variables explicatives et les erreurs de régression. Il est cependant très difficile de trouver une telle matrice.

Si l'on reprend le modèle de régression linéaire présenté au chapitre précédent avec les mêmes hypothèses, soit :

$$Y = X\beta + e \qquad (13)$$

et que l'on suppose en premier lieu qu'il n'y a pas d'erreur sur les variables explicatives, alors en appliquant les MCO sur cette équation, on trouve :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) \tag{14}$$

et si l'on substitue Y par sa valeur :

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'e \tag{15}$$

Pour montrer que $\hat{\beta}$ est convergent, on calcule le $p\lim(\hat{\beta})$:

$$p\lim \hat{\beta} = \beta + (p\lim(X'X / N))^{-1} p\lim(X'e / N) = \beta + Q^{-1} \times 0 \tag{16}$$

où $p\lim(X'X / N) = \lim_{N\to\infty}(X'X / N) = Q$, une matrice non singulière, une hypothèse bien connue du modèle classique linéaire général, et $p\lim(X'e / N) = \lim_{N\to\infty} E(X'e / N)$ où $E(X'e) = 0$ car X n'est pas stochastique et $E(e) = 0$, une autre hypothèse du modèle classique. Le fait que $E(X'e) = 0$ nous indique que les vecteurs de X et de e sont orthogonaux. Mais dans le cas où $p\lim(X'e / N) \neq 0$ (absence d'orthogonalité entre X et e), les MCO deviennent automatiquement non convergents. La méthode des variables instrumentales consiste donc à trouver une matrice, par exemple W, telle que $p\lim(W'e / N) = 0$.

L'estimateur des MCO devient, si l'on remplace la matrice X par W :

$$\hat{\beta} = (W'X)^{-1} W'Y \tag{17}$$

où $p\lim \hat{\beta} = \beta$. La matrice W est formée de variables fortement corrélées avec celles de X mais non pas avec e. En pratique, il est très difficile de trouver une matrice, comme la matrice W, qui possède toutes les caractéristiques voulues.

Une alternative à l'approche des variables instrumentales, mais qui n'a reçu que très peu d'attention dans la littérature, est discutée en particulier par Pal (1980). Il présente, pour un modèle de régression qui ne contient qu'une seule variable explicative, six estimateurs basés sur les moments du troisième ordre des observations. Ces estimateurs ont, sous des hypothèses très raisonnables, la propriété d'être convergents même s'il y a présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives. Il mentionne que l'un de ces estimateurs

a été suggéré par Durbin (1954), un autre par Drion (1951) et un troisième par Geary (1942). L'un des estimateurs qui retient notre attention est celui de Durbin (β_d), qui a la propriété d'être aussi sans biais lorsqu'il n'y a pas d'erreurs sur les variables explicatives, ce qui n'est pas le cas pour les autres estimateurs mentionnés par Pal. Il fait allusion au fait que l'estimateur de Durbin peut être facilement généralisé au cas où le modèle contiendrait plus d'un régresseur.

Il existe aussi d'autres estimateurs convergents, même en présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives, basés sur des moments échantillonnaux d'ordre plus élevé. Pour le cas où un modèle de régression aurait seulement une variable explicative, des estimateurs basés sur les quatrièmes moments ont été proposés par Geary (1942) et Pal (1980). L'un de ces estimateurs sera également considéré, car il demeure sans biais dans le cas où il n'y a pas d'erreurs du côté des variables indépendantes. Cet estimateur, de même que β_d, sera généralisé au cas où il y a plus d'une variable explicative et sera identifié par β_p.

β_d et β_p dans leur forme univariée (forme initiale) sont tels que :

$$\beta_d = \frac{\sum x_i^2 y_i}{\sum x_i^3}$$

$$\beta_p = \frac{\sum x_i^3 y_i - 3(\sum x_i^2 / N) \sum x_i y_i}{\sum x_i^4 - 3(\sum x_i^2 / N) \sum x_i^2} \qquad (18)$$

On peut facilement démontrer que, si les erreurs de mesure sont indépendantes et suivent une loi normale, $\operatorname{p\,lim} \beta_d = \beta$, $\operatorname{p\,lim} \beta_p = \beta$. Le modèle de régression univarié sous-jacent s'écrit :

$$Y = \alpha + \tilde{X}\beta + u \qquad (19)$$

$X = \tilde{X} + v$, $v \sim N(0, \sigma_v^2 I)$, $E(u) = 0$, $V(u) = \sigma_u^2 I$, $V(u_i) = \sigma_u^2$ et les variables x et y, telles qu'exprimées plus haut, sont en déviation de la moyenne. Les particularités de β_p sont les termes de correction $3(\sum x_i^2 / N) \sum x_i y_i$ du numérateur et de $3(\sum x_i^2 / N) \sum x_i^2$ du dénominateur, introduits pour tenir compte du fait que les erreurs sont normalement distribuées.

Sous l'hypothèse H0 (absence d'erreur de mesure sur les variables explicatives), β_d et β_p sont sans biais. Mais ces estimateurs sont beaucoup plus erratiques que les estimateurs des MCO correspondants (voir

Kendall et Stuart, 1963 ; Malinvauld, 1978). Ceci explique probablement le fait que ces estimateurs ne soient plus utilisés dans les applications actuelles.

De nouveaux estimateurs sont maintenant répertoriés (Dagenais, 1991 et 1997) basés sur les moments échantillonnaux d'ordre supérieur à deux, qu'on appellera β_H et β_E, β_E étant une extension de β_H. β_H est une combinaison linéaire matricielle pondérée de la version généralisée de β_d et β_p (Dagenais, 1991 et 1997). Cet estimateur, en plus d'être sans biais sous H0 et convergent sous l'alternative H1 (voir l'annexe 15.2 pour une démonstration), a la qualité d'être beaucoup moins erratique que β_d ou β_p pris séparément. Comme il a été mentionné par Pal (1980), tous ces estimateurs peuvent être considérés comme des types spéciaux d'estimateurs à variables instrumentales, où les instruments contiennent les variables explicatives élevées à des puissances particulières. Ces estimateurs participent de la nature des estimateurs de la méthode des moments généralisés (GMM) dont la popularité ne cesse de grandir depuis que Hansen les a introduits en 1982.

Le test de l'hypothèse H0 peut être fait avec l'estimateur β_H. Mais il est à noter que le même test peut être effectué de deux autres façons. L'une d'elles est analogue au test proposé par Hausman (1978). L'autre se fonde sur la propriété d'indépendance entre les erreurs de la régression et les régresseurs, sous H0. Le test en question est exact dans les petits échantillons, car sous H0 l'estimateur β_H est sans biais (la distribution exacte de la statistique est dérivable). Il apparaît, d'après les expériences effectuées, que le test proposé peut être utile pour détecter la présence d'erreurs dans les variables explicatives dans les grands échantillons, même si ces erreurs sont petites et que le coefficient de corrélation multiple est faible. Le test peut aussi faire montre de puissance dans les petits échantillons quand le coefficient de corrélation multiple est élevé et les erreurs de mesure, importantes. Dans le cas où l'on suspecte fortement la présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives, il est possible d'utiliser la version étendue de β_H, soit β_E, qui est aussi convergente et asymptotiquement plus efficace quand H1 est acceptée.

2.2. L'estimateur β_H

Soit le modèle de régression suivant :

$$Y = \alpha i + \tilde{X}\beta + u \tag{20}$$

où $\tilde{X}$ est une matrice de dimension $N \times K$ de variables non aléatoires. Cette matrice est celle des variables explicatives mesurées sans erreur et on suppose que $\lim_{N\to\infty} \frac{\tilde{X}'\tilde{X}}{N} = Q$ où Q est finie et non singulière. Le vecteur u est un vecteur d'erreurs résiduelles normalement distribuées, de dimension $N \times 1$ avec $E(u) = 0$, $E(uu') = \sigma_u^2 I_N$. Y est un vecteur d'observations sur la variable dépendante de dimension $N \times 1$. Enfin, β est un vecteur de paramètres à estimer de dimension $K \times 1$, α est la constante à estimer et i est un vecteur unité de dimension $N \times 1$. $var(u) = \sigma_u^2 I_N$ implique que les erreurs de la régression ne sont pas corrélées entre elles et que la variance est homoscédastique.

On suppose que $\tilde{X}$ est non observable et que la matrice X est observée à la place, soit :

$$X = \tilde{X} + v \tag{21}$$

où v est une matrice d'erreurs de mesure (normalement distribuées) sur les variables explicatives, de dimension $N \times K$.

On suppose aussi que $var[vech(v)] = \Sigma \otimes I_N$ où var[.] signifie : matrice de covariances et Σ est une matrice symétrique, semi-définie positive. Soit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & . & . & \sigma_{1K} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & . & \sigma_{2K} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \sigma_{K1} & . & . & \sigma_{KK} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$var\left[vech(v)\right] = \begin{pmatrix} \sigma_{11}I_N & . & . & \sigma_{1K}I_N \\ \sigma_{21}I_N & \sigma_{22}I_N & . & \sigma_{2K}I_N \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \sigma_{K1}I_N & . & . & \sigma_{KK}I_N \end{pmatrix} \tag{22}$$

Comme on peut le constater ci-dessus, les hypothèses émises sur les erreurs de mesure des variables explicatives impliquent que les erreurs sont indépendantes entre observations, soit : $\text{cov}(v_{ij}, v_{i+k,j'}) = 0$, $i = 1,\ldots,N$, $j, j' = 1,\ldots,K$, $k \neq 0$, mais qu'elles sont dépendantes entre variables pour une même observation, soit : $\text{cov}(v_i, v_j) \neq 0$, $i \neq j$. Par exemple, la matrice de covariance des erreurs de mesure de la variable X_1 est : $\sigma_{11} I_N$. Cette hypothèse implique aussi que, pour une même variable, les variances des erreurs de mesure sont homoscédastiques.

β_p n'a pas été généralisé pour le cas où il y aurait plus d'une variable explicative (la généralisation de β_d est donnée dans Pal, 1980). La version multivariée de ces estimateurs (Dagenais, 1992) qui servent à la construction de β_H et β_E, sous forme d'estimateurs à variables instrumentales, se présente comme suit :

$$\beta_D = (z_1'x)^{-1} z_1'y \text{ où } z_1 = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & . & . & x_{1K}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 & . & x_{2K}^2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{N1}^2 & . & . & x_{NK}^2 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Les x_{ij} sont les éléments de la matrice x et $x = AX$ où $A = I_N - ii'/N$. La matrice x correspond à la matrice X calculée en déviation de la moyenne. On applique la même procédure pour y où $y = AY$.

$$\beta_P = (z_2'x)^{-1} z_2'y \text{ où } z_2' = z_3' - 3D(x'x/N)x' \text{ et}$$

$$z_3 = \begin{pmatrix} x_{11}^3 & . & . & x_{1K}^3 \\ x_{21}^3 & x_{22}^3 & . & x_{2K}^3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{N1}^3 & . & . & x_{NK}^3 \end{pmatrix} \qquad (24)$$

Encore une fois les éléments de x et y sont exprimés en déviation de la moyenne, $D(x'x/N)$ est une matrice diagonale de dimension $K \times K$ avec sur la diagonale les éléments correspondants de la matrice $x'x/N$. Pour calculer $D(x'x/N)$, on multiplie chaque élément de $x'x/N$ par l'élément correspondant de la matrice identité. Soit : $x = (x_1 x_2 \ldots x_k)$, où les éléments de x sont des vecteurs colonnes.

Donc,

$$D(x'x / N) = \begin{pmatrix} x_1'x_1 / N & . & . & 0 \\ 0 & x_2'x_2 / N & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & x_K'x_K / N \end{pmatrix} \quad (25)$$

Connaissant maintenant β_D et β_P, on peut dériver β_H :

$$\beta_H = W \begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} \text{ où } W = (C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1},\ C = \begin{pmatrix} I_K \\ I_K \end{pmatrix} \quad (26)$$

et S est la matrice de covariances de $\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix}$ sous H0. Plus précisément, β_H est obtenu en appliquant les MCG sur une combinaison de β_D et β_P ; β_D est sans biais sous H0 et a comme matrice de covariances S_D, soit :

$$\beta_D = (z_1'x)^{-1}z_1'y \quad (27)$$

et

$$y = xB + Au \text{ où } y = AY \text{ et } x = AX \quad (28)$$

Si l'on substitue dans β_D le vecteur y par sa valeur, on obtient :

$$\beta_D = (z_1'x)^{-1}z_1'x\beta + (z_1'x)^{-1}z_1'Au \quad (29)$$

alors pour montrer que β_D est sans biais sous H0, on calcule :

$$E(\beta_D) = \beta + (z_1'x)^{-1}z_1'AE(u) \text{ et } E(u) = 0$$

donc

$$E(\beta_D) = \beta$$

La matrice de covariances de β_D est :

$$\begin{aligned} S_D &= E[(\beta_D - \beta)(\beta_D - \beta)'] \\ &= E[((\beta + (z_1'x)^{-1} z_1'Au) - \beta)((\beta + (z_1'x)^{-1} z_1'Au) - \beta)'] \\ &= E[((z_1'x)^{-1} z_1'Au)((z_1'x)^{-1} z_1'Au)'] \\ &= E[(z_1'x)^{-1} z_1'Auu'A' z_1(x'z_1)^{-1}] \\ &= (z_1'x)^{-1} z_1'A z_1(x'z_1)^{-1}\sigma_u^2 \text{ car } AA' = A, \ E(uu') = \sigma_u^2 I_N \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour β_P :

$$\beta_P = (z_2'x)^{-1}z_2'y, \ y = AY, \ x = AX \tag{30}$$

En substituant y dans β_P, on trouve : $\beta_P = \beta + (z_2'x)^{-1}z_2'Au$ et donc β_P est sans biais sous H0 car $E(\beta_P) = \beta$. La matrice de covariance de β_P est :

$$S_P = E[(\beta_P - \beta)(\beta_p - \beta)'] = (z_2'x)^{-1}z_2'Az_2(x'z_2)^{-1}\sigma_u^2$$

Maintenant, pour obtenir β_H dérivé de β_P et β_D, il faut appliquer les MCG sur la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} = C\beta + \begin{pmatrix} u_D \\ u_P \end{pmatrix}$$

où

$$C = \begin{pmatrix} I_K \\ I_K \end{pmatrix}, \ u_D = (z_1'x)^{-1}z_1'Au \text{ et } u_P = (z_2'x)^{-1}z_2'Au$$

ce qui donne :

$$\beta_H = (C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} \tag{31}$$

ou plus précisément, si on applique les MCO sous la forme suivante :

$$P\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} = PC\beta + P\begin{pmatrix} u_D \\ u_P \end{pmatrix} \tag{32}$$

où P est une matrice non singulière de dimension $2K \times 2K$ telle que $P'P = S^{-1}$, alors :

$$(PC)'P \begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} = (PC)'PC\ \beta_H$$

$$\beta_H = (C'P'PC)^{-1}(C'P'P)\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} \tag{33}$$

et donc

$$\beta_H = (C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} \tag{34}$$

où S, la matrice de covariances de $\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix}$, est donnée par :

$$\begin{pmatrix} S_D & S_{DP} \\ S'_{DP} & S_P \end{pmatrix}$$

où :

$$S_{DP} = (z'_1x)^{-1}z'_1Az_2(x'z_2)^{-1}\sigma_u^2 \tag{35}$$

La matrice de covariances de β_H est donnée par :

$$V(\beta_H) = (C'S^{-1}C')^{-1}\ (\sigma_u^2 \text{ est inclus dans } S^{-1})$$

β_H sera sans biais car β_D et β_P sont sans biais sous H0 soit :

$$E(\beta_H) = (C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}\ E\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix}$$

$$= (C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}C\beta \text{ car } E\begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} = c\beta$$

$$= \beta \tag{36}$$

L'application des MCG sous la forme décrite plus haut fournit un estimateur qui est une combinaison linéaire matricielle optimale de β_D et β_P. Il est possible de montrer que l'estimateur résultant d'un arrangement de la sorte aura une variance plus petite ou égale à la plus petite des variances des deux estimateurs β_D ou β_P (théorème de Theil, H. et A.S. Goldbeger, 1961). On peut montrer que β_H demeure convergent (convergence en probabilité) en présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives (voir l'annexe 15.2).

Il existe une autre façon (plus simple) pour déduire β_H, ceci en utilisant la méthode des régressions artificielles (MacKinnon, 1992). Il s'agit, dans un premier temps, de former K régressions artificielles en prenant X comme variable dépendante et (z_1, z_2) comme variables indépendantes soit :

$$X = (i, z_1, z_2)\Gamma + h \tag{37}$$

où

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma'_A \\ \gamma'_B \\ \gamma'_C \end{pmatrix}, \text{ explicitement: } \begin{pmatrix} \gamma_{A_{11}} & \gamma_{A_{12}} & \cdots & \gamma_{A_{1K}} \\ \gamma_{B_{11}} & \gamma_{B_{12}} & \cdots & \gamma_{B_{1K}} \\ . & . & \cdots & . \\ \gamma_{B_{K1}} & \gamma_{B_{K2}} & \cdots & \gamma_{B_{KK}} \\ \gamma_{C_{11}} & \gamma_{C_{12}} & \cdots & \gamma_{C_{1K}} \\ . & . & .... & . \\ \gamma_{C_{K1}} & \gamma_{C_{K2}} & \cdots & \gamma_{C_{KK}} \end{pmatrix} \tag{38}$$

et

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1K} \\ h_{21} & h_{22} & ... & h_{2K} \\ . & & ... & \\ . & & ... & \\ h_{N1} & h_{N2} & ... & h_{NK} \end{pmatrix} \tag{39}$$

est une matrice d'erreurs de dimension $N \times K$ avec $E(h) = 0$. On applique les MCO sur $X = (i, z_1, z_2)\Gamma + h$ et on trouve ainsi $\hat{\Gamma}$ et on calcule $\hat{X} = (i, z_1, z_2)\hat{\Gamma}$. Pour terminer, on transforme $\hat{X}$ en $\hat{x}$ (en

déviation de la moyenne) et on utilise $\hat{x}$ comme matrice d'instruments, soit :

$$\beta_H = (\hat{x}'x)^{-1}\hat{x}'y \tag{40}$$

On peut remplacer x par $\hat{x}$, soit :

$$\beta_H = (\hat{x}'\hat{x})^{-1}\hat{x}'y \tag{41}$$

Ces transformations reposent sur les égalités suivantes :

$$x = (z_1, z_2)\hat{\Gamma} + \hat{h} \text{ et } \hat{x}'\hat{h} = 0 \tag{42}$$

Enfin, la matrice de covariances de β_H sous H0 est :

$$V(\beta_H) = (\hat{x}'\,\hat{x})^{-1}\sigma_u^2$$

où σ_u^2 est estimé par $\hat{\sigma}_u^2 = (u_H'u_H / N - K - 1)$ et $u_H = y - x\beta_H$.

Connaissant maintenant β_H on peut passer à la présentation de β_E comme il a été mentionné plus haut.

2.3. L'estimateur β_E

L'estimateur β_H, dérivé d'une combinaison linéaire matricielle optimale de β_D et β_P sous H0, demeure convergent lorsqu'il y a des erreurs sur les variables explicatives. Mais il est possible de déduire un estimateur alternatif (β_E) qui serait une combinaison linéaire matricielle asymptotiquement optimale de β_D et β_P sous l'hypothèse H1 (présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives). On peut trouver cet estimateur en substituant dans β_H la matrice $\hat{S}^*$ à la matrice S. Soit :

$$\beta_E = W^* \begin{pmatrix} \beta_D \\ \beta_P \end{pmatrix} \tag{43}$$

où $W^* = (C'\hat{S}^{*-1}C)^{-1}C'\hat{S}^{*-1}$ et $\hat{S}^* = \begin{pmatrix} \hat{S}_D^* & \hat{S}_{DP}^* \\ \hat{S}_{DP}^{*\prime} & \hat{S}_P^* \end{pmatrix}$.

Le calcul de la matrice $\hat{S}^*$ s'effectue comme suit sous H1 :

$$\Psi = \sqrt{N}(\beta_D - \beta) = (z_1'x / N)^{-1}z_1'A\eta / \sqrt{N} \tag{44}$$

Ψ a la même distribution asymptotique que

$$\Lambda = \left[\text{p lim}(z_1'x / N)\right]^{-1} z_1'A\eta / \sqrt{N}$$

puisque $\text{p lim}(\Lambda - \Psi) = 0$. Donc la matrice asymptotique de covariance de $\sqrt{N}(\beta_D - \beta)$ est :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} V(\Lambda) &= \lim_{N\to\infty} E(\Lambda\Lambda') \\
&= \lim_{N\to\infty} E\begin{bmatrix} \left(\left[\text{p lim } z_1'x / N\right]^{-1} z_1'A\eta / \sqrt{N}\right) \\ \left(\left[\text{p lim } z_1'x / N\right]^{-1} z_1'A\eta / \sqrt{N}\right)' \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left[\text{p lim } z_1'x / N\right]^{-1} \lim_{N\to\infty} E\dfrac{z_1'A\eta\eta'Az_1}{N} \\ \left[\text{p lim } z_1'x / N\right]^{-1} \end{pmatrix} \qquad (45)
\end{aligned}$$

Cette expression peut être estimée de façon convergente (White, 1982) par :

$$N\hat{S}_D^* = \left[z_1'x / N\right]^{-1} \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_{i1}'\eta_{Hi}^2\tilde{z}_{i1}}{N} \left[x'z_1 / N\right]^{-1} \qquad (46)$$

où $\tilde{z}_{i1} = z_{i1} - \bar{z}_1$, z_{i1} est la $i^{ème}$ ligne de z_1 et $\bar{z}_1$ est un vecteur $(1 \times 1K)$ de moyennes des K variables contenues dans z_1, $\eta_{Hi} = y_i - x_i\beta_H$ est le $i^{ème}$ élément de η_H, y_i et x_i sont respectivement les éléments de la $i^{ème}$ ligne de y et x. De la même façon on trouve que :

$$N\hat{S}_P^* = \left[z_2'x / N\right]^{-1} \frac{\sum_{i}^{N} \tilde{z}_{i2}'\eta_{Hi}^2\tilde{z}_{i2}}{N} \left[x'z_2 / N\right]^{-1} \qquad (47)$$

et

$$N\hat{S}_{DP}^* = \left[z_1'x / N\right]^{-1} \frac{\sum_{i}^{N} \tilde{z}_{i1}'\eta_{Hi}^2\tilde{z}_{i2}}{N} \left[x'z_2 / N\right]^{-1} \qquad (48)$$

2.4. Présentation des tests

L'approche des régressions artificielles utilisée pour dériver β_H et β_E peut également être utilisée pour tester l'hypothèse H0. On définit :

$$\hat{h} = X - \hat{X} \qquad (49)$$

où $\hat{X} = (i, z_1, z_2)\hat{\Gamma}$ et $X = (i, z_1, z_2)\hat{\Gamma} + \hat{h}$. Si l'on suppose qu'il n'y a pas d'erreur sur les variables explicatives ($X = \tilde{X}$), on peut écrire :

$$\begin{aligned} Y &= \alpha i + X\beta + u + \alpha i + (\hat{h} + \hat{X})\beta + u \\ &= \alpha i + \hat{h}\beta + \hat{X}\beta + u \end{aligned} \tag{50}$$

si l'on postule $\beta = \gamma \Rightarrow Y = \alpha i + \hat{X}\beta + \hat{h}\gamma + u$,

on peut écrire aussi que :

$$\begin{aligned} Y &= \alpha i + \hat{X}\beta + \hat{h}\beta + \hat{h}\gamma - \hat{h}\beta + u \\ &= \alpha i + \hat{X}\beta + \hat{h}\beta + \hat{h}(\gamma - \beta) + u \\ &= \alpha i + \hat{X}\beta + \hat{h}\beta + \hat{h}(\theta) + u \text{ où } \theta = \gamma - \beta = 0 \\ &= \alpha i + (\hat{X} + \hat{h})\beta + \hat{h}(\theta) + u \\ &= \alpha i + X\beta + \hat{h}\theta + u \end{aligned} \tag{51}$$

Alors sous H0, on régresse Y sur X et $\hat{h}$[3]. Le résultat attendu est que les éléments du vecteur de coefficients associés à la matrice $\hat{h}$ sont tous égaux à zéro. Le test F habituel, qui a (K, N – (2K + 1)) degrés de liberté (K restrictions et 2K + 1 paramètres dans la régression), est utilisé pour tester l'hypothèse nulle (H0 : $\theta = 0$).

Deux façons alternatives existent pour tester exactement le même phénomène :

i) Un test qui repose sur le fait que, sous H0, β_H et β_L sont sans biais et donc $E(\beta_H - \beta_L) = 0$, alors que sous H1, $\operatorname{p\,lim}(\beta_H - \beta_L) \neq 0$.

Le test est donné par :

$$m = (\beta_H - \beta_L)'G^{-1}(\beta_H - \beta_L) / \hat{\sigma}^2 \tag{52}$$

où $G\hat{\sigma}^2$ est l'estimateur de la matrice des covariances de $(\beta_H - \beta_L)$ sous H0. On calcule cette matrice de covariances par

$$V[\beta_H - \beta_L] = E[(\beta_H - \beta_L)(\beta_H - \beta_L)'] = G\sigma^2 \text{ et } G = J'J$$

où $J = (C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}\begin{pmatrix} (z_1'x)^{-1}z_1'A \\ (z_2'x)^{-1}z_2'A \end{pmatrix} - (x'x)^{-1}x'$.

3. À noter que cette façon de procéder pour tester les erreurs de mesures est celle des régressions artificielles (ou régressions auxiliaires), voir Johnston et Dinardo (1997).

On estime σ^2 par $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{e'_L e_L}{N - K - 1}$ où $e_L = y - x\beta_L$. On peut estimer aussi $\hat{\sigma}^2$ par $\dfrac{e'_H e_H}{N - K - 1}$ où $e_H = y - x\beta_H$.

Enfin, on calcule la « p-value » associée à m. Cette valeur est définie comme étant la probabilité que sous H0 la variable aléatoire correspondant à m ait une valeur supérieure à celle observée pour l'échantillon considéré. Pour un test effectué à un niveau de signification de 5 %, H0 sera rejeté si la « p-value » de m est plus petite que 0,05 (voir l'annexe 15.2 pour le calcul de la « p-value » associée à m).

ii) La deuxième façon est, sous H0, de faire la régression de e_H dérivé de β_H sur x soit : $e_H = x\theta + \xi$ où ξ est un vecteur de dimension $N \times 1$ d'erreurs de régression et θ, un vecteur de dimension $K \times 1$ de paramètres inconnus. Sous H0, la corrélation entre e_H et x est nulle, donc tous les éléments de θ devraient être égaux à zéro. S'il y avait des erreurs dans les variables explicatives, les éléments de θ seraient significativement différents de zéro. On estime ici θ par $\hat{\theta}$ en utilisant les MCG, car sous H0 :

$$\begin{aligned}
\xi &= e_H \\
e_H &= y - x\beta_H \\
&= x\beta + Au - x\beta + x(C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}\begin{pmatrix}(z'_1x)^{-1}z'_1\\(z'_2x)^{-1}z'_2\end{pmatrix}Au \\
&= Mu \text{ où } M = \left(I - x(C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}\begin{pmatrix}(z'_1x)^{-1}z'_1\\(z'_2x)^{-1}z'_2\end{pmatrix}\right)A \qquad (53)
\end{aligned}$$

et $V(e_H) = E(e_H e'_H) = \sigma_u^2 MM'$. L'estimation de $\hat{\theta}$ par les MCG est $\hat{\theta} = \left(x'(MM')^{-1}x\right)^{-1}x'(MM')^{-1}y$. Le problème maintenant est de trouver l'inverse de MM', car cette matrice est singulière. L'inverse généralisé de Moore-Penrose[4] résout ce problème.

4. À noter que cette matrice est unique. Voir Jäckel (2002) pour des applications financières.

L'inverse généralisé de MM' est $(MM')^+$ et on le calcule comme suit :

$$(MM')^+ = HD^{-1}H'(MM')'$$

où D est une matrice diagonale de dimension $r \times r$ ($r = N - K - 1$) et les éléments de la diagonale sont les valeurs propres (différentes de zéro) de $(MM')'MM'$. H, de dimension $N \times r$, est une matrice de vecteurs propres correspondants aux r valeurs propres de $(MM')'MM'$ soit : $(MM')'MM'$ est de dimension $N \times N$ et de rang $N - K - 1$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_{N-K-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } H = \begin{pmatrix} m_{11} & . & . & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & . & m_{2r} \\ . & . & . & . \\ m_{N1} & m_{N2} & . & m_{Nr} \end{pmatrix} \tag{54}$$

Enfin, le test F habituel peut être utilisé pour tester $\theta = 0$. Ce test a $(K, N - (2K + 1))$ degrés de liberté (K restrictions et $2K + 1$ paramètres à estimer). Il est à noter que si $N \to \infty$ alors $Mu \to u$. Par conséquent, pour les grands échantillons, les MCO peuvent être utilisés pour estimer θ.

3. PERFORMANCES RELATIVES DES ESTIMATEURS

Cette section se divise en deux parties : a) trouver des éléments d'explication (l'explication est valable pour β_E qui est une extension de β_H) de la meilleure performance de β_H sur β_D et β_P. Dans le cas où il y a présence d'erreurs de mesure dans les variables explicatives, essayer de comprendre pourquoi β_H (et β_E, l'extension de β_H) semble, encore une fois, avoir une meilleure performance que β_L (MCO) ; b) effectuer des expériences de Monte Carlo pour comparer β_H et β_E relativement à β_L.

3.1. Variables et modèles utilisés pour l'application économique : la simulation Monte Carlo[5]

On utilise un modèle simple reliant la consommation totale annuelle[6] aux variables suivantes : *i*) revenu annuel du chef de famille ($\tilde{X}_1$) ; *ii*) âge du chef de famille ($\tilde{X}_2$) ; *iii*) revenu annuel des autres membres de la famille ($\tilde{X}_3$) ; *iv*) nombre de personnes-semaines formant la famille durant l'année ($\tilde{X}_4$).

Pour conserver une certaine homogénéité de l'ensemble des observations, on a retenu les observations pour lesquelles le revenu total du ménage se situait entre 25 000 $ et 55 000 $. Les paramètres utilisés pour générer la variable dépendante sont :

$$Y = 1,0 + 1,0\tilde{X}_1 + 1,0\tilde{X}_2 + 1,0\tilde{X}_3 + 1,0\tilde{X}_4 + u \qquad (55)$$

où u est le terme d'erreur de régression. Les variables $\tilde{X}$ observées dans l'échantillon sont supposées être les vraies valeurs de ces variables. Les paramètres ont été fixés à 1 dans le but de faciliter l'interprétation des résultats. Les Y ont donc été générés en utilisant l'équation ci-dessus avec un terme d'erreur normalement distribué ayant pour matrice de covariances $\sigma_u^2 I$. Dans les diverses expériences, σ_u a été fixé à différentes valeurs dans le but d'obtenir plusieurs valeurs du coefficient de détermination théorique, défini comme suit :

$$\tilde{R}^2 = (\beta' \tilde{x}' \tilde{x} \beta) / (\beta' \tilde{x}' \tilde{x} \beta + N\sigma_u^2) \qquad (56)$$

où les $\tilde{x}_i$ sont en déviations de la moyenne. Aussi, des erreurs de mesure normalement distribuées ont été ajoutées aux variables $\tilde{X}$. L'importance relative de ces erreurs de mesure a été évaluée pour chaque variable par le ratio de la variance des erreurs de mesure à la variance de la variable originale concernée $\lambda_i = \dfrac{\text{var}(v_i)}{\text{var}(\tilde{X}_i)}$. Des échantillons aléatoires de différentes tailles ont été obtenus de l'ensemble total disponible de 4 400 observations. Dans toutes les expériences, les erreurs de mesure introduites affectent la variable $\tilde{X}_1$ (revenu annuel

5. Pour une référence récente d'informations sur ce sujet, on consultera : Jäckel, P. (2002), *Monte Carlo Methods in Finance*, Wiley.

6. Les données utilisées pour faire les expériences sont tirées de l'enquête effectuée par Statistique Canada sur les finances des Consommateurs.

du chef de famille) ou bien les variables $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_3$ (revenu annuel des autres membres de la famille). Pour mieux comprendre l'importance relative des erreurs de mesure affectant les variables explicatives dans les différentes expériences, il est utile de regarder le tableau 1. Par exemple, dans les expériences où seulement $\tilde{X}_1$ est affecté d'erreurs de mesure avec une variance de 5 % de la variance de $\tilde{X}_1$, il est implicitement supposé que le revenu du chef du famille est rapporté avec

TABLEAU 1 **Statistiques sommaires pour l'échantillon complet de 4 400 données**

Variables	$\tilde{X}_1$ **($)**	$\tilde{X}_2$ **(Années)**	$\tilde{X}_3$ **($)**	$\tilde{X}_4$ **(Pers.-sem.)**
Valeur min.	–17 802	20	–15 000	52
Valeur max.	67 832	80	62 713	468
Écart-type	8 553	13,06	8 183	67,32
Moyenne	25 116	42,36	8 116	167,49

Taille/ Variance des erreurs		**Valeur**	**% de la moyenne**	**Valeur**	**% de la moyenne**	**Valeur**	**% de la moyenne**	**Valeur**	**% de la moyenne**
5 %	$2\sigma_v$	3 825	15,2	5,8	13,8	3 659	45,1	30,1	17,9
	E(|v|)	1 526	6,1	2,3	8,9	1 460	17,9	12,0	7,2
10 %	$2\sigma_v$	5 409	2,05	8,2	19,5	5 175	63,8	42,6	25,4
	E(|v|)	2 158	8,5	3,3	7,8	2 064	25,4	17,0	10,1
15 %	$2\sigma_v$	6 625	26,4	10,1	23,9	6 338	78,1	52,2	31,1
	E(|v|)	2 643	10,5	4,0	9,5	2 528	31,2	20,8	12,4
25 %	$2\sigma_v$	8 553	34,1	13,1	30,8	8 183	100,8	66,3	39,6
	E(|v|)	3 412	13,6	5,2	12,3	3 265	40,2	26,5	15,8
50 %	$2\sigma_v$	12 095	48,2	14,3	33,8	8 964	110,4	73,7	44,0
	E(|v|)	4 825	19,2	5,7	13,5	3 576	44,1	29,4	17,6

une erreur moyenne absolue de 1 526 $, ce qui correspond à 6,1 % de la valeur moyenne de $\tilde{X}_1$. Il est aussi supposé que 95 % des répondants vont rapporter la valeur de $\tilde{X}_1$ avec une erreur absolue plus petite que 3 825 $ (approximativement). Un cas d'erreur de 5 % est probablement une représentation plausible des erreurs de mesure présentes dans les enquêtes de revenu. Un pourcentage plus élevé correspondrait à des erreurs de mesure sur les variables qui sont plus difficiles à appréhender, comme la richesse personnelle nette ou bien d'autres types de variables économiques, comme les variables agrégées macroéconomiques.

3.2. Éléments d'explication de la meilleure performance de β_H par rapport à β_D et β_P

Dans le but d'expliquer la meilleure performance de β_H en regard de β_D et β_P dans le cadre de notre échantillon, il faut d'abord calculer la valeur relative de l'écart-type des estimateurs β_D, β_P et β_H quand il n'y a pas d'erreurs sur les variables explicatives, soit en divisant les écarts types de ces estimateurs par ceux des β_L correspondants (voir tableau 2).

On constate au tableau 2 le gain remarquable d'utiliser β_H au lieu de β_D et β_P. Par exemple, si on prend l'estimation du coefficient β_4, les ratios de β_D et β_P sont respectivement de 25 et 6 pour 1 tandis que pour β_H le ratio est seulement de 2,4 pour 1. Cependant, il est important de noter que les résultats présentés dans ce tableau dépendent des données utilisées pour ces calculs, ceci n'étant qu'une illustration. La description de ces données a été présentée dans la section précédente.

TABLEAU 2 **Écart-type des estimateurs indiqués / écart-type des MCO**

Paramètres	β_D	β_P	β_H
β_1	10,4	4,6	3,6
β_2	9,9	18,5	2,0
β_3	4,0	5,6	2,1
β_4	25,3	6,2	2,4

Sachant que les trois estimateurs peuvent être interprétés comme des estimateurs à variables instrumentales obtenus en remplaçant les variables explicatives X par $\hat{X}$ où $\hat{X}$ est obtenu en régressant X sur z_1 ou sur z_2 ou bien sur les deux, et sachant que les variances de ces estimateurs dépendent de la corrélation de ces variables avec les variables explicatives, il peut être utile d'examiner la racine du coefficient de détermination de la régression des quatre variables $\hat{X}_i$ sur z_1 ou z_2 ou bien sur les deux (voir tableau 3).

TABLEAU 3 **Coefficients de corrélation multiple de la régression de $\tilde{X}_i$ sur z_i**

	Variables indépendantes		
	z_1	**z_2**	**z_1 et z_2**
Variables dépendantes	**Estimateurs correspondants**		
	β_D	**β_P**	**β_H**
$\tilde{X}_1$	0,42	0,26	0,44
$\tilde{X}_2$	0,51	0,16	0,69
$\tilde{X}_3$	0,63	0,25	0,78
$\tilde{X}_4$	0,27	0,44	0,51

Pour mieux comprendre comment β_H peut avoir une meilleure performance que β_D et β_P, il est utile d'étudier, au tableau 3, la contribution marginale sur le $\sqrt{R^2}$ de l'ensemble des variables contenues dans z_2 une fois que l'ensemble des variables contenues dans z_1 a été introduit comme instrument pour $\tilde{x}$ et aussi la contribution marginale au $\sqrt{R^2}$ de z_1 une fois que z_2 a été introduit comme instrument pour $\tilde{x}$. En d'autres termes, on essaie de voir si le fait d'ajouter z_1 à z_2 ou z_2 à z_1 contribue à augmenter le $\sqrt{R^2}$ en regard des contributions idiosyncratiques de z_1 et z_2. On constate que dans le cas de $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ et $\tilde{X}_3$ l'introduction de z_2 n'augmente pas fortement la corrélation multiple en comparaison de celle obtenue seulement avec z_1 (tableau 3). Cependant, le cas est différent pour z_2.

3.3. Résultats : expériences de Monte Carlo[7]

Différentes mesures comme la racine carrée de l'écart quadratique moyen (REQM)[8], l'erreur de type I et le biais sont utilisées dans les diverses expériences de Monte Carlo servant à mesurer la performance relative de β_H et β_E par rapport à β_L.

La REQM mesure la dispersion de l'estimateur autour de la vraie valeur. Un bon estimateur en regard d'un moins bon a un REQM plus faible. On le définit comme suit[9] :

$$\text{REQM}(\beta_L) = \sqrt{E[\beta_L - \beta]^2} = \sqrt{\text{biais}(\beta_L)^2 + \text{variance}(\beta_L)} \quad (57)$$

Le biais mesure la différence entre les vraies valeurs d'un ensemble de paramètres et la moyenne des estimations de ces paramètres. Si cette différence est non nulle, alors on dit que l'estimateur est biaisé.

$$\text{biais}(\beta_L) = E(\beta_L) - \beta \quad (58)$$

L'erreur de type I est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle (H0), qui suppose qu'un paramètre k est égal à une valeur donnée, alors que l'hypothèse est vraie. On la calcule de la façon suivante : [1 – (nombre fois qu'H0 est accepté / nombre d'échantillons)] × 100.

Pour avoir le nombre de fois que H0 est accepté, un test t est effectué au niveau 5 % pour un paramètre k sur chaque échantillon.

La puissance du test, définie comme le rapport entre le nombre de fois que H1 est acceptée alors que H1 est vraie et le nombre d'échantillons avec erreurs de mesure, est aussi discutée. Seuls les cas où les erreurs de mesure affectent une ou deux variables ont été considérés et, dans ce dernier cas, on a supposé que les erreurs de mesure des deux variables ne sont pas corrélées. Il est à noter que les expériences ont été effectuées en fixant la probabilité que les échantillons comportent des erreurs de mesure à 50 %. Il est probable que

7. Pour le programme de la simulation Monte Carlo, voir l'annexe 15.4.
8. À noter qu'il existe une extension de ce critère d'évaluation tenant compte de l'hétéroscédasticité nommée HRMSE. À ce sujet, voir Martens (2002).
9. Pour la démonstration de cette relation, voir l'annexe 15.3.

si les expériences avaient été effectuées avec 100 % des échantillons affectés d'erreurs, la performance des estimateurs proposés aurait augmenté relativement à celle de β_L (MCO), mais non la performance relative de β_E par rapport à β_H. D'autres éléments comme la matrice de corrélation des variables indépendantes ou la matrice de corrélation des erreurs de mesure peuvent aussi affecter la performance relative de β_H et β_E.

Pour évaluer les performances relatives de β_H et β_E, trois critères on été retenus : le biais, la REQM et la probabilité d'erreur de type I lorsque l'on teste l'hypothèse (H0) que le paramètre estimé est égal à sa vraie valeur. Trois expériences on été effectuées : *i*) une expérience avec erreurs de mesure sur $\tilde{x}_1$ seulement, en fonction de λ pour un $\tilde{R}^2$ donné et avec un échantillon de 500 observations ; *ii*) une expérience avec erreurs de mesure sur $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_3$ ($\lambda = 5\,\%$) en fonction de la taille de l'échantillon pour un $\tilde{R}^2$ donné ; *iii*) une expérience avec erreurs sur $\tilde{x}_1$ seulement ($\lambda = 25\,\%$) en fonction de la taille de l'échantillon (chaque expérience a été faite avec 250 échantillons).

Le biais asymptotique pour les MCO (β_L) provient du fait qu'il y a présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives. Dans le cas où il n'y a qu'une seule variable explicative, $\text{p lim}\beta_L = \beta / (1 + \lambda)$. En faisant varier λ, on peut visualiser l'évolution du biais.

Les figures 1 et 2 présentent le biais des estimateurs β_{L1}, β_{H1}, β_{E1} en fonction de λ pour un $\tilde{R}^2$ donné et pour un échantillon de 500 observations. Par exemple, pour $\tilde{R}^2 = 0{,}25$ (figure 1) et si $\lambda = 10\,\%$, les biais respectifs de β_{L1}, β_{H1}, β_{E1} sont environ de 0,06, 0,002, 0,01, ce qui veut dire que β_{H1} et β_{E1} ont une meilleure performance (pour ce critère) que β_{L1}. On constate aussi que β_{E1} ne performe pas mieux que β_{H1}, $\forall\lambda$. Si l'on reprend le même exemple, mais avec $\tilde{R}^2$ égal à 0,85 (figure 2), la performance de β_{H1} et β_{E1} demeure supérieure à celle de β_{L1} et cette fois-ci β_{E1} surpasse β_{H1} pour tous les λ, mais de peu.

La figure 3 présente aussi les résultats de la première expérience, mais cette fois-ci pour le deuxième critère retenu, soit la REQM. On constate que les MCO (β_{L1}) pour un $\tilde{R}^2$ égal à 0,25 ont une meilleure performance que β_{H1} et β_{E1}, même si la taille des erreurs de mesure est très grande. Par exemple, pour $\lambda = 75\,\%$, la REQM de β_{L1} est d'environ 0,36, alors que celle de β_{H1} et de β_{E1} est d'environ 0,50 et 0,45. Maintenant si le $\tilde{R}^2$ est égal à 0,85, on observe que β_{H1} et β_{E1}

FIGURE 1 **Biais en valeur absolue de BêtaL1, Bêta H1 et BêtaE1 en fonction de lambda et d'un R-carré de 0,25**

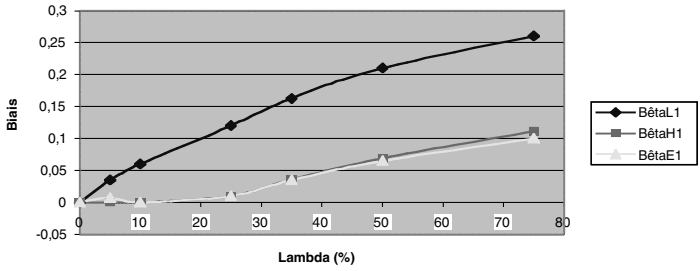


FIGURE 2 **Biais en valeur absolue de BêtaL1, BêtaH1 et BêtaE1 en fonction de lambda et d'un R-carré de 0,85**

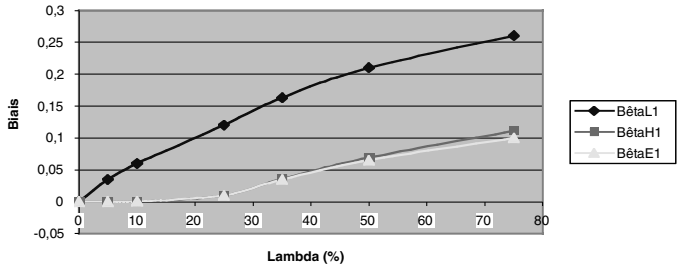


FIGURE 3 **Racine carrée de l'EQM en fonction de lambda pour x1 (dim = 500)**

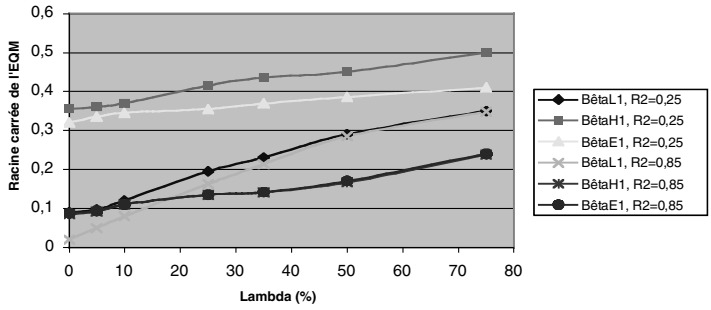
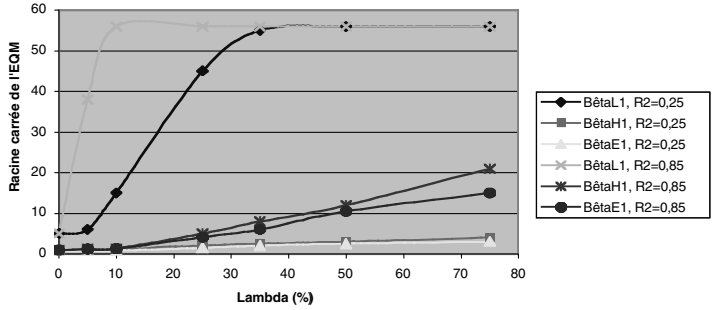


FIGURE 4 **Probabilité d'erreur de type I de BêtaL1, BêtaH1 et BêtaE1 pour erreurs sur x1 (dim = 500)**



ont une meilleure performance que β_{L1} à partir du moment où λ est supérieur à 10 %. On remarque aussi que β_{E1} n'est toutefois pas plus performant que β_{H1}.

La figure 4 présente le troisième critère retenu pour l'expérience, la probabilité d'erreur de type I, lorsqu'un test t est effectué sur un paramètre. On remarque que la probabilité de commettre une telle erreur, lorsqu'un test est effectué sur un paramètre estimé par les MCO (β_L), est très élevée relativement à celle de β_{H1} et de β_{E1}. Par exemple, si $\tilde{R}^2 = 0{,}85$ et $\lambda = 10\,\%$ et que β_{L1} est utilisé pour estimer le paramètre au lieu de β_{H1} ou de β_{E1}, la probabilité de commettre une erreur du type I est d'environ 56 % alors que cette probabilité est de seulement 2 % pour β_{H1} et 1,2 % pour β_{E1}.

La deuxième expérience a été effectuée en introduisant des erreurs de mesure sur $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_3$ d'une taille $\lambda = 5\,\%$. Les trois critères de performance des estimateurs sont évalués en fonction de la taille de l'échantillon.

Les figures 5 et 6 présentent le premier critère d'évaluation, soit les biais moyens de β_{L13}, β_{H13} et β_{E13} en fonction de la taille de l'échantillon pour un $\tilde{R}^2$ donné (les indices 1 et 3 de β_{L13}, β_{H13}, β_{E13}, signifient que c'est la moyenne des estimations des paramètres associés aux variables $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_3$ qui est utilisée pour les différents critères d'évaluation). À la figure 5 ($\tilde{R}^2 = 0{,}25$), on remarque que le biais de β_{L13} est plus grand que celui de β_{H13} et de β_{E13} pour toute taille d'échantillons. Pour un échantillon de 2 000 observations, le biais de

FIGURE 5 **Biais en moyen de BêtaL13, BêtaH13 et BêtaE13 avec lambda = 5%, R-carré = 0,25 pour x1 et x3**

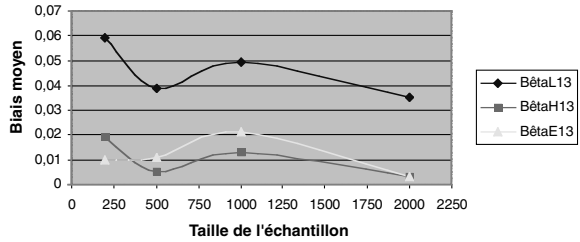
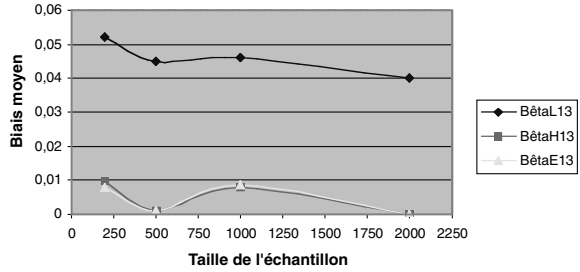


FIGURE 6 **Biais en moyen de BêtaL13, BêtaH13 et BêtaE13 avec lambda = 5%, R-carré = 0,85 pour x1 et x3**



β_{E13} est plus petit que celui de β_{H13}. Pour un $\tilde{R}^2$ égal à 0,85, les estimateurs sont encore plus performants car le biais, par exemple pour un échantillon de 2 000 observations, s'approche de zéro alors que celui de β_{L13} a augmenté par rapport à l'expérience faite avec le $\tilde{R}^2 = 0{,}25$. On voit aussi que β_{E13} semble être moins performant que β_{H13} pour l'ensemble des échantillons. La figure 7 montre la performance relative de β_{L13}, β_{H13} et β_{E13} en terme de REQM en fonction de la taille de l'échantillon pour un $\tilde{R}^2$ donné. Lorsque le $\tilde{R}^2$ est égal à 0,25, on constate que la performance de β_{L13} est nettement supérieure à celle de β_{H13} et à celle de β_{E13} pour l'ensemble des échantillons testés. Dans le cas où $\tilde{R}^2$ est égal à 0,85, β_{H13} devient préférable à β_{L13} lorsque la taille de l'échantillon est supérieure à 1 000. Alors que β_{E13} surpasse β_{L13} seulement lorsque la taille de l'échantillon est supérieure à 1 200 observations.

FIGURE 7 **Somme des REQM de x1 et x3 pour lambda = 5%**

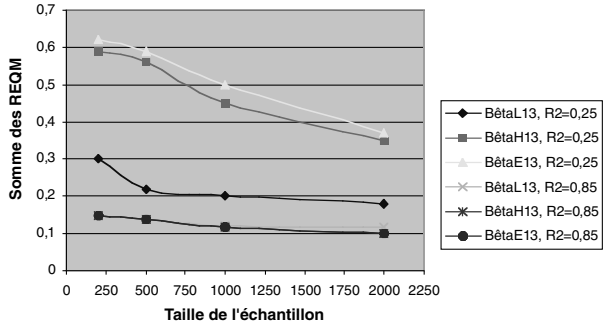
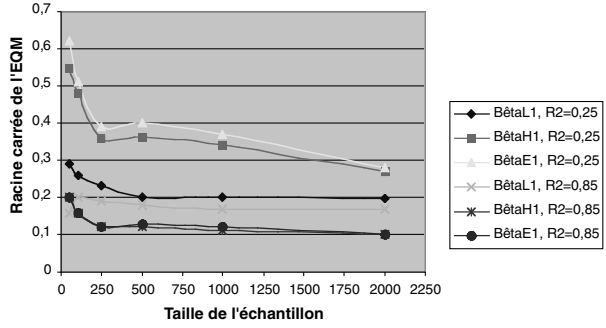


FIGURE 8 **Racine carrée de l'EQM de x1 pour lambda = 25%**



La troisième expérience a été faite seulement pour la REQM des estimateurs β_{L1}, β_{H1} et β_{E1} avec $\lambda = 25\,\%$ pour $\tilde{x}_1$, en fonction de la taille de l'échantillon pour un $\tilde{R}^2$ donné. À la figure 8, on constate que β_{L1} est supérieur à β_{H1} et β_{E1} avec $\tilde{R}^2 = 0{,}25$ pour les différents échantillons expérimentés. Mais on remarque aussi que l'écart entre les nouveaux estimateurs et β_{L1} diminue à mesure que l'échantillon augmente. Pour $\tilde{R}^2$ égal à 0,85, β_{H1} et β_{E1} ont une performance supérieure à β_{L1} lorsque l'échantillon a une taille supérieure à 75 observations. La performance de β_{H1} semble supérieure à celle de β_{E1} pour l'ensemble des échantillons.

FIGURE 9 **Puissance du test, erreurs sur x1 (dim = 500)**

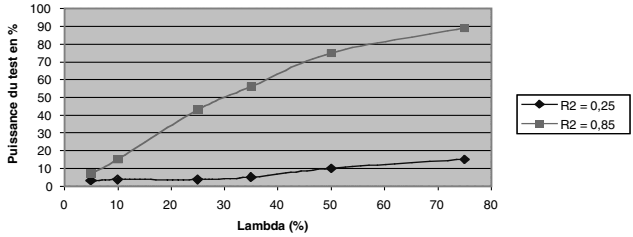
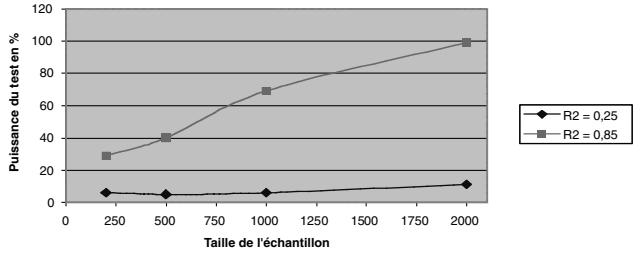


FIGURE 10 **Puissance du test, erreurs sur x1 et x3 pour lambda 5%**



Deux expériences ont été faites pour évaluer la puissance du test d'erreurs de mesure sur les variables explicatives. La première a été effectuée avec un échantillon d'une taille égale à 500. La puissance du test est évaluée en fonction de λ pour un $\tilde{R}^2$ donné où seulement la variable $\tilde{x}_1$ est affectée d'erreurs de mesure. On peut visualiser les résultats de cette expérience à la figure 9. On remarque que le test est puissant seulement quand λ est très grand pour un $\tilde{R}^2$ de 0,85. Dans le cas où le $\tilde{R}^2$ est égal à 0,25, le test n'est pas puissant même pour des erreurs très grandes. Par exemple, si λ est égal à 75 %, la puissance du test n'est que d'environ 17 %.

La deuxième expérience effectuée avec des erreurs de mesure de dimension $\lambda = 5$ % sur $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_3$ est évaluée en fonction de la taille de l'échantillon pour un $\tilde{R}^2$ donné. À la figure 10, on constate que le test n'est pas très puissant lorsque le $\tilde{R}^2$ est égal à 0,25 même pour

un échantillon d'une taille égale à 2 000. Dans le cas où le $\tilde{R}^2$ est égal à 0,85, le test a une puissance de 100 % quand l'échantillon compte 2 000 observations. Pour que la puissance du test dépasse 50 %, il faut que l'échantillon excède 700 observations.

Pour résumer les résultats des expériences avec les variables sur les finances des consommateurs, on peut dire que :

i) β_E ne semble pas tellement préférable à β_H pour les expériences effectuées. Les expériences effectuées supposent qu'environ la moitié des échantillons comportent des erreurs de mesure. La performance de β_E devrait s'améliorer si 100 % des échantillons comportent des erreurs de mesure.

ii) β_H est sans biais lorsqu'il n'y a pas d'erreur de mesure. Donc, quand il y a un doute sur la présence d'erreurs de mesure, il n'y a pas de risque sérieux d'utiliser β_H au lieu de β_L.

iii) Quand il y a présence d'erreurs de mesure, β_H et β_E sont moins biaisés que β_L. Ceci demeure vrai même si la taille des erreurs de mesure (λ) est aussi petite que 5 %.

iv) Lorsqu'il y a présence d'erreurs de mesure, la probabilité d'erreur du type I avec β_H et β_E semble toujours près de la valeur choisie (dans notre cas, la valeur choisie est de 5 %). Alors que si l'on utilise β_L, la probabilité d'erreur de type I demeure grande même si la taille des erreurs de mesure est aussi petite que $\lambda = 5$ %. β_E ne semble pas avoir une performance supérieure à β_H selon ce critère.

v) Lorsqu'une seule des variables est affectée d'erreurs de mesure, la REQM de β_H et β_E est inférieure à celle de β_L pour des erreurs relativement faibles si le $\tilde{R}^2$ est élevé et si l'échantillon est suffisamment grand. Pour le cas où plus d'une variable est affectée d'erreurs de mesure, la performance relative des estimateurs β_H et β_E s'améliore.

Enfin, le test montre suffisamment de puissance si plus d'une variable explicative est affectée d'erreurs et si la taille de l'échantillon est relativement grande pour un $\tilde{R}^2$ élevé. Dans le cas où seulement une des variables explicatives est affectée d'erreurs, ces erreurs doivent être grandes et le $\tilde{R}^2$ élevé pour que le test puisse les détecter. Donc le test n'est pas très puissant dans ce cas.

4. Application financière de la méthode d'estimation à moments supérieurs. Un cas issu de la finance corporative : estimation du bêta dans le cadre du modèle du coût du capital de Benninga-Sarig

Dans cette section, nous présentons la méthodologie et l'application de l'estimateur β_H, développé dans la section précédente, au cas des erreurs sur les variables explicatives dans le cadre d'un modèle issu de la finance corporative, soit le modèle du coût du capital avec taxes de Benninga-Sarig (1997).

4.1. Les données

Dans cette application, nous utilisons les rendements de la compagnie Abbott Labs qui sont observés mensuellement. Ceux-ci sont calculés à partir des prix de clôture à la fin de chaque mois. Nous utilisons également comme variable explicative les rendements de l'indice boursier Standard & Poor's 500 (S&P500) pour la même fréquence. Les rendements (sans dividendes) sont calculés à partir de la formule suivante :

$$y = \frac{A.L._t - A.L._{t-1}}{A.L._{t-1}}$$

$$x = \frac{SP500_t - SP500_{t-1}}{SP500_{t-1}} \qquad (59)$$

où y et x sont, respectivement, les variables dépendante et explicative.

4.2. La méthodologie (et programme EViews)

Le modèle d'estimation du coût moyen du capital utilisé dans cette section est celui de Benninga-Sarig (1997). Dans cette formulation, le taux de rendement (coût) des actions (coût de l'équité ou *cost of equity*, en anglais) se calcule comme suit :

$$r_{sL} = r_f(1 - t_c) + \beta_{sL}\left[E(r_m) - r_f(1 - t_c)\right] \qquad (60)$$

r_{sL} : rendement (r) des actions (s : stock) avec levier (L)

r_f : taux d'intérêt sans risque (f : free)

$\left[E(r_m) - r_f\right]$: moyenne historique de la prime de risque du marché (m)[10]

β_{sL} : bêta des actions de la firme avec levier (risque financier).

Notons immédiatement que nous faisons ici la différence entre le bêta avec levier et celui sans levier. La théorie classique sur le sujet suggère que la relation entre ces deux quantités est la suivante[11] :

$$\beta_{su} = \frac{\beta_{sL}}{\left[1 + (1 - t_c)L\right]} \tag{61}$$

Nous pouvons donc extraire l'information du bêta sans levier (risque d'affaires) à l'aide de données observées, c'est-à-dire le bêta avec levier obtenu des données du marché, le taux d'imposition des entreprises et le levier lui-même, L, défini comme étant le ratio de la dette (D) et de l'encours d'actions (S) (l'équité) : L = D / S. Cette quantité est nécessaire pour le calcul du coût d'opportunité du capital défini par :

$$\rho = r_f + \lambda\beta_{su} \tag{62}$$

avec $\lambda = \left[E(r_m) - r_f\right]$, soit la prime de risque du marché.

Ce modèle est également utilisé pour le calcul du coût de la dette qui est défini par :

$$r_{Dette} = r_f + \beta_{Dette}\left[E(r_m) - r_f(1 - t_c)\right] \tag{63}$$

Étant donné les définitions du coût de l'équité (coût des actions) et du coût de la dette dans le cadre du modèle de Benninga-Sarig, nous pouvons maintenant effectuer le calcul du coût moyen du capital

10. Également définie comme étant le rendement excédentaire espéré du portefeuille du marché.

11. Pour plus de détails, voir le chapitre 10 sur la modélisation de la valeur de l'entreprise.

(WACC)[12], une mesure apparaissant dans les états financiers des grandes entreprises :

$$\text{WACC} = \frac{S}{D+S} r_{sL} + \frac{D}{D+S} r_{\text{Dette}}(1 - t_c) \tag{64}$$

où D peut représenter également l'encours d'obligations.

Comme il est couramment suggéré dans la littérature financière, et cela découle simplement du bon sens, il importe de comparer nos résultats à un autre modèle avant de pouvoir établir des conclusions définitives. Un des modèles fréquemment utilisé dans cette littérature est celui de Gordon et ses extensions comme le modèle H[13] qui fait l'hypothèse d'un niveau d'abord anormalement élevé (g) de croissance du dividende et qui diminue par la suite à rythme constant égal à 2H. Une fois cette période écoulée, le taux s'établit au niveau g_{long}. Nous n'irons pas plus loin sur ce sujet, mais nous allons plutôt comparer nos résultats au modèle simple de Gordon que nous rappelons ici :

$$r_{sL} = \frac{d_0(1+g)}{P_0} = \frac{a\ RPA_0(1+g)}{P_0} + g = \frac{a(1+g)}{\left(\frac{P_0}{RPA_0}\right)} + g \tag{65}$$

où d_0 est le dernier dividende que la firme a payé, RPA_0, le revenu par action au temps présent, P_0 / RPA_0, le rapport cours/bénéfice (en anglais, le *P/E ratio* de la firme), g, le taux de croissance (anticipé) des revenus de la firme et a, la proportion constante de revenus que la firme verse en dividendes. Cette formule a l'avantage d'utiliser des valeurs directement observables sur le marché.

---

12. WACC : *weighted average cost of capital* ou encore taux d'actualisation ajusté pour le risque. À cet effet, on consultera Benninga, S. (2000), chap. 2 ou le chapitre 10 de ce manuel.

13. $$P_0 = \left[\frac{d_0(1+g_s)}{r-g_s}\right]\left[1 - \left(\frac{1+g_s}{1+r}\right)^N\right] + \frac{d_0(1+g_s)^N(1+g_{long}) + d_0(1+g_s)^N(H)(g_s - g_{long})}{(r-g_{long})(1+r)^N}$$

où r, d0 et N sont, respectivement, le taux d'actualisation des dividendes, une annuité qui croît au taux gs pendant N périodes. Pour plus de détails à ce sujet, on consultera : Damodaran, A. (1996), *Investment Valuation*, Wiley ; Fuller, R.J. et C. Hsia (1984), « A simplified common stock valuation model », *Financial Analyst Journal*, 40, p. 49-56 et l'annexe 10.1 de cet ouvrage.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le but de cette application est de comparer l'estimateur β_H à celui des MCO. L'estimateur β_E ne sera pas utilisé dans cette section, car nous avons constaté qu'il n'était pas supérieur à β_H et cela pour toutes les expériences effectuées. De plus, β_E est relativement plus difficile à calculer que β_H. Pour toutes ces raisons, nous ne retiendrons que β_H que nous comparerons avec β_L (MCO) dans cette application concernant le calcul du coût moyen du capital (WACC). Au tableau 4 est présenté le programme EViews requis pour effectuer les calculs de l'estimateur β_H.

On remarque rapidement la similitude entre ce programme et celui du langage de programmation du logiciel Gauss que nous présentons à l'annexe 15.4. On constate également la facilité avec laquelle on a pu implanter un tel estimateur dans un logiciel aussi courant et peu coûteux que EViews relativement aux progiciels tels Gauss ou Matlab. Comme nous l'avons expliqué précédemment, cet estimateur a l'avantage d'être très simple au niveau du calcul et ne requiert aucun choix, souvent difficile à faire, quant aux instruments. Tout comme les estimateurs à variables instrumentales, il est convergent comme en témoignent nos nombreuses expériences de Monte Carlo. De plus, nous savons que cet estimateur a l'avantage d'être semi-paramétrique, car il relève de la classe des estimateurs GMM. En effet, cet estimateur est un GMM, car nous savons qu'il recouvre les estimateurs à variables instrumentales.

4.3. Les résultats

L'estimation du bêta entrant dans le modèle du coût du capital Benninga-Sarig effectuée à partir des rendements de Abbott Labs par la méthode des MCO et par la méthode d'estimation à moments supérieurs, soit notre nouvel estimateur, est présentée au tableau 5. Nous rappelons ici les deux modèles de marché estimés :

1) celui par les MCO, β_L : $r_t = \alpha + \beta\, r_{mt} + e_t$
2) celui par méthode à moments supérieurs, β_H : $r_t = \alpha + \beta\, r_{mt} + \beta_2 \hat{w}_{1t} + e_t$

TABLEAU 4

```
' Programmé par François-É. Racicot
' Estimateur Beta H pour les erreurs sur les variables
' Application de Beta H sur la SML et le modèle du coût du
' capital de Benninga-Sarig (modèle ajusté pour les taxes)
' Calcul de z1 (zD de Durbin)
genr x= sp5008998
genr r= abbott8998
genr xbarre=@mean(x)
genr px1=x-xbarre
genr z=px1^2
vector z1=z
genr ybarre=@mean(r)
genr py1=r-ybarre
vector py=py1
' Calcul de z2 (ou zP de Pal)
genr w1=px1^3
vector w=w1
vector wt=@transpose(w)
vector px=px1
vector pxt=@transpose(px)
vector pxtt=pxt*px/@obs(px)
vector diagon=@makediagonal(pxtt) ' Est un scalaire dans ce cas-ci
vector z21=wt-(3*diagon*pxt/@obs(x))
vector z2=@transpose(z21)
matrix(120,2) zz ' Construction de la matrice zz
colplace(zz,z1,1)
colplace(zz,z2,2)
' Régression artificielle de px sur zz afin d'obtenir xchap ou
' hchap  (wchap)
' ls px zz
vector theta = (@inverse(@transpose(zz)*zz))*@transpose(zz)*px
vector xchap=zz*theta
vector wchap= px-xchap
matrix(120,2) ww
colplace(ww,px,1)
colplace(ww,wchap,2)
' Régression artificielle pour effectuer le test d'erreurs sur les
' variables et modèle corrigé pour celles-ci
vector betah=(@inverse(@transpose(ww)*ww))*@transpose(ww)*py
mtos(px,px1) ' Transforme vecteurs en séries
mtos(wchap,wchap1)
mtos(py,py0)
' Résultat de la régression artificielle à comparer avec betaH
ls py0 c px1 wchap1
' Modèle de marché sans tenir compte des erreurs sur les variables
ls r c x
```

TABLEAU 5 **Estimation du bêta d'Abbott Labs à l'aide des MCO et de l'estimateur à moments supérieurs**

	β_L	β_H : PX1	WCHAP1
Coefficients	0,8057	0,8822	–0,1494
t-Student	7,71	5,86	–0,71
R^2	0,3349	0,3379	–

On constate rapidement à la lecture du tableau 5 la régularité de l'estimation du modèle de marché. En effet, les R^2 des deux modèles sont similaires. On constate également une augmentation significative du bêta dans le modèle corrigé pour les erreurs sur les variables, c'est-à-dire le modèle incluant le terme WCHAP1. Ces résultats sont encourageants. En effet, ils vont dans le même sens que ceux obtenus dans la littérature financière qui a trait à l'estimation des bêtas (Blume, 1971 ; Broquet *et al.*, 1997), à savoir que les bêtas, une fois stabilisés, convergent vers 1.

Passons maintenant au calcul du coût moyen du capital (WACC) à l'aide de l'estimation par les MCO du bêta de l'action, β_L, puis du β_H, cela en comparaison avec le modèle de Gordon. Pour ce faire, nous avons besoin des informations suivantes[14] pour la firme américaine Abbott Labs (1989-1998) :

- taux sans risque (rendement bons du Trésor) : $r_f = 0,04$ (4 %) ;
- prime de risque (moyenne historique 1989-1998 du S&P 500) : $E(r_m) - r_f = (0,0132 * 12) - 0,04 = 0,1186$;
- bêta d'Abbott Lab (voir tableau 5) : $\beta_L = 0,8057$; $\beta_H = 0,8822$;

14. Ces informations sont inspirées de l'ouvrage de Benninga (2000), *Financial Modeling*, MIT Press.

- bêta de la dette[15] : $\beta_{dette} = 0{,}13$;
- taxe corporative : $t_c = 0{,}4$;
- coûts de l'équité $\left(r_{sL} = r_f(1 - t_c) + \beta\left[E(r_m) - r_f(1 - t_c)\right]\right)$ et de la dette $\left(r_{dette} = r_f(1 - t_c) + \beta_{dette}\left[E(r_m) - r_f(1 - t_c)\right]\right)$:
  - avec β_L : $r_{sL} = 0{,}04*0{,}6 + \underline{0{,}8057}*(0{,}1584 - 0{,}04*0{,}6) = 0{,}1323$;
  - avec β_H : $r^*_{sL} = 0{,}04*0{,}6 + \underline{0{,}8822}*(0{,}1584 - 0{,}04*0{,}6) = 0{,}1426$;
  - $r_{dette} = 0{,}04*0{,}6 + \underline{0{,}13}*(0{,}1584 - 0{,}04*0{,}6) = 0{,}0415$.
- l'encours des actions (S) et la dette de l'entreprise (D) :
  - S = valeur au marché de l'équité (fin 1998 en milliards de dollars) = 74,29
  - D = dette (en milliards de dollars) = 2,72.

En utilisant ces informations, nous pouvons comparer les WACC d'Abbott Labs pour notre nouvel estimateur et ceux du modèle de Benninga-Sarig (1997) :

1) WACC avec β_L :

$$\begin{aligned} WACC &= \frac{S}{D+S} r_{sL} + \frac{D}{D+S} r_{Dette}(1 - t_c) \\ &= \frac{74,29}{74,29 + 2,72} 0,1323 + \frac{2,72}{74,29 + 2,72} 0,0415(1 - 0,4) \\ &= 0,1285 \end{aligned}$$

15. Étant donné qu'il n'est pas simple de calculer le bêta de la dette, nous l'estimons en utilisant les bêtas observés de bons avec différents niveaux de risque classifiés en termes de leurs échéances. Par exemple, on observe généralement qu'un bon de très courte échéance est classifié comme ayant un risque de bas niveau, soit un bêta égal à 0. Dans le cas extrême d'un bon de longue échéance (supérieure à 10 ans), le risque est généralement classifié comme étant intermédiaire, son bêta étant égal à 0,8. Dans le cas qui nous concerne, nous nous situons entre un bon de courte échéance et d'échéance moyenne (1-3 ans et 3-10 ans) : les bêtas généralement observés pour ces intervalles sont respectivement de 0,1 et 0,35. Nous retenons donc pour notre exemple une approximation pour le bêta de la dette, à hauteur de 0,13, en comparaison avec ceux des bons.

2) WACC avec β_H :

$$\begin{aligned} \text{WACC} &= \frac{S}{D+S} r_{sL}^{*} + \frac{D}{D+S} r_{\text{Dette}}(1 - t_c) \\ &= \frac{74,29}{74,29+2,72} 0,1426 + \frac{2,72}{74,29+2,72} 0,0415(1-0,4) \\ &= 0,1376 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant comparer ces résultats, comme il est d'usage en finance corporative, à celui obtenu du modèle bien connu de Gordon. Pour ce faire, nous avons besoin des informations suivantes :

- le ratio cours-bénéfice (une approximation) de l'entreprise (*P/E ratio*) : $P_0 / RPA_0 = 20$;
- la proportion des revenus payés en dividendes (une estimation) : $a = 35\,\%$;
- la croissance des revenus (estimation) : $g = 6\,\%$.

En insérant ces informations dans la formule de Gordon, on obtient ainsi le coût de l'équité :

$$r_{sL}^{**} = \frac{a * (1+g)}{P_0/RPA_0} + g = \frac{0,35(1,06)}{20} + 0,06 = 0,079$$

Le WACC, en utilisant le modèle de Gordon, est donc de :

$$\begin{aligned} \text{WACC} &= \frac{S}{D+S} r_{sL}^{**} + \frac{D}{D+S} r_{\text{Dette}}(1 - t_c) \\ &= \frac{74,29}{74,29+2,72} 0,079 + \frac{2,72}{74,29+2,72} 0,0415(1-0,4) \\ &= 0,0771 \end{aligned}$$

Le tableau 6 présente un résumé de nos résultats.

TABLEAU 6 **Coût moyen du capital (WACC) pour la firme Abbott Labs selon différents modèles et techniques d'estimation**

Modèle de Gordon :	7,71 %
Modèle de Benninga-Sarig avec β_L :	12,85 %
Modèle de Benninga-Sarig avec β_H :	13,76 %

À la lecture du tableau 6, on constate la grande différence qui existe entre le modèle de Benninga-Sarig et celui de Gordon, et cela tant au niveau de notre nouvel estimateur que de celui des MCO. En effet, la différence en pourcentage est respectivement, pour le modèle de Benninga-Sarig avec MCO et pour celui utilisant notre nouvel estimateur, de (0,1285 – 0,0771) / 0,0771 = 67 % et de (0,1376 – 0,0771) / 0,0771 = 78 %. Cette grande différence entre les WACC des deux modèles avec celui de Gordon est pour le moins peu rassurante. L'une des explications possibles, nonobstant les erreurs sur les variables causées par le portefeuille du marché puisque nous en avons tenu compte dans notre calcul, est la possibilité d'avoir utilisé des estimations peu représentatives de la réalité dans le modèle de Gordon. Par exemple, nous avons peut-être sous-estimé les paramètres g et a. Nous avons peut-être aussi incorrectement estimé la valeur du *P/E ratio*. Une autre raison pourrait être que le modèle simple de Gordon est tout bonnement faux pour ce cas. Une extension de ce modèle, comme le modèle H de Gordon, pourrait probablement faire l'affaire. En ce qui concerne l'estimation du WACC de la firme Abbott Labs avec le modèle de Benninga-Sarig, on constate une différence appréciable, mais dans un intervalle qui semble inclus dans un domaine plausible. En effet, la différence en pourcentage entre le modèle de Benninga-Sarig avec les MCO et celui utilisant notre nouvel estimateur est de (0,1376 – 0,1285) / 0,1285 = 7,1 %. Cette différence est justifiée par la présence probable d'erreurs sur les variables, mais nous savons que notre estimateur est convergent même en présence de celles-ci, c'est-à-dire, entre autres, que le biais disparaît asymptotiquement, ce qui n'est certes pas le cas pour les MCO. Enfin, une dernière explication qui pourrait rendre compte de la si grande différence entre le modèle de Gordon et celui de Benninga-Sarig est l'éventualité que le CAPM ne soit tout simplement pas adéquat pour

ces données[16]. Mais notre application semble échapper à cette éventualité, ce qui nous conforte quant à la validité du CAPM et des estimations qui en résultent.

5. CONCLUSION

La présence d'erreurs de mesure dans les variables explicatives est un problème majeur en analyse économétrique. Les expériences de Monte Carlo effectuées dans ce chapitre ont montré que le fait d'ignorer cette réalité peut mener à des erreurs d'inférence importantes si les techniques d'estimation utilisées ne sont pas appropriées. Nous avons suggéré un nouvel estimateur β_H et son extension β_E. Cet estimateur est plus performant que l'estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO) lorsqu'il y a présence d'erreurs de mesure dans les variables si ces erreurs sont relativement importantes. Nous avons aussi suggéré un test pour la présence d'erreurs dans les variables. Ce test s'est montré suffisamment puissant si plus d'une variable explicative est affectée d'erreurs et si ces erreurs sont relativement élevées. De plus, la puissance du test augmente quand le $\tilde{R}^2$ augmente.

D'autres expériences devraient être menées sur la puissance du test pour arriver à des conclusions définitives. Il est à noter que des expériences non décrites ici suggèrent que la corrélation entre les vraies variables indépendantes peut avoir un effet important sur la performance du nouvel estimateur (β_H). De plus, l'effet de la corrélation entre les erreurs de mesure des différentes variables n'a pas été présenté dans ce chapitre.

En terminant, nous avons appliqué un de nos estimateurs, l'estimateur β_H, à un cas financier. Nous nous sommes intéressés à l'estimation du coût du capital, lequel utilise une estimation du bêta d'un actif financier. Nous avons également comparé ces résultats à l'estimateur des MCO qui fut lui-même comparé au modèle de Gordon. Les résultats obtenus sont encourageants. En effet, les résultats, pour notre première comparaison, vont dans le même sens que ceux obtenus

16. En effet, il existe des cas où il est reconnu que celui-ci ne tient tout simplement plus. Prenons par exemple le cas possible d'une firme risquée, c'est-à-dire que la variance de ses rendements est élevée mais qui a un bêta négatif et un R^2 approximativement de 0.

dans la littérature financière qui a trait à l'estimation des bêtas (Blume, 1971 ; Broquet *et al.*, 1997), à savoir que les bêtas, une fois stabilisés, convergent vers 1. Nous voyons également nos estimations se comporter de la sorte. Notre estimateur semble donc, dans ce cas d'application, avoir un comportement qui encourage son utilisation. D'autant plus qu'il est facile d'implanter β_H dans tout logiciel. Enfin, nous avons illustré l'utilisation de notre nouvel estimateur dans le cadre d'un exemple issu de la finance corporative. Il va sans dire que celui-ci n'est pas limité à de telles applications. En effet, il peut être généralisé à toute situation empirique retrouvée autant en finance qu'en économie où la présence d'erreurs sur les variables est appréciable. Une généralisation intéressante serait l'application de celui-ci aux données de panels. Celles-ci sont de plus en plus accessibles aux chercheurs tant en finance corporative, en finance bancaire qu'en marketing, par exemple. Ces champs de recherche pourraient bénéficier grandement de notre contribution.

ANNEXE 15.1

PREUVE MULTIVARIÉE DE LA NON-CONVERGENCE DES MCO

Soit :

$$Y = \tilde{X}\beta + u$$

un modèle de régression linéaire multivariée sans terme constant, où $\tilde{X}$ est une matrice de variables explicatives de dimension $N \times K$ avec $p\lim(\tilde{X}'\tilde{X} / N) = \Sigma_{\tilde{X}\tilde{X}}$, Y est un vecteur $N \times 1$, et u un vecteur d'erreurs de régression $N \times 1$ avec $E(u) = 0, E(u'u) = \sigma_u^2 I$. Supposons aussi que $\tilde{X}$ n'est pas observé, mais que X le soit où $X = \tilde{X} + v$ et v est une matrice d'erreurs de mesure sur les variables explicatives de dimension $N \times K$ avec $E(v) = 0$, $E(v_i, u) = 0$, $p\lim(v'v / N) = \Sigma_{vv}$.

Si l'on substitue $\tilde{X}$ par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned} Y &= (X - v)\beta + u \\ &= \beta X - v\beta + u \\ &= \beta X + e \end{aligned}$$

où $e = u - v\beta$.

Si l'on applique les MCO sur $Y = X\beta + e$ et qu'on remplace Y par sa valeur, on obtient :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'e = \beta + (X'X)^{-1}X'e$$

Pour montrer que $\hat{\beta}$ n'est pas convergent lorsqu'il y a des erreurs de mesure sur les variables explicatives, il faut calculer le $p\lim \hat{\beta}$:

$$p\lim \hat{\beta} = \beta + \left(p\lim(X'X / N)\right)^{-1}\left(p\lim(X'e / N)\right)$$

où

$$\begin{aligned} p\lim(X'e / N) &= p\lim\left(v'(u - v\beta) / N\right) \\ &= p\lim\left(v'u - v'v\beta / N\right) \\ &= -p\lim(v'v / N)\beta \\ &= -\Sigma_{vv}\beta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p\lim(X'X / N) &= p\lim[(\tilde{X}' + v')(\tilde{X} + v) / N] \\ &= p\lim[(\tilde{X}'\tilde{X} / N) + (\tilde{X}'v / N) + (v'\tilde{X} / N) + (v'v / N)] \\ &= \Sigma_{\tilde{X}\tilde{X}} + \Sigma_{vv} \\ p\lim\hat{\beta} &= \beta - \left(\Sigma_{\tilde{X}\tilde{X}} + \Sigma_{vv}\right)^{-1}\Sigma_{vv}\,\beta \\ &= \beta(I - \lambda) \end{aligned}$$

où $\lambda = \left(\Sigma_{vv} + \Sigma_{\tilde{X}\tilde{X}}\right)^{-1}\Sigma_{vv}$.

SOLUTION AU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

On a les quatre équations suivantes :

1) $\tilde{X}^*(Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta}) = 0$

2) $(X - \tilde{X}^*)'(X - \tilde{X}^*) = N\tilde{\sigma}_v^2$

3) $(Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta})'(Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta}) = N\tilde{\sigma}_e^2$

4) $(X - \tilde{X}^*)\tilde{\sigma}_e^2 + \tilde{\beta}(Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta})\tilde{\sigma}_v^2 = 0$

Si l'on substitue $\tilde{\sigma}_e^2$ et $\tilde{\sigma}_v^2$ par leur valeur dans 4), on obtient :

$$(X - \tilde{X}^*)\frac{(Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta})'(Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta})}{N} + \tilde{\beta}(Y - \tilde{X}\tilde{\beta})\frac{(X - \tilde{X}^*)'(X - \tilde{X}^*)}{N} = 0$$

En simplifiant, on obtient :

$$\left((Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta})'\right)' = \left(-\tilde{\beta}(X - \tilde{X}^*)'\right)' = Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta} = -\tilde{\beta}(X - \tilde{X}^*) = H$$

et si on multiplie 4) par $\tilde{\beta}$, on obtient 5) :

$$\tilde{\beta}(X - \tilde{X}^*)\tilde{\sigma}_e^2 + \tilde{\beta}^2(Y - \tilde{X}^*\tilde{\beta})\tilde{\sigma}_v^2 = 0$$

Enfin, on n'a qu'à substituer dans 5) les coefficients de $\tilde{\sigma}_v^2$, $\tilde{\sigma}_e^2$ par H soit : $-H\tilde{\sigma}_v^2 + \tilde{\beta}^2 H\tilde{\sigma}_e^2 = 0$. En simplifiant, on trouve $\tilde{\sigma}_v^2 = \tilde{\beta}^2\tilde{\sigma}_e^2$.

ANNEXE 15.2

Preuve de la convergence de β_H et de β_E

Pour montrer que β_H et β_E sont convergents, nous utilisons le concept de convergence en probabilité et de ce fait l'opérateur p lim. Pour ce faire, il existe des théorèmes généraux qui, sous des hypothèses appropriées, permettent de calculer le p lim simplement en calculant l'espérance asymptotique, sans calculer la variance asymptotique, ce qui signifie qu'on n'a qu'à vérifier la nullité du biais asymptotique.

Il existe pour cela, entre autres, deux théorèmes :

Théorème 1 : Observations indépendantes et distribuées de façon identique.

Si $z_1, z_2, \ldots z_t$ est un ensemble de variables aléatoires et que $E(z_t) < \infty$, soit $E(z_t) = u$ et $\text{cov}(z_t, z_{t+n}) = 0$, alors

$$\text{p lim}\left(\frac{\sum_{t=1}^{N} z_t}{N}\right) = \lim_{N\to\infty} E\left(\frac{\sum_{t=1}^{N} z_t}{N}\right)$$

Théorème 2 : Observations indépendantes et distribuées de façon hétérogène.

Si $z_1, z_2, \ldots z_t$ est un ensemble de variables aléatoires et que

$$\exists\, \sigma > 0,\ 0 < \Delta < \infty \,/\, E\left(\left|z_t\right|^{1+\sigma}\right) < \Delta^{N\to\infty} < \infty,\ \forall t,$$

soit $E(z_t) = u_t$, alors

$$\text{p lim}\ \frac{\sum_{i=1}^{N} z_t}{N} = \lim_{N\to\infty} E\ \frac{\sum_{t=1}^{N} z_t}{N}$$

(voir White, 1984).

Comme il a été mentionné précédemment, β_H et β_E sont convergents, mais cela n'a pas été démontré. Nous prouvons maintenant que ces deux estimateurs sont effectivement convergents sous l'hypothèse H1. Pour cela, il faut montrer que β_D et β_P sont convergents, ensuite on peut montrer que β_H et β_E le sont aussi. Sous l'hypothèse H1, on a :

$$X = \tilde{X} + v \text{ avec } \quad V(\text{vech}(v)) = \Sigma \otimes I_N$$

$$Y = \alpha i + \tilde{X}\beta + u$$

si on substitue $\tilde{X}$ dans Y, alors on a :

$$Y = \alpha i + X\beta - v\beta + u$$

en déviation de la moyenne, Y devient :

$$y = x\beta + Au - Av\beta$$

donc pour β_D :

$$\beta_D = (z_1'x)^{-1}z_1'y$$

On suppose que $(z_1'x / N)^{-1}$ existe.

Si l'on substitue y dans β_D :

$$\beta_D = \beta + (z_1'x / N)^{-1}z_1' Au / N - (z_1'x / N)^{-1}(z_1'Av / N)\beta$$

Calcul du $p\lim \beta_D$:

$$p\lim \beta_D = \beta + \left[p\lim(z_1'x / N)\right]^{-1} p\lim(z_1'Au / N) - \left[p\lim(z_1'x / N)\right]^{-1} p\lim(z_1'Av / N)\beta$$

où $p\lim(z_1'Au / N) = E_{N\to\infty}(z_1'Au / N) = 0$ parce que les éléments de z_1 et de Au sont indépendants et que $E(u) = 0$. Il nous reste à montrer que $p\lim(z_1'Av / N) = 0$ soit :

$$p\lim(z_{1j}'Av_k / N) \text{ pour } (j, k = 1, ..., K) \text{ et } \bar{v}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_{ik}}{N}$$

alors,

$$p\lim \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2(v_{ik} - \bar{v}_k)}{N} = p\lim(\sum x_{ij}^2 v_{ik} / N) - p\lim \bar{v}_k \; p\lim \sum x_{ij}^2 / N$$

sachant que $p\lim \bar{v}_k = E_{N\to\infty}(\sum_{i=1}^{N} v_{ik} / N) = 0$ parce que $E(v_{ik}) = 0$ donc

$$\begin{aligned} p\lim \textstyle\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2(v_{ik} - \bar{v}_k) / N &= p\lim \textstyle\sum(\tilde{x}_{ij} + v_{ij})^2 v_{ik} / N \\ &= p\lim \textstyle\sum \tilde{x}_{ij}^2 v_{ik} / N + 2p\lim \sum \tilde{x}_{ij} v_{ij} v_{ik} / N \\ &\quad + p\lim \textstyle\sum v_{ij}^2 v_{ik} / N \end{aligned}$$

où 1) $p\lim \sum(\tilde{x}_{ij}^2 v_{ik} / N) = E_{N\to\infty}(\tilde{x}_{ij}^2 v_{ik} / N) = 0$ car $\tilde{x}_{ij}^2$ et v_{ik} sont indépendants.

2) $$\begin{aligned} \text{p lim} \sum \tilde{x}_{ij} v_{ij} v_{ik} / N &= E_{N\to\infty}(\sum \tilde{x}_{ij} v_{ij} v_{ik} / N) \\ &= E_{N\to\infty} \sum E(v_{ij} v_{ik}) E(\tilde{x}_{ij}) / N \\ &= \mu_{jk}(1,1) \sum E(\tilde{x}_{ij}) / N = 0 \end{aligned}$$

car $E(\tilde{x}_{ij}) = E(\tilde{X}_{ij}) - \overline{X}_j = 0$ et $\mu_{jk}(1,1) = E(v_{ij} v_{ik})$

où $\mu_{ik}(l, m) = E v_{ij}^{l} v_{ik}^{m}$

3) $$\begin{aligned} \text{p lim} \sum v_{ij}^2 v_{ik} / N &= E_{N\to\infty} \sum v_{ij}^2 v_{ik} / N \\ &= E_{N\to\infty} \sum \mu_{jk}(2,1) / N \\ &= 0 \end{aligned}$$

où $\mu_{jk}(2,1) = E(v_{ij}^2 v_{ik}) = 0$ parce que les moments d'ordre impair de variables aléatoires normalement distribuées sont nuls (Theil, 1971).

Donc $\text{p lim}\, \beta_D = \beta$.

Maintenant il faut montrer que β_P est convergent sous H1.

On a :

$$\beta_P = (z_2' x)^{-1} z_2' y$$

(on suppose que $(z_2' x)^{-1}$ existe) où $z_2' = z_3' - 3D(x'x / N)x'$ comme pour β_D, les éléments de β_P sont en déviation de la moyenne et donc $y = x\beta - Av\beta + Au$ est le modèle de régression sous H1 écrit en déviation de la moyenne. $\beta_P = \beta + (z_2' x)^{-1} z_2' Au - (z_2' x)^{-1} z_2' Av\beta$. Pour démontrer que β_P est convergent, il faut calculer le $\text{p lim}\, \beta_P$ soit :

$$\text{p lim}\, \beta_P = \beta + \left[\text{p lim}(z_2' x / N)\right]^{-1} \text{p lim}\left[(z_2' Au / N) - (z_2' Av\beta / N)\right]$$

β_P sera convergent si $\text{p lim}\left[(z_2' Au / N) - (z_2' Av\beta / N)\right] = 0$.

En substituant z_2' par sa valeur dans cette équation, on obtient :

$$\text{p lim}(z_3' Au / N) - \text{p lim}(z_3' Av\beta / N) - 3D[\text{p lim}(x'x / N)]\text{p lim}(x'Au / N) + 3D[\text{p lim}(x'x / N)]\text{p lim}(x'Av\beta / N)$$

Sachant que u est indépendant de z_3 et de x, alors on a que :

$$\text{p lim}(z_3' Au / N) = E_{N\to\infty}(z_3' Au / N) = 0$$

et que

$$p\lim(x'Au / N) = E_{N\to\infty}(x'Au / N) = 0$$

et

$$\begin{aligned} p\lim(z_3'Av\beta / N) &= p\lim(z_3'[I_N - ii' / N]v\beta / N) \\ &= p\lim(z_3'v\beta) - p\lim\left(\frac{z_3'[ii' / N]v\beta}{N}\right) \end{aligned}$$

où

$$p\lim(z_3'[ii' / N]v\beta) = p\lim(z_3'i / N)p\lim(i'v\beta / N) = 0$$

et donc

$$p\lim(z_3'Av\beta / N) = p\lim(z_3'v\beta / N)$$

De la même façon :

$$p\lim(x'Av\beta / N) = p\lim(x'v\beta / N)$$

Enfin, pour établir que $p\lim \beta_P = \beta$, il faut montrer que :

$$p\lim z_3'v / N + 3D(p\lim x'x / N)\, p\lim(x'v / N) = 0$$

Pour un élément représentatif (j,k), on a par exemple :

$$\begin{aligned} p\lim(z_{3j}'v_k / N) &= p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N}(\tilde{x}_{ij} + v_{ij} + \bar{v}_j)^3 v_{ik} / N \\ &= p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{ij}^3 v_{ik} / N) \\ &\quad + p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ij}^3 v_{ik} / N) - p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N}\bar{v}_j^3 v_{ik} / N) \\ &\quad + 3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{ij}^2 v_{ij} v_{ik} / N) - 3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{ij}^2 \bar{v}_j v_{ik} / N) \\ &\quad + 3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N}\tilde{v}_{ij} v_{ij}^2 v_{ik} / N) - 3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ij}^2 \bar{v}_j v_{ik} / N) \\ &\quad + 3p\lim(\tilde{x}_{ij}\bar{v}_j^2 v_{ik} / N) + 3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ij}\bar{v}_j^2 v_{ik} / N) \\ &\quad - 6p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{ij} v_{ij}\bar{v}_j v_{ik} / N) \end{aligned}$$

Le $p\lim(\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{ij}^3 v_{ik} / N) = E_{N\to\infty}(\sum \tilde{x}_{ij}^3 v_{ik} / N) = 0$ parce que $\tilde{x}_{ij}^3$ et v_{ik} sont indépendants et que $E(v_{ik}) = 0$.

Le $p\lim(\sum_{i=1}^{N} v_{ij}^3 v_{ik} / N) = E_{N\to\infty}(\sum v_{ij}^3 v_{ik} / N) = \mu_{jk}(3,1) \neq 0$, car les moments pairs d'une distribution normale sont différents de zéro.

$$\text{Le } p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \bar{v}_j^3 v_{ik} / N) = p\lim(\bar{v}_j^3 \textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ik} / N)$$
$$= p\lim \bar{v}_j \bullet p\lim(\textstyle\sum v_{ik} / N)$$

et donc :

$$p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ik} / N) = E_{N\to\infty} \textstyle\sum(v_{ik} / N) = E_{N\to\infty} \textstyle\sum(E(v_{ik}) / N) = 0$$

$$p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \bar{v}_j^3 v_{iK} / N) = 0$$

Le terme

$$3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij}^2 v_{ij} v_{ik} / N) = 3E_{N\to\infty}(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}^2 v_{ij} v_{ik} / N)$$
$$= \lim_{N\to\infty} 3(\textstyle\sum \sigma^2_{\tilde{x}_j} \mu_{ik_j}(1,1) / N)$$
$$= 3\sigma^2_{\tilde{x}_j} \mu_{jk}(1,1)$$

Le terme

$$3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ik} v_{ij}^2 v_{ik} / N) = -3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ij}^2 \bar{v}_j v_{ik} / N) = 0$$

parce que $E(v_{ij}^2 v_{ik}) = \mu_{jk}(2,1) = 0$ (les moments impairs d'une loi normale sont égaux à zéro).

Le terme :

$$3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij} \bar{v}_j^2 v_{ik} / N) = 3p\lim(\bar{v}_j^2 \bullet \textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij} v_{ik} / N)$$
$$= 3p\lim \bar{v}_j^2 \bullet p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij} v_{ik} / N)$$

et

$$p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij} v_{ik} / N) = E_{N\to\infty}(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij} v_{ik} / N) = 0$$

car $E(v_{ik}) = 0 = E(\tilde{x}_{ij})$.

Le terme :

$$3p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ij} \bar{v}_j^2 v_{ik} / N) = 3p\lim(\bar{v}_j^2) \bullet p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ij} v_{ik} / N)$$
$$= 3p\lim(\bar{v}_j) \bullet p\lim(\bar{v}_j) \bullet p\lim(\textstyle\sum_{i=1}^{N} v_{ij} v_{ik} / N)$$
$$= 3 \times 0 \times 0 \times p\lim(\textstyle\sum v_{ij} v_{ik} / N) = 0$$

car $p\lim(\bar{v}_j) = p\lim(\sum_{i=1}^{N} v_{ij} / N) = E_{N\to\infty}(\sum_{i=1}^{N} v_{ij} / N) = 0$

et $E(v_{ij}) = 0$.

Le terme :

$$-6p\lim(\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij} v_{ij} \bar{v}_j v_{ik} / N = -6p\lim(\bar{v}_j) \bullet p\lim(\sum_{i=1}^{N} v_{ij} v_{ik} / N) = 0$$

car $p\lim(\bar{v}_j) = 0$.

On a aussi pour un élément représentatif (j,k) que :

$$\begin{aligned} p\lim(x_j v_k / N) &= p\lim(\sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_{ij} + v_{ij}) v_{ik} / N) \\ &= p\lim(\sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_{ij} v_{ik} + v_{ij} v_{ik} / N) \\ &= E_{N\to\infty}(\sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_{ij} v_{ik} + v_{ij} v_{ik}) / N) \\ &= \mu_{ik}(1,1) \end{aligned}$$

Et que pour un terme représentatif (j,j) de la matrice diagonale $D(x'x / N)$:

$$\begin{aligned} p\lim(x_j' x_j / N) &= p\lim(\sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_{ij} + v_{ij})^2 / N) \\ &= p\lim(\sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_{ij}^2 + 2\tilde{x}_{ij} v_{ij} + v_{ij}^2) / n) \\ &= p\lim(\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 / N) + p\lim(\sum_{i=1}^{N} 2 v_{ij} \tilde{x}_{ij}^2 / N) \\ &\quad + p\lim(\sum_{i=1}^{N} v_{ij}^2 / N) \\ &= E_{N\to\infty}(\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{ij}^2 / N) + E_{N\to\infty}(2\tilde{x}_{ij} v_{ij} / N) \\ &\quad + E_{N\to\infty}(\sum_{i=1}^{N} (v_{ij}^2 / N)) \\ &= \sigma_{\tilde{x}_j}^2 + 0 + \sigma_{v_j}^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &-p\lim(z_3' v / N) + 3Dp\lim(x'x / N) \bullet p\lim(x'u / N) \\ &\quad = -\mu_{jk}(3,1) - 3\sigma_{\tilde{x}_j} \mu_{jk}(1,1) + 3(\sigma_{v_j}^2 + \sigma_{\tilde{x}_j}^2) \mu_{jk}(1,1) \\ &\quad = -\mu_{jk}(3,1) - 3\sigma_{\tilde{x}_j}^2 \mu_{jk}(1,1) + 3\sigma_{v_j}^2 \mu_{jk}(1,1) + 3\sigma_{\tilde{x}_j}^2 \mu_{jk}(1,1) \\ &\quad = \mu_{jk}(3,1) + 3\sigma_{v_j}^2 \mu_{jk}(1,1) \end{aligned}$$

Sachant que les v_{ik} suivent une loi normale, et en utilisant les propriétés de la loi normale :

$$\mu_{jk}(3,1) = E(v_{ij}^3 v_{ik}) = 3E(v_{ij}^2) \bullet E(v_{ij} v_{ik}) = 3\sigma_{v_j}^2 \bullet \mu_{jk}(1,1)$$

donc

$$3\sigma^2_{v_j}\mu_{jk}(1,1) - 3\sigma^2_{v_j}\mu_{jk}(1,1) = 0$$

Enfin, pour montrer que β_H et β_E sont convergents,

$$\beta_H = (C'S^{-1}C)^{-1}C'S^{-1}\begin{pmatrix}\beta_D\\ \beta_P\end{pmatrix} = W\begin{pmatrix}\beta_D\\ \beta_P\end{pmatrix}$$

$$\beta_E = (C'\hat{S}^{*-1}C)^{-1}C'\hat{S}^{*-1}\begin{pmatrix}\beta_D\\ \beta_P\end{pmatrix}$$

il faut calculer le $p\lim \beta_H$ et le $p\lim \beta_E$ soit :

$$p\lim \beta_H = [C'(p\lim(S/N))^{-1}C]^{-1}C'[p\lim(S/N)]^{-1}\,p\lim\begin{pmatrix}\beta_D\\ \beta_P\end{pmatrix}$$

où $p\lim\begin{pmatrix}\beta_D\\ \beta_P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\lim\beta_D\\ p\lim\beta_P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\ \beta\end{pmatrix} = C\beta$ et où $C = \begin{pmatrix}I_K\\ I_K\end{pmatrix}$

donc

$$p\lim \beta_H = [C'(p\lim(S/N))^{-1}C]^{-1}C'(p\lim(S/N))^{-1}C\beta = \beta$$

et

$$p\lim \beta_E = [C'(p\lim(\hat{S}^*/N))^{-1}C]^{-1}C'(p\lim(\hat{S}^*/N))^{-1}C\beta = \beta.\ \text{Q.E.D.}$$

On a supposé précédemment que les erreurs de régression et les erreurs de mesure sur les variables explicatives sont normalement distribuées. Cela peut sembler a priori une hypothèse peu raisonnable mais si on étudie plus en profondeur la composition des erreurs de mesure des variables explicatives et les erreurs de régression, il devient alors plus pertinent de faire de telles suppositions. Si on considère que :

$$Y = \alpha i + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

où u représente, par exemple, les variables explicatives omises et si on a omis $u = \beta_4 X_4 + \ldots + \beta_N X_N$, où u est une somme de facteurs omis, chacun des facteurs n'étant pas nécessairement normalement

distribué. La somme des facteurs, qui devrait tendre vers l'infini par le théorème central limite, convergera en distribution vers une loi normale[17] :

$$N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} (X_i\beta_i - E(X_i\beta_i)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_u^2 I)$$

Maintenant, pour les erreurs de mesure sur les variables explicatives, l'explication est la même en ce qui concerne l'intuition sous-jacente. Les v_i sont des sommes de facteurs omis et par le théorème central limite chaque vecteur v_i est normalement distribué, ce qui implique que l'ensemble des vecteurs v_i est normalement distribué (Johnston, 1985 ; Johnston et Dinardo, 1997 ; Judge, 1985).

On calcule la « p-value » associée à *m* comme suit :

$$Pr(\tilde{m} > m) = Pr[\eta'[JG^{-1}J - m[I - X(X'X)^{-1}X'] / (N - K - 1)]\eta] > 0$$

où $\tilde{m} = (u'J'G^{-1}Ju / \sigma^2) / (\hat{\sigma}^2 / \sigma^2)$. Alternativement $\tilde{m}$ peut être vu comme : $\tilde{m} = ((\eta'J'G^{-1}J\eta) / [\eta'(I - X(X'X)^{-1}X')\eta / (N - K - 1)])$ où e_L est exprimé en terme de u et η. η est une variable normale réduite : $\eta = u / \sigma$.

Enfin, cette probabilité $Pr(\tilde{m} > m)$ peut se calculer par la procédure d'Imhof (Imhof, 1961).

---

17. Pour la question de convergence, on a besoin d'un théorème plus général. D'après la version généralisée du théorème central limite (Greenberg et Webster, 1983) : si $v_1, v_2, ..., v_N$ sont des vecteurs aléatoires distribués indépendamment avec pour vecteurs de moyennes $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N$ et de matrices de covariances $V_1, V_2, ..., V_N$ et si les moments de troisième ordre existent : $E(v_{ij,N}^3) < \infty$, alors : $N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} (v_i - \mu_i) \xrightarrow{d} N(0, \bar{\Sigma})$ où $\bar{\Sigma} = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} V_i$.

ANNEXE 15.3

Lien entre EQM et variance des biais

Pour un élément i du vecteur $\hat{\beta}$ soit :

$$EQM(\hat{\beta}_i) = Var(\hat{\beta}_i) + Biais^2(\hat{\beta}_i)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{\beta}_i) &= E[\hat{\beta}_i - \beta_i]^2 \\
&= E[\hat{\beta}_i - E(\hat{\beta}_i) + E(\hat{\beta}_i) - \beta_i]^2 \\
&= E[\hat{\beta}_i^2 - \hat{\beta}_i E(\hat{\beta}_i) + \hat{\beta}_i E(\hat{\beta}_i) - \hat{\beta}_i\beta_i - E(\hat{\beta}_i)\hat{\beta}_i + E(\hat{\beta}_i)^2 \\
&\quad - E(\hat{\beta}_i)E(\hat{\beta}_i) + \beta_i E(\hat{\beta}_i) + \hat{\beta}_i E(\hat{\beta}_i) - E(\hat{\beta}_i)^2 + E(\hat{\beta}_i)^2 \\
&\quad - E(\hat{\beta}_i)\beta_i - \beta_i\hat{\beta}_i + E(\hat{\beta}_i)\beta_i - \beta_i E(\hat{\beta}_i) + \beta_i^2]
\end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
&E[\hat{\beta}_i^2 - 2\hat{\beta}_i E(\hat{\beta}_i) + E(\hat{\beta}_i)^2 - 2E(\hat{\beta}_i)\beta_i + E(\hat{\beta}_i)^2 + \beta_i^2] \\
&\quad = E[(\hat{\beta}_i - E(\hat{\beta}_i)]^2 + [\beta_i - E(\hat{\beta}_i)]^2 \\
&\quad = Var(\hat{\beta}_i) + Biais^2(\hat{\beta}_i). \quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

ANNEXE 15.4

Programme GAUSS

Programmé par : François-E. Racicot et Marcel G. Dagenais
Expériences de Monte Carlo pour β_H et β_E dans le progiciel GAUSS

```
new;

aujour1=date;
et = hsec;

/* LES PARAMÈTRES DE DÉPART À SPECIFIER
SONT INDIQUÉS PAR LES INDICATIONS QUI SE
TROUVENT À GAUCHE */

ater=6;
itera=1;             /* Nombre de passes:
itera  */
caprim=4;          /* Nombre de variables
excluant la constante: caprim */
ca=caprim+1;
let zrcarre= {.25 .85};             /*
Rcarre .25 et .85 */

let zproporc= { 5 10 25 35 50 75,
    0 0  0  0  0  0,
    0 0  0  0  0  0,
    0 0  0  0  0  0};

   /* Proportion d'erreurs. Matrice:
(caprim x itera)*/

let zechan= {40 100 250 500 1000 2000};
/* Taille des échantillons */


properr=  50;         /* pourcentage
d'échantillons avec erreurs de mesure */



ztou=1;
output file=betahe.out reset;
/* fichier d'output */

do while ztou<=ater;

/* do while ztourz<=itera; */

ztourz=1;

 ztour=1;
 iteraz=2;
do while ztour<=iteraz;

" "; " "; "numero du tour="; ztou; " ";
pourtage=0;

let seed2  =     612 612 612 612 612 612
612 ;
                                /* Mettre
les "seed" ou 0. Vecteur: (itera) */

    /* ATTENTION 1 */

dimen=zechan[.,ztou];             /*
Dimension de l'échantillon     */

nvec=250;                    /*  Nombre
d'echantillons          */
niconH0 = 0.05;     /* Niveau de confiance
pour H0: pas d'erreur de mesure */
nivconf=0.05;           /*  Niveau de
confiance pour les erreurs de type 1 */
rcarrez=zrcarre[.,ztour];        /*
Rcarre                        */
proporc =zproporc[.,ztourz];

    /* ATTENTION 2 */
/*let retoil[2,2] = 1 .5
                  .5 1; */

let retoil= 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1;
    /*  Matrice de Correlation voulue
pour les x */

    /* ATTENTION 3 */
/*let rvetoil[2,2] = 1 0
                     0 1; */

let rvetoil= 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1;
    /*  Matrice de Correlation voulue pour
les "v" */

fxcorx=0;              /* 0 si on veut
garder les x originaux, 1 autrement  */

    /* ATTENTION 4 */
ff = "a:var11.dat";
/*  Banque de donnees      */


    /* ATTENTION 5 */
retoil=xpnd(retoil);
deterx=det(retoil);
if deterx<=0;
" matrice de correlation des x non
symmetrique definie positive";
stop;endif;

    /* ATTENTION 6 */
rvetoil=xpnd(rvetoil);
deterv=det(rvetoil);
if deterv<=0;
"matrice de corrélation des v non
symétrique définie positive";
stop; endif;
    /* ATTENTION 7 */
open h=^ff;  /* BETA36.DAT; */
xOR1=readr(h,dimen);
h1=close(h);
x1 = xOR1[.,1:(ca-1)];


/*  CALCUL DE CERTAINS PARAMETRES  */


format /m1/ro 12,7;
vb        = ones(ca,1);
```

```
vbsc      = vb[2:ca];
caprim2   = 2*caprim;
ivec      = ones(dimen,1);
iivec     = ones(caprim,1);
if seed2[ztourz] == 0;
seed2[ztourz]     = rndu(1,1);
seed2[ztourz]=seed2[ztourz]*((2^31)-1);
seed2[ztourz]     =
round(seed2[ztourz]);endif;
propor    = proporc./100;
rx        = corrx(x1);
{va1,ve1} = eigrs2(rx);
{va2,ve2} = eigrs2(retoil);
{va3,ve3} = eigrs2(rvetoil);
va1       = sqrt(va1);
va2       = sqrt(va2);
va3       = sqrt(va3);
va1a      = zeros(caprim,caprim); va1a =
diagrv(va1a,va1);
va2a      = zeros(caprim,caprim); va2a =
diagrv(va2a,va2);
va3a      = zeros(caprim,caprim); va3a =
diagrv(va3a,va3);
p         = va1a*ve1';
petoil    = va2a*ve2';
pvetoil   = va3a*ve3';
if fxcorx==0; goto labelnou; endif;
t         = inv(p) * petoil;
moyenx    = meanc(x1);
xdev      = x1 - moyenx';
ecartex   = (sqrt(sumc(xdev.*xdev)./
dimen))';
normx     = xdev./ecartex;
normetol    = normx * t * fxcorx;
xetoil    = normetol.*ecartex;
xetoil    = xetoil + moyenx';
x1        = xetoil + moyenx'; clear
xetoil;clear normetol;
labelnou:
vx        =ivec~X1;
coretoil = corrx(x1);

/*  IMPRESSION DES PARAMETRES  */


"PROGRAMME = BETAHE.PRG";
"PARAMETRES:" vb;
"CORRELATION DE X1="      rx;
"FXCORX=" FXCORX;
"CORRELATION DES X DESIREE SI FXCORX=1"
retoil;
"CORRELATION DES X TRANSFORMES="
coretoil;
"DATE="                   aujour1;
"DIMENSION="              dimen;

                             /* ATTENTION
8 */
"BANQUE DE DONNEES= "     $ff;
"NVEC="                   nvec;
"NIVEAU DE CONFIANCE DU TEST D'ERREURS SUR
VARIABLES =" NICONH0;
"NIVEAU DE CONFIANCE DU TEST D'ERREURS DE
TYPE 1 ="    nivconf;
"K="                      ca;
format /m1/ro 20,15; "SEED2="
seed2[ztourz]; format /m1/ro 11,5;
"R CARRE"                 rcarrez;
"POURCENTAGE D'ERREUR="   proporc;
"PROBABILITE D'ECHANTILLONS AVEC ERREURS
DE MESURE, EN %" PROPERR;

/*  MISE A ZERO DE PARAMETRES QUI
SERVIRONT POUR LES CALCULS DES
MOYENNES ET VARIANCES DES ESTIMATEURS ET
AUSSI LES ACCEPTATIONS  */


betaLm  =zeros(ca,1); betaDm
=zeros(ca,1); betaPm  =zeros(ca,1);
betaLv  =zeros(ca,1); betaDv
=zeros(ca,1); betaPv  =zeros(ca,1);
betaLvv =zeros(ca,1); betaDvv
=zeros(ca,1); betaPvv =zeros(ca,1);
betaHm  =zeros(ca,1); betaHv
=zeros(ca,1); betaHvv =zeros(ca,1);
betaEm  =zeros(ca,1); betaEv
=zeros(ca,1); betaEvv =zeros(ca,1);
bPTHm   =zeros(ca,1); bPTHv
=zeros(ca,1); bPTHvv  =zeros(ca,1);
bPTEm   =zeros(ca,1); bPTEv
=zeros(ca,1); bPTEvv  =zeros(ca,1);
acephoH =zeros(1,1);      x
=zeros(dimen,caprim);
sVbLh0  =zeros(ca,1);
sVbDh0  =zeros(ca,1);      sVbPh0
=zeros(ca,1);
sVbHh0  =zeros(ca,1);
sVbDh1  =zeros(ca,1);      sVbPh1
=zeros(ca,1);
sVbHh1  =zeros(ca,1);
sVbEh0  =zeros(ca,1);      sVbEh1
=zeros(ca,1);
svbpth =zeros(ca,1);    svbpte
=zeros(ca,1);
sEbLh0  =zeros(ca,1);
sEbDh0  =zeros(ca,1);      sEbPh0
=zeros(ca,1);
sEbHh0  =zeros(ca,1);
sEbDh1  =zeros(ca,1);      sEbPh1
=zeros(ca,1);
sEbHh1  =zeros(ca,1);
sEbEh0  =zeros(ca,1);      sEbEh1
=zeros(ca,1);
sebpth=zeros(ca,1); sebpte=zeros(ca,1);
suctbLh0=zeros(ca,1);
suctbDh0=zeros(ca,1);
suctbPh0=zeros(ca,1);
suctbHh0=zeros(ca,1);
suctbEh0=zeros(ca,1);
suctbLh1=zeros(ca,1);
suctbDh1=zeros(ca,1);
suctbPh1=zeros(ca,1);
suctbHh1=zeros(ca,1);
suctbEh1=zeros(ca,1);
suctbpth=zeros(ca,1);
suctbpte=zeros(ca,1);

/*  CREATION DE NVEC VECTEURS DE DIMEN
VALEURS POUR
         LA VARIABLE CONSOMMATION  */


N       = dimen;
r1      = 1;
c       = zeros(caprim,caprim); cc      =
diagrv(c,iivec); C=cc|cc;
ccnou=eye(ca);   cnou= ccnou|ccnou;
xbarre  = ivec'*x1/N;           px      =
x1-ivec*xbarre;
standx  = stdc(px);             sigma2x =
standx.*standx;
sigma2v = sigma2x.*propor;
sigmav  = sqrt(sigma2v);
```

```
sigma2  = (vbsc'*px'*px*vbsc*(1-rcarrez)/
(rcarrez*dimen));
sigma   = sqrt(sigma2);
"SIGMA  = " sigma;
"SIGMAV = " sigmav;
clear iivec;


/*  DEBUT DE LA BOUCLE DO  */

seed1=seed2[ztourz];
bonchoix=0;
do while r1<=nvec;
if r1==1;
bonde=1;
format /m1/ro 20,11; "seed1=" seed1;
format /m1/ro 11,5; endif;
e1 = rndns(dimen,1,seed1);
e1 = sigma.*e1;
Y  = vx*vb+e1;  /* Calcul des vecteurs de
consommation*/


e1 = rndns(dimen,caprim,seed1);
e1 = e1*pvetoil;
e1 = sigmav'.*e1;
if properr==100; goto labeldd; endif;
decid=rndus(1,1,seed1);
if decid>(properr/100); bonde=0; X=X1;
goto labelff; endif;
labeldd:
pourtage=pourtage+1;
X  = X1+e1;
labelff:
clear e1;


/*  CALCUL DES BETAS, DES Q ET DES H  */


xbarre  = ivec'*X/N; px = X-ivec*xbarre;
ybarre  = ivec'*Y/N; py = Y-ivec*ybarre;
x=ivec~x;

qL      = inv(px'*px)*px';
qLnou= inv(x'*x)*x';
betaL   = inv(px'*px)*px'*py;


erols=py-px*betaL;
betaLco=ybarre-xbarre*betaL;
betaL=betaLco|betaL;

betaLm  = betaLm+betaL;
betaLvv = betaL.*betaL;
betaLv  = betaLv+betaLvv;

zD      = px.*px;
zDpa    = zD'-(zD'*ivec*ivec'/N);
qD      = inv(zD'*px)*zDpa;
zDnou= ivec~zD;
qDnou=inv(zDnou'*x)*zDnou';
betaD   = inv(zD'*px)*zD'*py;


netaD   = py - px*betaD;
betaDco=ybarre-xbarre*betaD;
betaD=betaDco|betaD;

betaDm  = betaDm+betaD;
betaDvv = betaD.*betaD;
betaDv  = betaDv+betaDvv;

w       = zD.*px;
mocro   = px'*px; diagon=mocro.*cc;
zP      = (w'-(3*diagon*px'/n))';
zPnou= ivec~zP;
zPpa    = zP'-(zP'*ivec*ivec'/N);
qP      = inv(zP'*px)*zPpa;
qPnou=inv(zPnou'*x)*zPnou';
betaP   = inv(zP'*px)*zP'*py;


netaP   = py - px*betaP;
betaPco=ybarre-xbarre*betaP;
betaP=betaPco|betaP;

clear w,mocro,diagon;
betaPm  = betaPm+betaP;
betaPvv = betaP.*betaP;
betaPv  = betaPv+betaPvv;

zz      = zDpa'~zPpa';
theta   = inv(zz'*zz)*zz'*px;
xcha    = zz*theta;
wcha    = px-xcha;
ww      = px~wcha;
phi     = inv(ww'*ww)*ww'*py;
betaH   = phi[1:caprim];


netaH   = py - px*betaH;
betaHco=ybarre-xbarre*betaH;
betaH=betaHco|betaH;
epe     = erols'*erols;
clear erols;
betaHm  = betaHm+betaH;
betaHvv = betaH.*betaH;
betaHv  = betaHv+betaHvv;

u=1; v1 = zeros(caprim,1); Do while u
<=caprim; v1[u]=caprim+u; u=u+1; endo;
www1    = inv(ww'*ww);
gama    = phi[ca:caprim2];
a22     = submat(www1,v1,v1);
psi     = py-(ww*phi);
fft     = ((gama'*inv(a22)*gama)/caprim)/
((psi'*psi)/(dimen-(2*caprim)-1));
ftoil   = cdffc(fft,caprim,(dimen-
(2*caprim)-1));
if niconH0<ftoil; acephoH = acephoH + 1;
endif;
czero = zeros(ca,ca);
zdc=ivec~zd;
AA1   = inv((zDc'*x)/dimen);
AA2   = inv((x'*zDc)/dimen);
zpc=ivec~zp;
BB1   = inv((zPc'*x)/dimen);
BB2   = inv((x'*zPc)/dimen);
CC1   = (AA1~czero)|(czero~BB1);
zDi   = zDc;
zPi   = zPc;
ca2=2*ca;
miD=zeros(ca,ca); miP=zeros(ca,ca);
miDP=zeros(ca,ca);
miH=zeros(ca2,ca2); miE=zeros(ca2,ca2);
MIdA=ZEROS(CA,CA); MIPA=ZEROS(CA,CA);
u=1;
Do while u<=dimen;
miD     = miD  +
zDi[u,.]'.*(netaH[u]^2).*zDi[u,.];
miP     = miP  +
zPi[u,.]'.*(netaH[u]^2).*zPi[u,.];
miDP    = miDP +
zDi[u,.]'.*(netaH[u].*netaH[u]).*zPi[u,.];
```

```
miH     = miH  +
(zDi[u,.]'|zPi[u,.]').*(netaH[u]^2).*(zDi[
u,.]~zPi[u,.]);
MIDA    = MIDA +
ZDI[U,.]'.*(NETAD[U]^2).*ZDI[U,.];
MIPA    = MIPA +
ZPI[U,.]'.*(NETAP[U]^2).*ZPI[U,.];
u       = u + 1;
endo;

miD     = miD./dimen;
MiP     = miP./dimen;
MiDP    = miDP./dimen;
MiH     = miH./dimen;
MIDA    = MIDA./DIMEN;
MIPA    = MIPA./DIMEN;
sD      = (AA1 * miD * AA2)./ dimen;
SDA=(AA1*MIDA*AA2)./DIMEN;
sP      = (BB1 * miP * BB2) ./ dimen;
SPA=(BB1*MIPA*BB2)./DIMEN;
sDP     = (AA1 * miDP * BB2) ./ dimen;
setoil  = (sD~sDP)|(sDP'~sP);
wetoil  = inv( cnou' * Pinv(setoil) * cnou
) * cnou' * Pinv(setoil);
betaE   = wetoil * (betaD|betaP);
BETAE= BETAE +
INV(CNOU'*PINV(SETOIL)*CNOU)*(1~XBARRE)'*I
NV((1~XBARRE)*

INV(CNOU'*PINV(SETOIL)*CNOU)*(1~XBARRE)')
          *(YBARRE-(1~XBARRE)*BETAE);
netaE   = y - x*betaE;

betaEm  = betaEm+betaE;
betaEvv = betaE.*betaE;
betaEv  = betaEv+betaEvv;

If ftoil > niconH0; betaPTH = betaL;
betaPTE = betaL; iflag=0; endif;
If ftoil <= niconH0; betaPTH = betaH;
betaPTE = betaE; iflag=1; endif;
if bonde==iflag; bonchoix=bonchoix+1;
endif;
bPTHm  = bPTHm+betaPTH;
bPTHvv = betaPTH.*betaPTH;
bPTHv  = bPTHv+bPTHvv;

bPTEm  = bPTEm+betaPTE;
bPTEvv = betaPTE.*betaPTE;
bPTEv  = bPTEv+bPTEvv;


sigmaL  = (epe)/(dimen-ca);
sigmaD  = (netaD'*netaD)/(dimen-ca);
sigmaP  = (netaP'*netaP)/(dimen-ca);
sigmaH  = (netaH'*netaH)/(dimen-ca);
sigmaE  = (netaE'*netaE)/(dimen-ca);

ssL     = qL*qL';  ssLnou= qLnou*qLnou';
ssD     = qD*qD';  ssDnou=qDnou*qDnou';
ssP     = qP*qP';  ssPnou=qPnou*qPnou';
ssDP    = qD*qP';  ssDPnou=qDnou*qPnou';
SS      = (ssD~ssDP)|(ssDP'~ssP);  SSnou=
(ssDnou~ssDPnou)|(ssDPnou'~ssPnou);

VbLh0   = diag(ssL).*sigmaL;

covbLh0=ssl.*sigmaL;
Vblh0co=xbarre*covbLh0*xbarre'+ sigmaL/
dimen;
VbLh0=VbLh0co|VbLh0;

VbDh0   = diag(ssD).*sigmaD;

covbDh0=ssD.*sigmaD;
VbDh0co=xbarre*covbDh0*xbarre' + sigmaD/
dimen;
VbDh0=VbDh0co|VbDh0;

VbPh0   = diag(ssP).*sigmaP;

covbPh0=ssP.*sigmaP;
VbPh0co=xbarre*covbPh0*xbarre' + sigmaP/
dimen;
VbPh0=VbPh0co|VbPh0;

VbHh0   = diag(inv(c'*inv(ss)*c)).*sigmaH;

covbHh0=inv(c'*inv(ss)*c).*sigmaH;
VbHh0co=xbarre*covbHh0*xbarre' + sigmaH/
dimen;
VbHh0=VbHh0co|VbHh0;



VbDh1   = diag(sDA);

VbPh1   = diag(sPA);

MPINV=PINV(SSNOU);
VbHh1   =
diag(inv(cnou'*MPINV*cnou)*cnou'*MPINV*CC1
*MiH*

CC1'*MPINV*cnou*inv(cnou'*MPINV*cnou))./
dimen;


MORCEAU1=INV(CNOU'*PINV(SETOIL)*CNOU);
MORCEAU2=(1~XBARRE);
MORCEAU3=INV(MORCEAU2*MORCEAU1*MORCEAU2');
MORCEAU4=INV(ZDNOU'*X/DIMEN);
MORCEAU5=INV(ZPNOU'*X/DIMEN);
MORCEAU6=(MORCEAU4~ZEROS(CA,CA))|(ZEROS(CA
,CA)~MORCEAU5);
MORCEAU7=CNOU'*PINV(SETOIL);
GRANTA=(CCNOU-
MORCEAU1*MORCEAU2'*MORCEAU3*MORCEAU2)*MORC
EAU1*MORCEAU7
       *MORCEAU6;
MORCEAU8=ZEROS(CA2,CA2);
NETAEALT=Y-X*BETAE;
MORCEAU9=1;
DO WHILE MORCEAU9<=DIMEN;
MORCO10=NETAEALT[MORCEAU9]^2;
MORCEAU8=MORCEAU8+(ZDNOU[MORCEAU9,.]'|ZPNO
U[MORCEAU9,.]').*MORCO10.*

(ZDNOU[MORCEAU9,.]~ZPNOU[MORCEAU9,.]);
MORCEAU9=MORCEAU9+1;
ENDO;
MORCEAU8=MORCEAU8./DIMEN;
VBEH1=DIAG((1/
N)*(GRANTA*MORCEAU8*GRANTA'));

MORCO11=(MORCEAU4*ZDNOU')|(MORCEAU5*ZPNOU'
);
GRANDB=((CCNOU-
MORCEAU1*MORCEAU2'*MORCEAU3*MORCEAU2)*MORC
EAU1*MORCEAU7
       *MORCO11)./(SQRT(DIMEN));
VBEH0=DIAG((1/
DIMEN).*GRANDB*GRANDB'.*SIGMAE);
```

```
vbptH = vbLh0*(1-iflag)+vbHh1*iflag;
vbptE = vbLh0*(1-iflag)+vbeh1*iflag;
sVbLh0  = sVbLh0 + VbLh0;  sVbDh0  =
sVbDh0 + VbDh0;  sVbPh0  = sVbPh0 + VbPh0;
sVbHh0  = sVbHh0 + VbHh0;  sVbDh1  =
sVbDh1 + VbDh1;  sVbPh1  = sVbPh1 + VbPh1;
sVbHh1  = sVbHh1 + VbHh1;  sVbEh0  =
sVbEh0 + VbEh0;  sVbEh1  = sVbEh1 + VbEh1;
sVbptH = sVbptH+vbptH;sVbptE=sVbptE+VbptE;
EbLh0   = sqrt(vbLh0);
EbDh0   = sqrt(vbDh0);
EbPh0   = sqrt(vbPh0);
EbHh0   = sqrt(vbHh0);
EbEh0   = sqrt(vbEh0);
EbDh1   = sqrt(vbDh1);
EbPh1   = sqrt(vbPh1);
EbHh1   = sqrt(vbHh1);
EbEh1   = sqrt(vbEh1);
EbptH=sqrt(VbptH);EbptE=sqrt(VbptE);
sEbLh0  = sEbLh0 + EbLh0;  sEbDh0  =
sEbDh0 + EbDh0;  sEbPh0  = sEbPh0 + EbPh0;
sEbHh0  = sEbHh0 + EbHh0;  sEbDh1  =
sEbDh1 + EbDh1;  sEbPh1  = sEbPh1 + EbPh1;
sEbHh1  = sEbHh1 + EbHh1;  sEbEh1  =
sEbEh1 + EbEh1;  sEbEh0  = sEbEh0 + EbEh0;
sEbptH=sEbptH+EbptH; sEbptE=sEbptE+EbptE;
degre   = dimen-ca;
but     = nivconf/2;
bbut    = ones(ca,1);
but     = bbut*but;
tes     = zeros(ca,1);

tbL = (betaL-vb)./(sqrt(VbLh0));
tbL=abs(tbL); tbL = cdftc(tbL,degre);
tbD = (betaD-vb)./(sqrt(VbDh0));
tbD=abs(tbD); tbD = cdftc(tbD,degre);
tbP = (betaP-vb)./(sqrt(VbPh0));
tbP=abs(tbP); tbP = cdftc(tbP,degre);
tbH = (betaH-vb)./(sqrt(VbHh0));
tbH=abs(tbH); tbH = cdftc(tbH,degre);
tbE = (betaE-vb)./(sqrt(VbEh0));
tbE=abs(tbE); tbE = cdftc(tbE,degre);
tbptH = (betaptH-vb)./
(sqrt(vbptH));tbptH=abs(tbptH);
tbptH = cdftc(tbptH,degre);
tbptE = (betaptE-vb)./
(sqrt(vbptE));tbptE=abs(tbptE);
tbptE = cdftc(tbptE,degre);
tes = tbL.>but; suctbLh0 = suctbLh0 + tes;
tes = tbD.>but; suctbDh0 = suctbDh0 + tes;
tes = tbP.>but; suctbPh0 = suctbPh0 + tes;
tes = tbH.>but; suctbHh0 = suctbHh0 + tes;
tes = tbE.>but; suctbEh0 = suctbEh0 + tes;
tes=tbpth.>but;suctbpth=suctbpth+tes;
tes=tbpte.>but;suctbpte=suctbpte+tes;
tbD = (betaD-vb)./(sqrt(VbDh1));
tbD=abs(tbD); tbD = cdftc(tbD,degre);
tbP = (betaP-vb)./(sqrt(VbPh1));
tbP=abs(tbP); tbP = cdftc(tbP,degre);
tbH = (betaH-vb)./(sqrt(VbHh1));
tbH=abs(tbH); tbH = cdftc(tbH,degre);
tbE = (betaE-vb)./(sqrt(VbEh1));
tbE=abs(tbE); tbE = cdftc(tbE,degre);
tes = tbD.>but; suctbDh1 = suctbDh1 + tes;
tes = tbP.>but; suctbPh1 = suctbPh1 + tes;
tes = tbH.>but; suctbHh1 = suctbHh1 + tes;
tes = tbE.>but; suctbEh1 = suctbEh1 + tes;

" ";"--------------fin de la boucle
numero:" r1;

r1=r1+1;

endo;


/*  RESULTATS FINAUX  */


format /m1/ro 11,5;

beta1=" ";

accep    = acephoH;
proacepH = (acephoH./(r1-1))*100;
pourcen  = proacepH;
beta1    = beta1~"BETAH";

" ";" ";$beta1;" ";
"NOMBRE D'ACCEPTATIONS DE H0 :";     " ";
accep;" ";
"POURCENTAGE D'ACCEPTATION DE H0 :"; " ";
pourcen;" ";
"puissance du test en pourcentage:" (100-
proaceph);

mbL       = betaLm/(r1-1);
vbetaL    = (betaLv-(betaLm.*betaLm./(r1-
1)))/(r1-2);
ecartL    = sqrt(vbetaL);
eqmL      = ((vb-mbL).*(vb-mbL))+vbetaL;
seqmL     = sqrt(eqmL);
biaisL    = mbL-vb;
VbLh0     = sVbLh0/nvec;
EbLh0     = sEbLh0/nvec;
typeLh0   = (1-suctbLh0/nvec)*100;

mbD       = betaDm/(r1-1);
vbetaD    = (betaDv-(betaDm.*betaDm./(r1-
1)))/(r1-2);
ecartD    = sqrt(vbetaD);
eqmD      = ((vb-mbD).*(vb-mbD))+vbetaD;
seqmD     = sqrt(eqmD);
biaisD    = mbD-vb;
VbDh0     = sVbDh0/nvec;
EbDh0     = sEbDh0/nvec;
VbDh1     = sVbDh1/nvec;
EbDh1     = sEbDh1/nvec;
typeDh0   = (1-suctbDh0/nvec)*100;
typeDh1   = (1-suctbDh1/nvec)*100;

mbP       = betaPm/(r1-1);
vbetaP    = (betaPv-(betaPm.*betaPm./(r1-
1)))/(r1-2);
ecartP    = sqrt(vbetaP);
eqmP      = ((vb-mbP).*(vb-mbP))+vbetaP;
seqmP     = sqrt(eqmP);
biaisP    = mbP-vb;
VbPh0     = sVbPh0/nvec;
EbPh0     = sEbPh0/nvec;
VbPh1     = sVbPh1/nvec;
EbPh1     = sEbPh1/nvec;
typePh0   = (1-suctbPh0/nvec)*100;
typePh1   = (1-suctbPh1/nvec)*100;

mbH       = betaHm/(r1-1);
vbetaH    = (betaHv-(betaHm.*betaHm./(r1-
1)))/(r1-2);
ecartH    = sqrt(vbetaH);
eqmH      = ((vb-mbH).*(vb-mbH))+vbetaH;
seqmH     = sqrt(eqmH);
biaisH    = mbH-vb;
VbHh0     = sVbHh0/nvec;
EbHh0     = sEbHh0/nvec;
VbHh1     = sVbHh1/nvec;
EbHh1     = sEbHh1/nvec;
```

```
typeHh0    = (1-suctbHh0/nvec)*100;
typeHh1    = (1-suctbHh1/nvec)*100;

mbE        = betaEm/(r1-1);
vbetaE     = (betaEv-(betaEm.*betaEm./(r1-
1)))/(r1-2);
ecartE     = sqrt(vbetaE);
eqmE       = ((vb-mbE).*(vb-mbE))+vbetaE;
seqmE      = sqrt(eqmE);
biaisE     = mbE-vb;
VbEh0      = sVbEh0/nvec;
EbEh0      = sEbEh0/nvec;
VbEh1      = sVbEh1/nvec;
EbEh1      = sEbEh1/nvec;
typeEh0    = (1-suctbEh0/nvec)*100;
typeEh1    = (1-suctbEh1/nvec)*100;

mbPTH      = bPTHm/(r1-1);
vbPTH      = (bPTHv-(bPTHm.*bPTHm./(r1-
1)))/(r1-2);
ecartPTH   = sqrt(vbPTH);
eqmPTH     = ((vb-mbPTH).*(vb-
mbPTH))+vbPTH;
seqmPTH    = sqrt(eqmPTH);
biaisPTH   = mbPTH-vb;
vBptH=sVbptH/nvec;
ebptH=sEbptH/nvec;
typePTH= (1-suctbptH/nvec)*100;

mbPTE      = bPTEm/(r1-1);
vbPTE      = (bPTEv-(bPTEm.*bPTEm./(r1-
1)))/(r1-2);
ecartPTE   = sqrt(vbPTE);
eqmPTE     = ((vb-mbPTE).*(vb-
mbPTE))+vbPTE;
seqmPTE    = sqrt(eqmPTE);
biaisPTE   = mbPTE-vb;
VbptE=sVbptE/nvec;
EbptE=sEbptE/nvec;
typePTE=(1-suctbptE/nvec)*100;

beta1    =
"BETAL"~"BETAD"~"BETAP"~"BETAH"~"BETAE";
beta2    = "BETAPTH"~"BETAPTE";
moyenb1  = mbL~mbD~mbP~mbH~mbE;
moyenb2  = mbPTH~mbPTE;
varb1    =
vbetaL~vbetaD~vbetaP~vbetaH~vbetaE;
varb2    = vbPTH~vbPTE;
ecart1   =
ecartL~ecartD~ecartP~ecartH~ecartE;
ecart2   = ecartPTH~ecartPTE;
eqm1     = eqmL~eqmD~eqmP~eqmH~eqmE;
eqm2     = eqmPTH~eqmPTE;
biais1   =
biaisL~biaisD~biaisP~biaisH~biaisE;
biais2   = biaisPTH~biaisPTE;
sbiais1
=(sumc(abs(biaisL)~abs(biaisD)~abs(biaisP)
~abs(biaisH)~abs(biaisE)))';
sbiais2=
(sumc(abs(biaisPTH)~abs(biaisPTE)))';
sbiais3=
(sumc(abs(biaisL[2:ca]~biaisD[2:ca]~biaisP
[2:ca]~biaisH[2:ca]~
          biaisE[2:ca])))';
sbiais4=
(sumc(abs(biaisPTH[2:ca]~biaisPTE[2:ca])))
';
beta3    =
"BETAL(h0)"~"BETAD(h0)"~"BETAD(h1)"~"BETAP
(h0)"~"BETAP(h1)";
beta4    =
"BETAH(h0)"~"BETAH(h1)"~"BETAE(h0)"~"BETAE
(h1)"~"BETAPTH"~"BETAPTE";
mvarb1   = VbLh0~VbDh0~VbDh1~VbPh0~VbPh1;
mvarb2   =
VbHh0~VbHh1~VbEh0~VbEh1~VBPTH~VBPTE;
mecart1 = EbLh0~EbDh0~EbDh1~EbPh0~EbPh1;
mecart2 =
EbHh0~EbHh1~EbEh0~EbEh1~EBPTH~EBPTE;
type1    =
typeLh0~typeDh0~typeDh1~typePh0~typePh1;
type2    =
typeHh0~typeHh1~typeEh0~typeEh1~typePTH~ty
pePTE;


"Moyenne des Betas:";" "; $beta1; " ";
moyenb1; " "; $beta2; " "; moyenb2; " ";

"Variance des Betas:"; " "; $beta1; " ";
varb1; " "; $beta2; " "; varb2; " ";

"Ecart-type des Betas:"; " "; $beta1; " ";
ecart1; " "; $beta2; " "; ecart2;
                              " ";

"Ecart Quadratique Moyen:"; " "; $beta1; "
"; eqm1; " "; $beta2; " "; eqm2; " ";

"Somme des Ecarts Quadratiques Moyens:"; "
"; $beta1; " "; sumc(eqm1)'; " ";

$beta2; " "; sumc(eqm2)'; " ";

"Somme des Ecarts Quadratiques Moyens sauf
la constante:"; " ";

$beta1; " "; sumc(eqm1[2:ca,.])'; " ";

$beta2; " "; sumc(eqm2[2:ca,.])'; " ";

"Racine de l'Ecart Quadratique Moyen:"; "
"; $beta1; " "; sqrt(eqm1); " ";

$beta2; " "; sqrt(eqm2); " ";

"Somme des Racines des Ecarts Quadratiques
Moyens:"; " "; $beta1; " ";
                        sumc(sqrt(eqm1))'; "
"; $beta2; " "; sumc(sqrt(eqm2))'; " ";

"Somme des Racines des Ecarts Quadratiques
Moyens, sauf la constante:"; " ";
$beta1; " "; sumc(sqrt(eqm1[2:ca,.]))'; "
";
 $beta2; " "; sumc(sqrt(eqm2[2:ca,.]))';
" ";

"Biais des Betas:"; " "; $beta1; " ";
biais1; " "; $beta2; " "; biais2; " ";

"Somme des biais des betas en valeurs
absolues:";
                                  " "; $beta1;
" "; sbiais1; " ";
                                       $beta2;
" "; sbiais2; " ";

"Somme des biais des betas en valeurs
absolues, sauf la constante";

" "; $beta1; " "; sbiais3; " ";
$beta2; " "; sbiais4; " ";
```

```
"Moyenne des Variances des Betas:"; " ";
$beta3; " "; mvarb1; " "; $beta4;

" "; mvarb2; " ";

"Moyenne des Ecarts-types des Betas:"; "
"; $beta3; " "; mecart1; " ";

$beta4; " "; mecart2; " ";

"Importance de l'erreur du Type I:"; " ";
$beta3; " "; type1; " ";

$beta4; " "; type2; " ";
/* aujour2=date;
tr=ethsec(aujour1,aujour2);
trt=etstr(tr);
T_trt1=tr; save T_trt1; */

ztour=ztour+1;


pourtage=(pourtage/nvec)*100;
"Pourcentage d'échantillons avec erreurs:"
pourtage;
bonchoix=bonchoix/nvec;
"pourcentage de bonnes décisions pour les
estimateurs pt" bonchoix;


endo;

/* ztourz=ztourz+1; */

/* endo; */

ztou=ztou+1;

endo;

/* aujour2=date;
trt=ethsec(aujour1,aujour2);
trtt=etstr(trt);
T_trt1=trt; save T_trt1;
"temp requis pour cette passe=" trtt; */

 et = hsec - et;
ett=etstr(et);
"temp requis pour cette passe=" ett;

end;
```

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Mass., MIT Press.

BENNINGA, S. et O.H. SARIG (1997), *Corporate Finance : A Valuation Approach*, New York, McGraw-Hill.

BLUME, M. (1971), « On the assement of risk », *Journal of Finance*, mars.

BROQUET, C., R. COBBAUT, R. GILLET et A. BERG (1997), *Gestion de portefeuille*, 3e édition, Bruxelles, DeBoeck Université, coll. « Comptabilité, contrôle et finance ».

BLUME, M. (1975), « Betas and their regression tendencies », *Journal of Finance*, juin.

DAGENAIS, M.G. et D. LABERGE (1997), « Higher moment estimators for linear regression models with errors in the variables », *Journal of Econometrics*, vol. 76, p. 193-221.

DAGENAIS, M.G. (1994), « Parameter estimation in regression models with errors in the variables and autocorrelated disturbances », *Journal of Econometrics*, vol. 64, p. 145-163.

DAGENAIS, M.G. et D. LABERGE (1992), « Discriminating between consumption and market betas using a new estimator for regressions with errors in the variables », manuscrit, CRDE, Université de Montréal.

DAGENAIS, M.G. et D. LABERGE (1992), « Estimation and testing in regression models with errors in the variables », manuscrit, CRDE, Université de Montréal.

DAGENAIS, M.G. et D. LABERGE (1991), « Estimation and testing in regression models with errors in the variables », manuscrit, CRDE, Université de Montréal.

DAMODARAN, A. (1996), *Investment Valuation*, New York, Wiley.

DAVIDSON, R. et J. MACKINNON (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, New York, Oxford University Press.

DRION, E.F. (1951), « Estimation of parameters of a straight line and of the variance of the variables, if they are both subject to error », *Indagationes Mathematicae*, vol. 13, p. 265-260.

DURBIN, J. (1954), « Errors in variables », *International Statistical Review*, vol. 22, p. 23-32.

FRANSES, P.H. et D. VAN DIJK (2000), *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge, Cambridge University Press.

FOMBY, T., C. HILL et S. JOHNSON (1984), *Advanced Econometric Methods*, New York, Springer-Verlag.

FULLER, R.J. et C. HSIA (1984), « A simplified common stock valuation model », *Financial Analyst Journal*, 40, p. 49-56.

JÄCKEL, P. (2002), *Monte Carlo Methods in Finance*, Wiley finance.

JOHNSTON, J. et J. DINARDO (1997), *Econometric Methods*, 4e édition, New York, McGraw-Hill.

JOHNSTON, J. et J. DINARDO (1999), *Méthodes économétriques*, 4e édition, Paris, Économica.

JOHNSTON, J. (1988), *Méthodes économétriques*, 3e édition, Paris, Économica.

JUDGE, G.G, C. HILL, W.R. GRIFFITHS, H. LÜTKEPOHL et T. LEE (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, John Wiley et Sons.

GEARY, R.C. (1942), « Inherent relations between random variables », *Proc. Royal Irish Academy*, vol. 47, p. 63-76.

GOURIEROUX, C. et J. JASIAK (2001), *Financial Econometrics*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

HAUSMAN, J.D. (1978), « Specification tests in econometrics », *Econometrica*, vol. 46, p. 1251-1271.

HSIAO, C. (1979), « Mesurement error in a dynamic simultaneous equations model with stationary disturbances », *Econometrica*, vol. 47, no 2.

IMHOF, P.J. (1961), « Computing the distribution of quadratic forms in normal variables », *Biometrika*, 48, p. 419-426.

MACKINNON, J. (1992), « Model specification tests and artificial regressions », *Journal of Economic Literature*, p. 102-146.

MARTENS, M. (2002), « Measuring and forecasting S&P 500 index-futures volatility usinf high-frequency data », *Journal of Futures Markets*, vol. 22, no 6, p. 497-518.

MORGENSTERN, O. (1972), *L'illusion statistique : précision et incertitude des données économiques*, Paris, Dunod.

PAL, M. (1980), « Consistent moment estimators of regression coeficients in the presence of errors in variables », *Journal of Econometrics*, vol. 14, p. 349-364.

RACICOT, F.E. (1993), « Estimation et tests en présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives », manuscrit, CRDE, Université de Montréal.

RACICOT, F.E. (1999), « Estimation et tests du modèle de hasard Weibull : une application au épisodes de monoparentalité au Canada », document de travail, CRG-ESG 16-99.

RACICOT, F.E. (2000), « Estimation et tests en présence d'erreurs de mesure sur les variables explicatives : vérification empirique par la méthode de simulation Monte Carlo », *Centre de recherche en gestion*, *série Finance empirique et quantitative*, document de travail CRG-09-2000.

RACICOT, F.E. et R. THÉORET (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

RACICOT, F.E. (2003), « Erreurs de mesure sur les variables économiques et financières », chap. 3, thèse de doctorat : *Trois essais sur l'analyse des données économiques et financières*, miméo, Université du Québec à Montréal.

STATISTIQUE CANADA (1988), Family Expenditure in Canada, 1986, Survey of Family Expenditure, Public Use Microdata File.

THEIL, H. (1971), *Principles of Econometrics*, New York, John Wiley et Sons.

THEIL, H. et A.S. GOLDBEGER (1961), « On pure and mixed statistical estimation in economics », *International Economic Review*, p. 65-78.

WHITE, H. (2001), *Asymptotic Theory for Econometricians*, Orlando, Academic Press.

ANNEXE

1

INTRODUCTION À L'ÉCONOMÉTRIE FINANCIÈRE

PARTIE I : LE MODÈLE CLASSIQUE

Les distributions

Distribution normale

La variable aléatoire X suit une distribution normale

- moyenne μ et variance σ^2
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- fonction de densité :

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Théorème central limite : Plusieurs fonctions importantes d'observations comme la moyenne tendent à être distribuées normalement dans de grands échantillons, cela quelle que soit la distribution de la population originale.

Distributions reliées à la normale

- la chi-carré
- la t (Student)
- la F (Fisher)

Distribution chi-carré

Le carré d'une variable normale standard a une distribution chi-carré avec un degré de liberté.

- $Z \sim N(0,1)$
- $Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$

Si $Z_1, \ldots, Z_n$ sont des variables normales standard, alors :

$$Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

La distribution t

Soit $Z \sim N(0,1)$ et une autre variable aléatoire qui suit une $\chi^2_{(r)}$

Alors :

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(r)}}{r}}}$$

suit une distribution t avec r degrés de liberté ($t_{(r)}$).

À mesure que r se rapproche de l'infini, la distribution t se rapproche de la normale.

La distribution F

Soit $\chi^2_{(r_1)}$ et $\chi^2_{(r_2)}$ des variables chi-carré indépendantes avec r_1 et r_2 degrés de liberté.

Alors :

$$F = \frac{\chi^2_{(r_1)} / r_1}{\chi^2_{(r_2)} / r_2}$$

suit une distribution F avec pour paramètres r_1 et r_2, qui sont respectivement les degrés de liberté du numérateur et du dénominateur.

Notation : $F_{(r_1,r_2)}$

Le modèle de régression simple

Soit à estimer les paramètres du modèle suivant :

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + \varepsilon_t$$

ε_t : erreur de spécification du modèle.

Hypothèses

- le modèle est linéaire en x
- les valeurs de x sont observées sans erreur (x non stochastique)

- $E(\varepsilon_t) = 0$. En moyenne, le modèle est bien spécifié ; l'erreur moyenne est nulle.
- Hypothèse de l'homoscédasticité : $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$, i.e. la variance du terme d'erreur est constante. Sinon, la variance est hétéroscédastique.
- Absence d'autocorrélation au niveau des erreurs résiduelles : $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$.
- L'erreur est indépendante de la variable explicative : $Cov(x_t, \varepsilon_t) = 0$.

Estimation des coefficients a_0 et a_1

Critère : moindres carrés ordinaires (MCO) : minimiser la somme des erreurs au carré.

$$\sum (y_t - a_0 - a_1 x_t)^2$$

Se servir de la règle de la chaîne pour annuler les dérivées :

$$z_t = y_t - a_0 - a_1 x_t$$

$$\frac{\partial \sum}{\partial a_0} = \frac{\partial \sum z^2}{\partial z_t} \frac{\partial z_t}{\partial a_0} = 2 \sum z_t (-1) = \sum z_t = 0$$

$$\frac{\partial \sum}{\partial a_1} = \frac{\partial \sum z_t^{\,2}}{\partial z_t} \frac{\partial z_t}{\partial a_1} = 2 \sum z_t (-x_t) = \sum x_t z_t = 0$$

Les deux équations normales :

$$\sum z_t = \sum y_t - n\hat{a}_0 - \hat{a}_1 \sum x_t = 0$$

$$\sum x_t z_t = \sum x_t y_t - \hat{a}_0 \sum x_t - \hat{a}_1 \sum x_t^2 = 0$$

Solution :

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

Quand le terme constant est nul, on peut démontrer que :

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}$$

On peut démontrer que :

$$V(\hat{a}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

et que :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_t^2}{n - 2}$$

Le ratio :

$$\frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}$$

suit une distribution de Student avec (n – 2) degrés de liberté (n : nombre d'observations).

Degrés de liberté : nombre de valeurs restant réellement à la disposition après une estimation statistique.

Si un échantillon comprend n valeurs, il faut retirer le nombre de paramètres estimés.

Ici on a estimé deux paramètres : a_0 et a_1 : on a perdu deux degrés de liberté.

Nombre de degrés de liberté : (n – 2).

Test de coefficient et intervalle de confiance

H0 : le coefficient a_1 n'est pas significativement différent de 0.

H1 : le coefficient a_1 est significativement différent de 0.

On demande également d'établir l'intervalle de confiance de a_1 au seuil de 95 %.

On fait ici un test pour un alpha de 5 % des deux côtés de la distribution de Student : test bilatéral.

Si :

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} > t_{n-2}^{0,025}$$

alors on rejette l'hypothèse H0 et a_1 est significativement différent de 0.

$t_{n-2}^{0,025}$ est égal à 1,96 dans les grands échantillons (n > 30).

Intervalle de confiance pour a_1 :

$$a_1 = \hat{a}_1 \pm \hat{\sigma}_{\hat{a}_1} \times t_{n-2}^{\alpha/2}$$

Pour un alpha de 5 % :

$$a_1 = \hat{a}_1 \pm 1,96\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}$$

Il y a un risque de 5 % que le véritable coefficient a_1 se trouve à l'extérieur de cet intervalle.

Mesure de la performance globale d'une estimation : le R^2

$$R^2 = \frac{\sum \left(\hat{y}_t - \bar{y}\right)^2}{\sum \left(y_t - \bar{y}\right)^2}$$

où $\hat{y}_t$ est la valeur de y_t estimée par la régression.

Plus R^2 est élevé, meilleure est l'estimation des MCO.

Un test F est relié à la statistique R^2 :

$$F^* = \frac{R^2}{\left(1 - R^2\right) / (n - 2)}$$

avec 1 et (n – 2) degrés de liberté.

Si :

$$F^* > F^{0,05}_{1,n-2}$$

la régression est concluante : x affecte significativement y.

Le modèle de régression multiple

Il y a maintenant plusieurs variables explicatives qui expliquent y :

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \ldots + a_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

Sous forme matricielle :

$$Y = Xa + \varepsilon$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & . & . & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & & & x_{k2} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & & & x_{kn} \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_k \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Estimation du vecteur de paramètres.

Nous voulons estimer le vecteur a.

Critère des MCO

$$\text{Min} : \varepsilon^T\varepsilon = \left(Y - Xa\right)^T\left(Y - Xa\right) = \text{Min } S$$

Puisque :

$$Y^TXa = a^TX^TY$$

$$S = Y^TY - 2a^TX^TY + a^TX^TXa$$

Minimisons S par rapport à a :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2X^TY + 2X^TX\hat{a} = 0$$

$$\hat{a} = \left(X^TX\right)^{-1}X^TY$$

Équations normales :

$$\left(X^T X\right)\hat{a} = X^T Y$$

Dérivation de la matrice variance-covariance de $\hat{a}$.

$$\hat{a} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$
$$\hat{a} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \left(Xa + \varepsilon\right)$$
$$\hat{a} = a + \left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon$$

Matrice variance-covariance de :

$$\Omega = E\left[\left(\hat{a} - a\right)\left(\hat{a} - a\right)^T\right]$$
$$\Omega = E\left[\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\varepsilon^T X\left(X^T X\right)^{-1}\right]$$
$$\Omega = \left(X^T X\right)^{-1} X^T E\left(\varepsilon\varepsilon^T\right) X\left(X^T X\right)^{-1}$$

Puisque :

$$E\left(\varepsilon\varepsilon^T\right) = \sigma^2 I$$
$$\Omega = \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1}$$

L'estimateur de la variance du terme d'erreur est donné par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{n - (k+1)} = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{n - k - 1}$$

D'où l'estimateur de la matrice variance-covariance :

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}^2\left(X^T X\right)^{-1}$$

Les variances des coefficients de régression sont calculés à partir de la diagonale principale de $\left(X^T X\right)^{-1}$.

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_0} = \hat{\sigma}^2 \times \text{premier élément de la diagonale de } \left(X^T X\right)^{-1}$$
$$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_1} = \hat{\sigma}^2 \times \text{second élément de la diagonale de } \left(X^T X\right)^{-1}$$

et ainsi de suite.

Tests statistiques

Test de Wald

Équation de l'analyse de la variance :

$$\sum\left(y_t - \bar{y}\right)^2 = \sum\left(\hat{y}_t - \bar{y}\right)^2 + \sum e_t^2$$

$$SCT = SCE + SCR$$

SCT : somme des carrés totaux

SCE : somme des carrés expliqués par la régression

SCR : somme des carrés résiduels

Test de Wald

Soit le modèle suivant :

$$y_t = a_1 + a_2X_2 + ... + a_mX_m + a_{m+1}X_{m+1} + a_kX_k + \varepsilon_t$$

On appelle ce modèle : le modèle non restreint.

On veut tester l'hypothèse :

$$H0 : a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_k = 0$$

Modèle restreint :

$$y_t = a_1 + a_2X_2 + \ldots + a_mX_m + \nu_t$$

On estime les deux équations par les MCO.

On obtient :

- SCR_R : somme des carrés résiduels du modèle restreint
- SCR_{NR} : somme des carrés résiduels du modèle non restreint

Supposons que les variables omises aient très peu d'effet sur y :
$SCR_R - SCR_{NR}$ devrait être alors très faible ($SCR_R > SCR_{NR}$).

Construire un test F à partir de cet écart : le test de Wald.

Degrés de liberté associés à SCR_R : n – m (nombre d'observations – nombre de paramètres à estimer)

Degrés de liberté associés à SCR_{NR} : n – k

Degrés de liberté associés à $(SCR_R - SCR_{NR})$: (k – m)

Test F :

$$F^* = \frac{\left(SCR_R - SCR_{NR}\right) / (k - m)}{SCN_{NR} / \left(n - k\right)}$$

Si

$$F^* > F_{c(k-m,n-k)}$$

F_c : valeur critique de F (table)

Alors on rejette H0 : les variables omises regroupées ont une influence significative sur y.

L'autocorrélation des erreurs résiduelles

On suppose maintenant : $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) \neq 0$, c'est-à-dire qu'il y a autocorrélation des erreurs résiduelles : les estimateurs obtenus par la méthode des MCO sont sans biais, mais ils ne sont plus à variance minimale.

Problème fréquent dans les séries temporelles

On veut trouver un estimateur qui ait les mêmes propriétés que les MCO : sans biais et à variance minimale.

Soit Ω la matrice variance-covariance des termes résiduels

On peut démontrer que cet estimateur est le suivant :

$$\hat{a} = \left(X^T \Omega^{-1} X\right)^{-1} \left(X^T \Omega^{-1} y\right)$$

C'est l'estimateur des moindres carrés généralisés.

Test de Durbin-Watson pour détecter l'autocorrélation

Soit :

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \nu_t$$

où ρ est le coefficient d'autocorrélation.

Hypothèses :

H0 : $\rho = 0$: absence d'autocorrélation
H1 : $\rho \neq 0$: présence d'autocorrélation

Statistique Durbin-Watson (DW) :

$$DW = \frac{\sum \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\right)^2}{\sum \varepsilon_t^2}$$

Règle générale :

i) Si DW est rapproché de 2, on accepte H0 : il n'y a pas d'autocorrélation

ii) Si DW est près de 0 : on rejette H0 en faveur d'une autocorrélation positive des résidus.

Test de Breusch-Godfrey (1978)

Autocorrélation d'ordre p :

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + \nu_t$$

Modèle général

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + \ldots + a_k x_{kt} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + \nu_t$$

Test :

i) Calculer le résidu ε_t par la méthode des MCO

ii) Estimer par les MCO l'équation artificielle suivante :

$$\varepsilon_t = a_0 + a_1 x_{1t} + \ldots + a_k x_{kt} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + \nu_t$$

H0 : $\rho 1 = \rho 2 = \ldots = \rho_p = 0$

Faire un test avec la statistique LM (*Lagrange multiplier*) égale à $(n - p)R^2$ (produit du nombre d'observations disponibles par R^2) ~ $\chi^2(p)$

Si $(n - p) \times R^2 > \chi^2(p)$ au seuil alpha, on rejette H0, soit l'hypothèse d'indépendance des erreurs.

Pour purger le modèle de l'autocorrélation, on transforme les données comme suit :

$$My = \begin{pmatrix} y_2 - \rho y_1 \\ y_3 - \rho y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{pmatrix} \qquad Mx_k = \begin{pmatrix} x_{k2} - \rho x_{k1} \\ x_{k3} - \rho x_{k2} \\ . \\ . \\ . \\ x_{kn} - \rho x_{kn-1} \end{pmatrix}$$

Et l'on applique les MCO sur les données ainsi transformées.

Pour estimer ρ, on régresse directement ε_t sur ε_{t-1}, c.-à-d. :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum \varepsilon_t^2}$$

L'hétéroscédasticité

La variance du terme d'erreur n'est pas constante.

La matrice variance-covariance des résidus a l'allure suivante :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon 1}^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon 2}^2 & 0 & . & . & 0 \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_{\varepsilon n}^2 \end{bmatrix}$$

Problème fréquent dans les coupes instantanées ou transversales (régression à un point donné du temps)

Conséquences de l'hétéroscédasticité (les mêmes que l'autocorrélation) :

1) estimateur des MCO sans biais
2) l'estimateur des MCO n'est plus à variance minimale

Test de White (1980) pour détecter l'hétéroscédasticité

On se base sur la régression artificielle suivante pour détecter l'hétéroscédasticité :

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1 x_{1t} + b_1 x_{1t}^2 + a_2 x_{2t} + b_2 x_{2t}^2 + c_1 x_{1t} x_{2t} + \nu_t$$

y ne dépend ici que de x_1 et de x_2.

H0 : absence d'hétéroscédasticité.

Test LM :

$$nR^2 > \chi_c^2(p)$$

Si $nR^2 > \chi_c^2(p)$

p : nombre de variables explicatives dans la régression artificielle

On rejette H0.

Correction de l'hétéroscédasticité

La matrice variance-covariance dans la méthode des moindres carrés généralisés est la suivante :

$$\Omega_{\hat{a}} = \left(X^T \Omega_\varepsilon X\right)^{-1}$$

On recourt à la matrice de White (construite à partir de la régression artificielle précédente) pour estimer Ω_ε.

On peut alors calculer la matrice variance-covariance des coefficients de régression de façon à ajuster les écarts types de ces coefficients, nécessaires aux tests d'inférence statistique.

Les coefficients de régression comme tels sont ceux qui découlent de la méthode des MCO.

Autre façon de corriger pour l'hétéroscédasticité : les moindres carrés pondérés

On connaît la forme de l'hétéroscédasticité :

$$\sigma_{\varepsilon t}^2 = \sigma_t^2 = \sigma^2 Z_t^2$$

Soit l'équation de y_t où on a détecté de l'hétéroscédasticité :

$$y_t = a_0 + a_1 x_{t1} + a_2 x_{t2} + \varepsilon_t$$

Procédure de correction pour l'hétéroscédasticité :

i) Diviser chacun des termes de l'équation par σ_t :

$$\frac{y_t}{\sigma_t} = a_0 \frac{1}{\sigma_t} + a_1 \frac{x_{t1}}{\sigma_t} + a_2 \frac{x_{t2}}{\sigma_t} + \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$$

c.-à-d. :

$$\frac{y_t}{Z_t} = a_0 \frac{1}{Z_t} + a_1 \frac{x_{t1}}{Z_t} + a_2 \frac{x_{t2}}{Z_t} + \frac{\varepsilon_t}{Z_t}$$

ii) Appliquer les MCO sur l'équation ainsi transformée.

Les variables instrumentales

Soit le modèle suivant :

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Or :

$$E\left(X^T\varepsilon\right) \neq 0$$

L'estimateur des MCO n'est pas convergent.

Les coefficients estimés ne convergent pas vers ceux de la population.

Technique de correction :

- Trouver un ensemble Z de variables instrumentales telles que :

$$E\left(Z^T\varepsilon\right) = 0$$
$$E\left(Z^TX\right) \neq 0$$

- Multiplier y par Z :

$$Z^Ty = Z^TX\beta + Z^T\varepsilon$$

À la limite, le dernier terme disparaît et l'on estime β comme suit :

$$\hat{\beta} = \left(Z^TX\right)^{-1}Z^Ty$$

C'est l'estimateur des variables instrumentales.

Matrice variance-covariance des coefficients estimés :

$$\hat{\beta} = \left(Z^TX\right)^{-1}Z^T\left(X\beta + \varepsilon\right) = \beta + \left(Z^TX\right)^{-1}Z^T\varepsilon$$
$$V\left(\hat{\beta}\right) = E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)\left(\hat{\beta} - \beta\right)^T\right]\left(Z^TX\right)^{-1}Z^TE\left(\varepsilon\varepsilon^T\right)Z\left(Z^TX\right)^{-1}$$
$$V\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2\left(Z^TX\right)^{-1}Z^TZ\left(Z^TX\right)^{-1}$$

PARTIE II : LES SÉRIES TEMPORELLES

Le maximum de vraisemblance

Soit le modèle suivant à une variable explicative :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

Le terme d'erreur suit une distribution normale.

Sa fonction de densité est de :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)} e^{\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$$

La fonction de vraisemblance des termes d'erreur est la suivante :

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{\frac{-\sum (y_t - \alpha - \beta x_t)^2}{2\sigma^2}}$$

Pour trouver les paramètres, il est préférable de maximiser le logarithme de la fonction de vraisemblance plutôt que son niveau.

$$\ln L = -n \ln \sigma - n \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \sum \left[\frac{\left(y_t - \alpha - \beta x_t\right)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$\ln L = -n \ln \sigma - n \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \frac{SEC}{2\sigma^2}$$

où SEC : somme des erreurs au carré.

Maximiser ln L par rapport à alpha et à bêta revient à minimiser SEC par rapport à ces deux paramètres, mais la minimisation de SEC donne les MCO.

L'estimateur MCO équivaut à l'estimateur maximal de vraisemblance si le terme d'erreur est distribué normalement.

Soit à désigner les paramètres de la régression par θ.

La condition nécessaire pour maximiser ln L :

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont très attrayants en raison de leurs propriétés dans les grands échantillons :

1) La convergence : $p \lim \hat{\theta}_{ML} = \theta$, c.-à-d. les estimateurs convergent vers leur vraie valeur dans les grands échantillons (ML : *maximum likelihood*).

2) La normalité asymptotique : $\hat{\theta}_{ML} \overset{a}{\sim} N\left[\theta, \left[I(\theta)\right]^{-1}\right]$, où I($\theta$) est égal à la valeur négative de l'espérance des dérivées secondes de la fonction de vraisemblance.

$I(\theta)$: matrice d'information (elle donne de l'information sur la courbure de la fonction de vraisemblance).

3) Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont asymptotiquement efficients (à variance minimale).

La matrice variance-covariance des estimateurs du maximum de vraisemblance doit être estimée.

$$\left[I(\theta)\right]^{-1} = \left[-E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right]\right]^{-1}$$

Estimateur BHHH (Berndt *et al.*, 1974) :

$$\left[\hat{I}(\hat{\theta})\right]^{-1} = \left[\hat{G}'\hat{G}\right]^{-1}$$

où :

$$\hat{g}_i = \frac{\partial \ln f(x_i, \hat{\theta})}{\partial\hat{\theta}}$$

la matrice des espérances des dérivées secondes étant la matrice-covariance du vecteur des dérivées premières.

La méthode du maximum de vraisemblance est très utilisée pour l'estimation des modèles des séries temporelles.

Elle est particulièrement adaptée à la prise en compte des aspects non linéaires de ces modèles.

Ces non-linéarités apparaissent dans la portion MA du modèle général ARIMA[1].

Les formes des modèles des séries temporelles

But de la théorie économétrique des séries temporelles : estimer des équations différentielles stochastiques.

Modèles autorégressifs d'ordre p : AR(p)

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \mu$$

On omet le terme constant, car y est exprimé en déviation de la moyenne.

Forme la plus simple du modèle autorégressif : la **marche aléatoire** :

$$y_t = y_{t-1} + \mu_t$$

1. Les aspects techniques de l'estimation d'un modèle ARIMA par la méthode du maximum de vraisemblance apparaissent aux pages 480 et suivantes.

Forme non stationnaire (comme nous le verrons).

Marche aléatoire : souvent utilisée pour vérifier l'efficience des marchés financiers.

Modèles moyennes mobiles d'ordre q : MA(q)

$$y_t = \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \beta_q\varepsilon_{t-q}$$

Les bêtas peuvent être positifs ou négatifs.

y_t est une combinaison linéaire de variables aléatoires : de simples bruits blancs.

Modèle ARMA(p,q) : combinaison des modèles AR(p) et MA(q)

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \beta_q\varepsilon_{t-q}$$

Quelques concepts importants en analyse des séries temporelles

La stationnarité d'une série temporelle

Une série temporelle est stationnaire si :

i) $E(y_t) = \mu \quad \forall t$

ii) $V(y_t) < \infty \quad \forall t$

iii) $\text{cov}(y_t, y_{t-k})$ est indépendante du temps. Elle ne dépend que des intervalles de temps.

L'ordre d'une série temporelle

On rend stationnaire une série temporelle en la différenciant

Une série temporelle est intégrée d'ordre 1, désigné par I(1), si :

- pour la rendre stationnaire, il faut la différencier une fois
  Ex. : la marche aléatoire est une série intégrée d'ordre 1.

En prenant la première différence :

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

Ou, en recourant à l'opérateur de retard, L

$$\begin{aligned} Ly_t &= y_{t-1} \\ L^2y_t &= y_{t-2} \\ (1 - L)y_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

Une série est intégrée d'ordre 2 s'il faut la différencier deux fois pour la rendre stationnaire.

$$(1 - L)^2 y_t = (1 - 2L + L^2)\, y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

Une série est intégrée d'ordre d s'il faut la différencier d fois pour la rendre stationnaire.

Modèle ARIMA(p,d,q)

où p est le nombre de décalages de AR

d est associé à I, soit l'ordre d'intégration de la série

q est le nombre de décalages de MA

Fonctions d'autocorrélation totale et partielle

Les fonctions d'autocorrélation servent à construire des corrélogrammes, soit la représentation graphique des coefficients d'autocorrélation pour divers décalages.

Le coefficient **d'autocorrélation totale** (**ACF**) entre y_t et y_{t-k} se définit comme suit :

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}$$

Dans de grands échantillons (n > 30), le coefficient d'autocorrélation tend vers une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type $1/\sqrt{n}$.

EViews fournit directement sur son corrélogramme cet intervalle de confiance au seuil $\alpha = 5\,\%$:

$$\rho_k = 0 \pm 2\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Si un coefficient d'autocorrélation calculé se situe à l'intérieur de ces bornes, il n'est pas significativement différent de 0 au seuil de 5 %.

Les coefficients d'autocorrélation partielle (**PACF**) s'évaluent comme suit :

On estime d'abord le AR(1) suivant par les MCO :

$$y_t = a_{11} y_{t-1} + \mu_t$$

$\hat{a}_{11}$: coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre 1.

Puis on estime le AR(2) suivant :

$$y_t = a_{21} y_{t-1} + a_{22} y_{t-2} + \mu_t$$

on obtient $\hat{a}_{22}$: coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre 2.

Et ainsi de suite pour générer les coefficients d'autocorrélation partielle des autres retards.

EViews fournit l'intervalle de confiance pour les coefficients d'autocorrélation partielle au seuil de 5 % : $\pm 2/\sqrt{n}$.

Si un coefficient calculé se situe à l'intérieur de ces bornes, il n'est pas significativement différent de 0 au seuil de 5 %.

Les principes à suivre pour identifier la forme d'une série temporelle sont les suivants :

i) Si le corrélogramme des coefficients d'autocorrélation totale demeure près de 0 après un certain délai, disons q, alors le modèle approprié est un MA(q).

ii) Si le corrélogramme des coefficients d'autocorrélation partielle demeure près de 0 après un certain délai, disons p, alors le modèle approprié est un AR(p).

iii) Si aucune de ces deux possibilités ne se présente, mais si les deux corrélogrammes se dirigent progressivement vers 0, on devrait commencer avec un ARMA (1,1)[2].

N.B. On suppose que les tests de stationnarité ont été effectués avant d'entreprendre cette analyse.

Conséquences de la non-stationnarité des séries temporelles

Soit le modèle suivant :

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t$$

Soit à considérer les cas suivants :

i) y et x sont des séries stationnaires.

Le modèle de régression classique des MCO est alors approprié.

ii) y et x sont des séries non stationnaires.

Granger et Newbold (1974) disent qu'on peut avoir dans ce cas une régression fallacieuse (*spurious*) si l'on recourt aux MCO.

Autrement dit, la régression par les MCO n'a aucun sens.

iii) x et y ne sont pas intégrés du même ordre.

Les régressions utilisant ces variables non transformées n'ont pas de sens.

iv) x et y sont intégrés du même ordre et le terme d'erreur est stationnaire lorsque ces variables ne sont pas différenciées.

On a alors des variables **cointégrées**. L'estimateur des MCO est superconvergent.

---

2. Pour plus de détails sur la relation entre les corrélogrammes et la forme du modèle ARIMA, voir : Mills, T. (1990), *Time Series Techniques for Economists*, Cambridge (R.-U.), Cambridge University Press, chap. 8, p. 130.

Test Dickey-Fuller (test de racine unitaire) pour vérifier la stationnarité

La série y_t n'est pas stationnaire si en effectuant la régression suivante :

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

on trouve que alpha n'est pas significativement différent de 1.

On dit alors que le processus a une **racine unitaire**.

Les règles habituelles de l'inférence statistique ne s'appliquent pas pour effectuer ce test.

Test de Dickey-Fuller (1979)

On transforme l'équation précédente de la façon suivante pour des raisons purement statistiques :

$$y_t - y_{t-1} = \alpha y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta y_t = (\alpha - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$$

L'hypothèse H0 est la suivante :

$$H0 : \alpha - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 1$$

il existe une racine unitaire et la série n'est pas stationnaire.

Si :

$$t_{\hat{\alpha}} \text{ calculé} > t \text{ tabulé (table Dickey-Fuller)}^3$$

on accepte H0 et la série n'est pas stationnaire.

On différencie alors y une fois de plus de façon à la rendre stationnaire.

Et l'on refait le test Dickey-Fuller pour vérifier si tel est le cas.

Habituellement, après une seule différenciation, les séries financières sont stationnaires.

On peut alors se servir des séries ainsi transformées pour découvrir le bon modèle ARIMA.

En fait, on doit faire le test Dickey-Fuller sur les 3 modèles suivants pour savoir si une série comporte une racine unitaire :

i) Le modèle AR(1) simple :

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ii) Le modèle AR(1) avec constante (drift) :

$$y_t = \beta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

3. N'oublions pas que la table Dickey-Fuller est formulée en valeurs négatives.

iii) Le modèle AR(1) avec trend temporel (t) :

$$y_t = c + bt + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si l'hypothèse H0 est retenue dans l'un de ces trois modèles, le processus est alors non stationnaire.

Mentionnons qu'il existe d'autres tests de la stationnarité :

i) les tests de Dickey-Fuller augmentés (1981) ;

ii) le test de Phillips et Perron (1988).

La sélection d'un modèle selon la méthode de Box et Jenkins (1976)

1) Examiner la représentation graphique de la série, les fonctions d'autocorrélation totale et partielle.
2) B.-J. suggèrent de mettre en première différence toute série qui ne semble pas stationnaire. On recourt maintenant à des techniques plus strictes pour juger de la stationnarité d'une série (test Dickey-Fuller et autres).
3) La parcimonie (soit le minimum de coefficients à estimer) est l'une des règles de la sélection d'un modèle.
4) Il est important que le modèle retenu ne présente pas d'autocorrélation des erreurs résiduelles.

La régression risque d'être fallacieuse si le R^2 est très élevé, mais que la statistique DW est près de 0.

Une façon de vérifier si les résidus sont un bruit blanc dans le cadre d'une série temporelle est de calculer la statistique Q (Box-Pierce 1970).

$$Q = n\sum_{k=1}^{K} r_k^2$$

r_k : coefficient d'autocorrélation des résidus d'ordre k

n : nombre d'observations

K : nombre présélectionné d'autocorrélations (disons 20).

Sous H0 (absence d'autocorrélation ou bruit blanc)

$$Q \sim \chi^2_{(K-p-q)}$$

Si Q excède la valeur critique du chi-carré, les résidus ne sont pas un bruit blanc.

Statistique plus récente : LJB (statistique Ljung-Box – 1978)

$$LJB = n'(n'+2)\sum_{k=1}^{K}\left[\frac{r_k^2}{n'-k}\right]$$

$n' = (n - d)$, soit le nombre d'observations restantes une fois que la série a été différenciée d fois pour la rendre stationnaire.

Sous l'hypothèse H0 :

$$LJB \sim \chi^2_{(K-p-q)}$$

Le critère d'acceptation ou de refus de H0 : le même que pour la statistique Q.

Dans le processus de sélection d'un modèle ARMA(p,q), une augmentation de p ou de q fait diminuer la somme des résidus au carré mais fait aussi diminuer le nombre de degrés de liberté, ce qui va dans le sens opposé à la parcimonie.

Il faut faire un arbitrage entre ces deux facteurs.

Critères utilisés à cette fin :

- le critère AIC (*Akaike Information Criterion*)
- le critère SBC (*Schwartz Bayesian Criterion*)

Définition des critères :

$$AIC = T \ln (\text{somme des résidus au carré}) + 2n$$
$$SBC = T \ln (\text{somme des résidus au carré}) + n \ln (T)$$

n : nombre de paramètres estimés (p et q)

T : nombre d'observations disponibles.

Modèle A supérieur au modèle B si ces critères sont plus faibles pour le premier que pour le second.

À noter que le critère SBC a des propriétés asymptotiques supérieures à celle du critère AIC.

Les modèles GARCH

Les modèles économétriques ARCH et GARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity* et *generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*)

Ces modèles permettent de modéliser le comportement de la variance conditionnelle du terme aléatoire d'une équation économétrique dans le temps.

Soit l'équation suivante exprimant l'évolution de la variable y en fonction de son espérance mathématique u et d'un terme aléatoire ε, encore appelé terme d'erreur ou innovation :

$$y_t = u + \varepsilon_t$$

On suppose que l'innovation suit le processus multiplicatif suivant, proposé par Engel en 1982 :

$$\varepsilon_t = \nu_t \sqrt{h_t}$$
$$\nu_t \sim N(0,1)$$

La variance conditionnelle de l'innovation ε_t est donc égale à :

$$\sigma_t^2 = E(h_t)$$

Cette variance étant conditionnelle, elle ne dépend que d'informations connues. On peut donc écrire :

$$\sigma_t^2 = E(h_t) = h_t$$

la variance conditionnelle de l'innovation, égale à h_t, suit un processus hétéroscédastique autorégressif d'ordre 1, représenté par ARCH(1), si h_t est égal à :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

La variance de l'innovation est donc conditionnelle à l'évolution de l'innovation au carré décalée d'une période.

Le processus serait d'ordre 2, i.e. ARCH(2), si les deux premiers décalages de l'innovation au carré apparaissaient dans l'équation de la variance conditionnelle, i.e. :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2$$

et, plus généralement, ARCH(q) représente un processus de q retards sur l'innovation au carré.

Engle a proposé d'estimer le modèle décrit précédemment en deux étapes.

- On estime d'abord le modèle par la méthode des moindres carrés ordinaires.
- On calcule les résidus estimés de cette équation et on calcule $\hat{h}_t$ en utilisant les résidus décalés estimés élevés au carré, leur nombre étant déterminé par l'ordre du processus ARCH.

Par exemple, si le processus est ARCH(2), on aura :

$$\hat{h}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2$$

On applique ensuite les moindres carrés pondérés (*weighted least squares* ou WLS) à l'équation de y_t en divisant toutes les variables par $\sqrt{\hat{h}_t}$.

On obtient alors des estimateurs asymptotiquement efficients des paramètres, le terme d'erreur étant purgé de son hétéroscédasticité.

En effet, à la suite de cette transformation, le terme d'erreur de l'équation est de :

$$\text{terme d'erreur} = \frac{\nu_t \sqrt{h_t}}{\sqrt{h_t}} = \nu_t$$

Et sa variance est de :

$$\text{variance(terme d'erreur)} = \text{var}(\nu_t) = 1$$

On renoue donc avec l'homoscédasticité. Les estimateurs seront asymptotiquement efficients.

Il est maintenant pratique courante d'estimer les deux équations du modèle simultanément, soit l'équation de y_t et celle de la variance hétéroscédatique de l'innovation, en recourant à la méthode du maximum de vraisemblance, qui intègre facilement les aspects non linéaires de ce modèle.

Pour vérifier la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle, Engel a proposé le test suivant.

Soit le modèle :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

i) On estime cette équation par la méthode des MCO.

ii) On calcule les résidus de l'équation estimée :

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_t$$

iii) On effectue la régression suivante :

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + ... + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2$$

H0 : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$, c.-à-d. le processus n'est pas un AR(p)

On recourt à la statistique LM pour effectuer le test

$$(n - p)R^2 \sim \chi^2_{(p)}$$

On rejette H0 si la chi-carré calculée dépasse sa valeur critique tabulée.

Le modèle **GARCH (1,1)** introduit le premier décalage de la variance conditionnelle dans l'équation de la variance conditionnelle en plus du premier décalage de l'innovation au carré :

$$h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Le modèle GARCH (1,1) : fort prometteur pour prévoir la variance conditionnelle du prix de l'action qui entre directement dans le calcul du prix de l'option écrite sur cette action.

La forme générale de ce modèle est représentée par un GARCH (p,q) :

p est le nombre de retards sur la variance conditionnelle et q, le nombre de retards sur l'innovation au carré.

À noter la parenté entre le modèle GARCH et le modèle général ARMA(p,q), très connu dans la littérature des séries temporelles.

Modèle GARCH-M, encore désigné par *GARCH-in-Mean*

L'écart-type du terme d'erreur apparaît directement comme variable explicative dans l'équation de y.

Cet écart-type tient lieu de prime de risque.

Supposons que y (disons le taux à terme) obéisse à l'équation suivante :

$$y_t = \alpha_0 + \beta \sigma_t + u_t$$

Le terme u_t suit le processus suivant :

$$u_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

Et la variance conditionnelle de ε_t est égale à :

$$E\left(\varepsilon_t^2 \middle| \Phi(t-1)\right) = \sigma_t^2 = \lambda_0 + \varphi_1\sigma_{t-1}^2 + \varphi_2\sigma_{t-2}^2 + \lambda_1\varepsilon_{t-1}^2$$

où Φ_{t-1} désigne l'ensemble de l'information disponible jusqu'à cette période.

Cette dernière équation représente un processus GARCH(2,1), car elle comporte deux retards sur la variance et un retard sur le terme d'erreur.

Ces trois équations peuvent être estimées simultanément par la méthode du maximum de vraisemblance.

L'ajout de σ_t dans l'équation de y_t (ici le taux à terme) est une tentative d'introduire une mesure du risque dans le processus qui génère y_t.

Si la somme des coefficients suivants :

$$\lambda_1 + \varphi_1 + \varphi_2$$

se rapproche de l'unité, on se rapproche d'un IGARCH, soit un GARCH intégré d'ordre 1.

Une série chronologique intégrée d'ordre 1 est non stationnaire.

Cela indique alors que l'impact de chocs stochastiques tend à persister sur y_t.

Cette persistance peut être associée à la présence d'extrémités épaisses (*fat tails*) du côté de la distribution de y_t.

On parle alors de distribution « leptocurtique ».

ESTIMATION D'UN MODÈLE ARIMA(P,Q) PAR LA TECHNIQUE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Mills (1990)[4] rapporte la technique générale suivante pour estimer les paramètres d'un modèle ARIMA.

Soit le modèle ARIMA suivant :

$$\phi(B)\,\nabla^d y_t = \theta_0 + \theta(B)\,\varepsilon_t$$

où $\phi(B)$: polynôme des coefficients du processus AR ;

$\theta(B)$: polynôme des coefficients du processus MA ;

∇^d : opérateur d'intégration d'une série

y_t : peut être une transformation[5] de la série observée z_t : $y_t = g(z_t)$

Soit à désigner par w le vecteur des variables transformées y_t de façon à les rendre stationnaires.

---

4. Mills, T.C. (1990), *Time Series Techniques for Economists*, Cambridge (R.-U.), Cambridge University Press, chap. 8.
5. Par exemple, une transformation Box-Cox.

La probabilité conjointe des termes d'erreur est alors de :

$$p\left(\varepsilon\middle|\phi,\theta,\sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}$$

La fonction de vraisemblance des paramètres à estimer peut être écrite comme suit, selon Newbold (1974)[6] :

$$L\left(\phi,\theta,\sigma^2\middle|w\right) = g_1\left(\phi,\theta,\sigma^2\right) e^{\left[-\frac{1}{2\sigma^2}S(\phi,\theta)\right]}$$

g_1 est une fonction des paramètres à estimer.

S(.) est pour sa part égal à :

$$S\left(\phi,\theta\right) = \sum_{t=1-p-q}^{n} E\left(\mu_t\middle|w\right)^2$$

$$\mu_t = \begin{cases} \varepsilon_t & t = 1,2,...,n \\ g_2\left(\varepsilon^*, w^*\right) & t \le 0 \end{cases}$$

g_2 est une fonction linéaire des valeurs initiales inobservables :

$$a^* = \left(a_{1-q},...,a_{-1},a_0\right)^T$$

$$w^* = \left(w_{1-p},...,w_{-1},w_0\right)^T$$

Valeurs nécessaires à l'évaluation de ε dans l'équation de p

Les fonctions g_1 et g_2 dépendent de la forme du modèle ARIMA.

Étant donné les difficultés représentées par le calcul de la fonction de vraisemblance, il est pratique courante de négliger la fonction g_1 qui apparaît dans cette fonction.

Cela revient alors à maximiser :

$$e^{\left[-\frac{1}{2\sigma^2}S(.)\right]}$$

où a minimiser S(.), ce qui équivaut alors à l'estimateur des MCO.

Si le processus est strictement un AR(p), l'estimation des paramètres est de beaucoup simplifiée, car on peut dans ce cas recourir aux MCO si les termes d'erreur satisfont aux exigences habituelles.

6. Newbold, P. (1974), « The Exact Likelihood Function for a Mixed Autoregressive Moving Average Process », *Biometrika*, vol. 61, p. 423-426.

On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} y_{p+1} &= \theta_1 y_p + \ldots + \theta_p y_1 + \varepsilon_{p+1} \\ y_{p+2} &= \theta_1 y_{p+1} + \ldots + \theta_p y_2 + \varepsilon_{p+2} \\ &\cdots \\ y_n &= \theta_1 y_{n-1} + \ldots + \theta_p y_{n-p} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

ou, en notation matricielle :

$$y_p = X_p \theta_p + \varepsilon$$

L'estimateur des MCO est donc le suivant :

$$\hat{\theta}_p = \left(X_p^T X_p \right)^{-1} X_p^T y_p$$

BIBLIOGRAPHIE

CAMPBELL, J.Y., A.W. LO et A.C. MACKINLAY (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton, Princeton University Press.

GOURIÉROUX, C. et J. JASIAK (2001), *Financial Econometrics : Problems, Models and Methods*, Princeton, Princeton University Press.

KAWAKATSU, H. (1998), *A Computer Handbook Using EViews*, New York, Irwin McGraw-Hill,

RACICOT, F.-É. et R. THÉORET (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Sainte-Foy, Presses de l'Université du Québec.

ANNEXE

2

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR CALCULER UNE FRONTIÈRE EFFICIENTE AVEC APPLICATION VISUAL BASIC

Minimiser la variance du rendement du portefeuille :

$$\mathrm{Var}\left(R_p\right) = \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

sous la contrainte d'un niveau donné de rendement E* :

$$\sum w_i E\left(R_i\right) = E^*$$

et sous la contrainte que la somme des pondérations soit égale à l'unité :

$$\sum w_i = 1$$

Fonction de Lagrange correspondante :

$$z = \sum_{i.j} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1\left[\sum w_i E\left(r_i\right) - E^*\right] + \lambda_2\left[\sum w_i - 1\right]$$

Solution : égaler les dérivées premières de cette fonction par rapport aux w_i et aux λ à 0.

- La solution donne les w_i optimaux associés à E*.
- Calculer avec ces w_i : σ^*
- On obtient un point de la frontière efficiente : (σ^*, E^*).
- On refait cet exercice pour d'autres niveaux de E* de façon à générer toute la frontière efficiente.

Formulation matricielle du problème :

$$z = w'\Omega w + \lambda_1\left[w'E - E^*\right] + \lambda_2\left[w'1 - 1\right]$$

Les dérivées pour trouver le vecteur w* optimal sont les suivantes :

$$\frac{\partial z}{\partial w} = 2\Omega w + \lambda_1 E + \lambda_2 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = w'E - E^* = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_2} = w'1 - 1 = 0$$

En termes matriciels **s'il n'existe que trois titres** dans le portefeuille :

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & E_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} & E_2 & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_{33} & E_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ E^* \end{bmatrix}$$

Notation matricielle compacte :

$$Cy = k$$

où y est le vecteur des inconnues.

Solution pour y :

$$y = C^{-1}k$$

On obtient w* qui correspond à E*.

Avec w*, on calcule le σ* correspondant.

On a un point de la frontière efficiente : (σ*, E*)

On refait l'exercice avec d'autres niveaux de E* de façon à générer toute la frontière efficiente.

Transposer cette procédure dans Excel et Visual Basic

Cas de deux titres.

Introduire l'input de la construction de la frontière efficiente dans un chiffrier Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Frontière efficiente de deux titres**										
2						Espérances(ESP1)		Pondérations(Poids1)		Corrélations	
3	Matrice variance-covariance(VCV1)									1	-1.00
4	0.0102	-0.021			Obg.	2.0%		100.0%		-1.00	1
5	-0.021	0.0433			Actions	9.0%		0.0%			
6											
7											
8	Espérance port.			Variance port.		Écart-type port					
9		0.02		0.0102		0.10099505					

Matrice variance-covariance de deux titres :

Dans le *range* : A4:B5

Nom du *range* : VCV1

Pour nommer un *range* :

- L'ombrager
- Aller dans le coin supérieur gauche du chiffrier où se trouvent les noms des cellules
- Inscrire VCV1 dans le petit rectangle réservé aux noms
- Faire *Entrée*

Range F4:F5 nommé ESP1 :

- Espérances des rendements des deux catégories de titres : obligations et actions.

Range H4:H5 nommé poids1 :

- Pondérations des deux titres dans le portefeuille

Cellule B9 :

- Calcul de l'espérance du portefeuille
- En langage matriciel : w′E
- Formule Excel correspondante :

= MMULT[1](Transpose(poids1),ESP1)

- On presse sur *Ctrl+Maj+Entrée* pour faire apparaître le résultat dans la cellule[2].
- On voit que le langage Excel est très près du langage matriciel.

Cellule D9 : variance du portefeuille :

- En langage matriciel : w′Ωw
- En langage Excel :

=MMULT((MMULT(TRANSPOSE(poids1),VCV1)),poids1)

Cellule F9 : Écart-type du portefeuille :

=SQRT(D9)

L'input étant en place, on passe au calcul de la frontière efficiente comme tel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
12	**Calcul de la frontière efficiente par le lagrangien**							
13								
14	Matrice bordée:C					Inconnues:y		Cible:k
15								
16	0.0204	-0.042	0.02	1		100.0%		0
17	-0.042	0.0866	0.09	1		0.0%		0
18	1	1	0	0		0.89142857		1
19	0.02	0.09	0	0		-0.03822857		0.02
20								

1. La fonction MMULT effectue un produit matriciel. Dans la version française d'Excel, elle s'appelle : PRODUITMAT.
2. C'est là la procédure à suivre pour les fonctions de type Array.

Range A16:D19

- Matrice C, désignée par matrice bordée
- Nom du *range* : VCVBORD1

Range F16 à F19

- Matrice y des inconnues
- Nom : Inco1
- Les deux premières inconnues : les deux pondérations recherchées
- Pour assurer la cohérence du chiffrier :
  - Mettre la formule =F16 dans la cellule H4 du premier poids
  - Mettre la formule =F17 dans la cellule H5 du second poids

Range H16:H19

- Vecteur k désigné par cible
- Nom du *range* : cible1

Il faut calculer :

$$y = C^{-1}k$$

pour un premier E*, ici 2 %.

Écrire une fonction Visual Basic pour effectuer cette opération.

Pour accéder à Visual Basic : *Alt+F11*

Puis : *Insert*, *module* du menu principal

Et on écrit la fonction :

```
Function front(VCVBORD1, cible1)
mat1 = Application.WorksheetFunction.MInverse(VCVBORD1)
inco = Application.WorksheetFunction.MMult(mat1, cible1)
front = inco1
End Function
```

Fonction nommée *Front* :

Arguments : VCVBORD1 et CIBLE1 du chiffrier

mat1 : inversion de VCVBORD1

inco : multiplication matricielle de mat1 et cible1

front=inco1 signifie que la fonction retourne le vecteur d'inconnues

Et l'on retourne au chiffrier : *Front* est maintenant ajouté à la liste des fonctions.

On ombrage le range Inco1 des inconnues et on écrit la formule :

=Front(VCVBORD1, cible1)

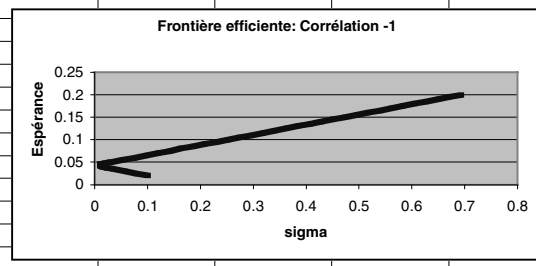
Et les pondérations optimales sont trouvées pour un rendement espéré du portefeuille de 2 %.

100 % d'obligations
0 % d'actions

Pour construire la frontière efficiente :

commandes : *Data* puis *Table*

	B	C	D	E	F	G	H
23	Frontière efficiente						
24		0.10099505					
25	0.02	0.10099505					
26	0.025	0.078931					
27	0.03	0.05687437					
28	0.035	0.03483928					
29	0.04	0.01293626					
30	0.045	0.00976771					
31	0.05	0.03159049					
32	0.055	0.05361903					
33	0.06	0.07567384					
34	0.065	0.09773715					
35	0.07	0.11980426					
36	0.075	0.1418734					
37	0.08	0.16394374					
38	0.085	0.18601487					
39	0.09	0.20808652					
40	0.095	0.23015855					
41	0.1	0.25223086					
42	0.105	0.27430338					
43	0.11	0.29637607					
44	0.115	0.31844889					
45	0.12	0.34052181					
46	0.125	0.36259482					
47	0.13	0.38466789					
48	0.135	0.40674103					
49	0.14	0.42881422					
50	0.145	0.45088745					
51	0.15	0.47296071					
52	0.155	0.49503401					
53	0.16	0.51710734					
54	0.165	0.53918069					
55	0.17	0.56125406					
56	0.175	0.58332745					
57	0.18	0.60540086					
58	0.185	0.62747429					
59	0.19	0.64954772					
60	0.195	0.67162117					
61	0.2	0.69369463					



On introduit des rendements de 2 % à 20 % dans les cellules : B25:B61 (2 % : minimum des rendements des titres, ici obg.).

Dans la cellule C24 : on met la formule =F9 (formule de l'écart-type)

On ombrage la zone B24 à C61

Dans le menu principal : Data, Table

Column input Cell de la boîte : H19 (soit le niveau du rendement espéré du portefeuille)

On touche *Entrée* et on a alors l'input pour la construction de la frontière efficiente : espérance du rendement et écart-type.

Pour construire la frontière, on clique sur l'icône des graphiques du menu principal et on demande un *scatter diagram*.

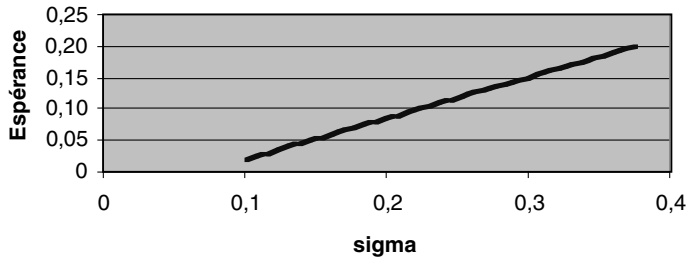
Ici corrélation de –1 :

On retrouve le cas théorique d'une frontière anguleuse qui touche l'ordonnée.

Autres cas théoriques :

Corrélation de +1 :

Frontière efficiente : Corrélation +1

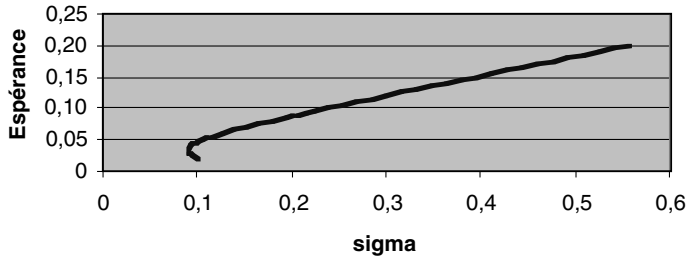


Pas de diversification possible

La frontière est une droite fermant le cône associé à la corrélation –1.

Corrélation 0

Frontière efficiente : Corrélation 0



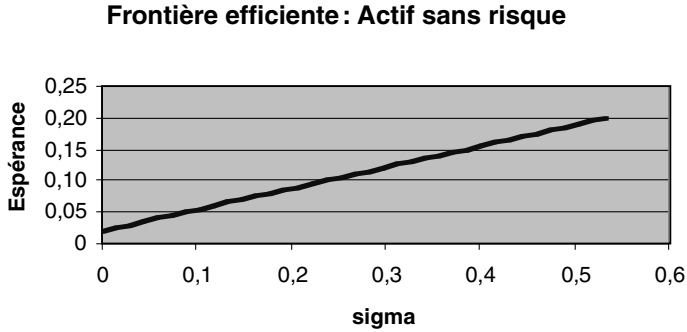
Cas du pooling (assurances)

La frontière prend sa forme habituelle.

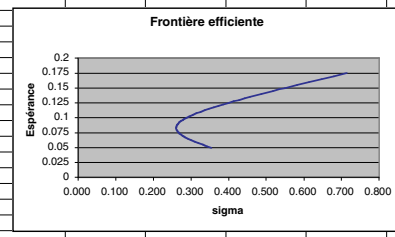
Il existe un actif sans risque : variance des obligations est nulle.

La frontière efficiente devient une droite (CAPM) dont l'ordonnée à l'origine est le taux sans risque, ici 2 % (voir haut de la page suivant).

Avec la même fonction Visual Basic, bâtir une frontière efficiente dans le cas de 4 titres (voir bas de la page suivante).



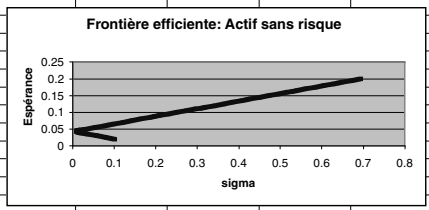
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Quatre titres**									
2	**Matrice variance-covariance(VCV)**					**Espérances(ESP)**		**Pondérations(Poids)**		
3										
4	0.4	0.03	0.02	0		6.0%		19.7%		
5	0.03	0.2	0	0.12		5.0%		76.3%		
6	0.02	0	0.3	0.03		7.0%		31.7%		
7	0	0.12	0.03	0.1		8.0%		-27.7%		
8								100.0%		
9	**Espérance port.**		**Variance port.**		**Ecart-type port.**					
10	5.0%		0.1253		0.3540					
11										
12	**Calcul de la frontière efficiente par le lagrangien**									
13	**Matrice bordée:C**							**Inconnues:y**		**Cible:k**
14	0.8	0.06	0.04	0	0.06	1		19.7%		0
15	0.06	0.4	0	0.24	0.05	1		76.3%		0
16	0.04	0	0.6	0.06	0.07	1		31.7%		0
17	0	0.24	0.06	0.2	0.08	1		-27.7%		0
18	1	1	1	1	0	0		3.46076711		1
19	0.06	0.05	0.07	0.08	0	0		-0.42364001		0.05
20										
21										
22		Frontière efficiente								
23			0.3540							
24		0.05	0.354							
25		0.055	0.331							
26		0.06	0.310							
27		0.065	0.292							
28		0.07	0.277							
29		0.075	0.267							
30		0.08	0.262							
31		0.085	0.261							
32		0.09	0.266							
33		0.095	0.275							
34		0.1	0.288							
35		0.105	0.305							
36		0.11	0.325							
37		0.115	0.348							
38		0.12	0.373							
39		0.125	0.400							
40		0.13	0.428							
41		0.135	0.457							
42		0.14	0.487							
43		0.145	0.518							
44		0.15	0.549							
45		0.155	0.582							
46		0.16	0.614							
47		0.165	0.647							
48		0.17	0.680							
49		0.175	0.714							
50		0.18	0.747							
51		0.185	0.781							
52		0.19	0.816							
53		0.195	0.850							
54		0.2	0.884							



Comment calculer le portefeuille à variance minimale dans un tel contexte ?

Revenir au cas de deux titres, avec corrélation de –1 entre les rendements des deux titres.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Frontière efficiente de deux titres**								
2						Espérances(ESP1)		Pondérations(Poids1)	
3	Matrice variance-covariance(VCV1)								
4	0.0102	-0.021			Obg.	2.0%		100.0%	
5	-0.021	0.0433			Actions	9.0%		0.0%	
6									
7									
8	Espérance port.			Variance port.		Écart-type port			
9		0.02		0.0102		0.10099505			
10									
11									
12	**Calcul de la frontière efficiente par le lagrangien**								
13									
14	Matrice bordée:C					Inconnues:y		Cible:k	
15									
16	0.0204	-0.042	0.02	1		100.0%		0	
17	-0.042	0.0866	0.09	1		0.0%		0	
18	1	1	0	0		0.89142857		1	
19	0.02	0.09	0	0		-0.03822857		0.02	
20									
21									
22									
23		Frontière efficiente							
24			0.10099505						
25		0.02	0.10099505						
26		0.025	0.078931						
27		0.03	0.05687437						
28		0.035	0.03483928						
29		0.04	0.01293626						
30		0.045	0.00976771						
31		0.05	0.03159049						
32		0.055	0.05361903						
33		0.06	0.07567384						
34		0.065	0.09773715						
35		0.07	0.11980426						



Dans la cellule I10, écrivons la formule =D9, soit la variance du portefeuille.

À partir de cette cellule, on appelle le Solveur par la commande du menu principal :

Tools, *Solver*

Et on remplit les cases appropriées de la boîte du Solveur :

i) *Set Target Cell* : $I$10, i.e. là ou on est.

ii) *Equal to* : Min

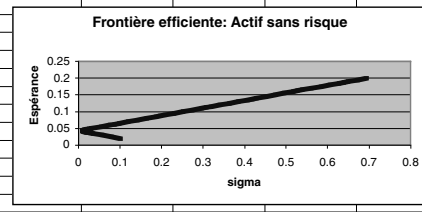
On lui demande de minimiser la variance.

iii) *By Changing Cells* : $H$19

On lui demande d'arriver au minimum en modifiant le rendement espéré du portefeuille.

On clique sur *OK* et on obtient le résultat suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Frontière efficiente de deux titres**								
2						Espérances(ESP1)		Pondérations(Poids1)	
3	Matrice variance-covariance(VCV1)								
4	0.0102	-0.021			Obg.	2.0%		67.3%	
5	-0.021	0.0433			Actions	9.0%		32.7%	
6									
7									
8	Espérance port.			Variance port.		Écart-type port			
9		0.04286911		6.911E-06		0.00262888			
10									6.911E-06
11									
12	**Calcul de la frontière efficiente par le lagrangien**								
13									
14	Matrice bordée:C					Inconnues:y		Cible:k	
15									
16	0.0204	-0.042	0.02	1		67.3%		0	
17	-0.042	0.0866	0.09	1		32.7%		0	
18	1	1	0	0		4.9295E-10		1	
19	0.02	0.09	0	0		-1.3822E-05		0.04286911	
20									
21									
22									
23		Frontière efficiente							
24			0.00262888						
25		0.02	0.10099505						
26		0.025	0.078931						
27		0.03	0.05687437						
28		0.035	0.03483928						
29		0.04	0.01293626						
30		0.045	0.00976771						
31		0.05	0.03159049						
32		0.055	0.05361903						
33		0.06	0.07567384						
34		0.065	0.09773715						
35		0.07	0.11980426						



À la cellule B9, on lit le rendement qui correspond à la variance minimale, soit 4,29 %

Comme il fallait s'y attendre, la variance est alors pratiquement nulle (cellule D9).

Écart-type correspondant : cellule F9 : .003.

Certes, on aurait obtenu le même résultat si on avait demandé de minimiser l'écart-type du rendement du portefeuille plutôt que sa variance.

ANNEXE

3

ÉVALUATION DE LA GESTION DE PORTEFEUILLE

BUT DE L'ANNEXE

Évaluer le gestionnaire en fonction de deux paramètres :

- rendement réalisé
- risque supporté (pénaliser le gestionnaire pour le risque)

LES DIVERSES NOTIONS DES RENDEMENTS DES TITRES

Notions de rendements réalisés

1) *Rendement total composé* d'un portefeuille p

$$R_p(1, T) = R_p(1) \times R_p(2) \times \ldots \times R_p(T) = \prod_{t=1}^{T} R_p(t)$$

rendements définis en termes relatifs : (1 + i)

2) *Rendement moyen géométrique* (g_p) :

$$(1 + g_p)^T = \prod_{t=1}^{T} R_p(t)$$

3) *Rendement moyen logarithmique* (z_p) :

$$e^{z_p \times T} = \prod_{t=1}^{T} R_p(t)$$

$$z_p = \left(\frac{1}{T}\right) \times \sum_{t=1}^{T} \ln\left[R_p(t)\right]$$

Taux de rendement composé de façon continue

4) *Rendement moyen arithmétique* (a_p) :

$$1 + a_p = \left(\frac{1}{T}\right) \times \sum_{t=1}^{T} R_p(t)$$

$$z_p < g_p < a_p$$

Rendements des fonds mutuels

Problème : l'équité d'un fonds change constamment.

Entrées et sorties de fonds continues qui faussent le rendement.

Deux méthodes d'ajustement :

i) *Rendement moyen réalisé annuellement par un Fonds* (*average annualized* ***H****olding* ***P****eriod* ***R****eturn : HPR*)

ii) *Taux de rendement interne du fonds* (*IRR*)

Rendement moyen réalisé annuellement par un fonds

Intègre les entrées et des sorties de fonds

Données suivantes pour un fonds :

Mois/jour	Cash-flow	Valeur
01/03	100	7660
02/01	100	8756
03/01	100	8778
03/23	(5000)	4103

Procédure de calcul du HPR :

i) Calcul du rendement réalisé périodiquement :

$$\left[\frac{V_t - V_{t-1} - CF_t}{V_{t-1}}\right] \times 100$$

V_t : valeur du fonds en t

CF_t : cash-flow en t

Date	N. de jours	Valeur	HPR	HPR ann.	HPR pondéré
02/01	29	8 756	13,00 %	163,62 %	65,45 %
03/01	29	8 778	–0,89 %	–11,20 %	–4,59 %
03/23	23	4 103	3,70 %	58,72 %	11,16 %
Total		21 637			72,02 %

HPR 02/01 :

$$\frac{8756 - 7660 - 100}{7660} \times 100 = 13{,}00\,\%$$

ii) Annualisation des rendements :

$$\text{HPR} \times \frac{365}{\text{N. de jours}}$$

$$13\,\% \times \frac{365}{29} = 163,62\,\%$$

iii) Pondération des rendements (*dollar-weighted annualized return*)
Coefficient de pondération d'une période :

$$\frac{V_t}{\sum V_t}$$

$$\frac{8756}{21637} \times 163{,}62\,\% = 0{,}40 \times 163{,}62\,\% = 65{,}45\,\%$$

HPR global annualisé par le fonds : somme des HPR pondérés : 72,02 %

Taux de rendement interne du fonds

Série plus longue du fonds précédent

Cash-flow	Jour	Valeur présente
(7560,08)	0	(7560,08)
(100)	2	(99,67)
(100)	31	(95,04)
(100)	60	(90,62)
5000	83	4363,16
(100)	94	(85,70)
(100)	123	(81,72)
(100)	153	(77,79)
(100)	185	(73,81)
(100)	214	(70,38)
5500,97	214	3871,55
		VAN = (0,10)

Valeur du fonds 1er janvier : cash-flow négatif :

- coût de l'investissement

Valeur du fonds le premier août (214) : cash-flow positif

- valeur de liquidation du fonds

Achat de titres par le fonds :

- cash-flows négatifs pour les investisseurs dans le Fonds
- au jour 2 : (100)

Taux de rendement interne

Taux i qui annule la VAN :

$$(7560,08) + \frac{(100)}{(1+i)^2} + \frac{(100)}{(1+i)^{31}} + \ldots + \frac{5500,97}{(1+i)^{214}} = 0$$

$$i = 0,1642\,\%$$

Sur une base annuelle :

$$0,1642\% \times 365 = 59,93\%$$

MESURES TRADITIONNELLES DE LA PERFORMANCE D'UN GESTIONNAIRE DE PORTEFEUILLE

Indice de Sharpe

Pente de la CML :

$$S_p = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_{R_p}}$$

Indice qui sert à évaluer des portefeuilles diversifiés

- σ_R : mesure adéquate du risque quand le portefeuille est diversifié

Indice de Treynor

$$T_p = \frac{E(R_p) - R_f}{\beta_p}$$

Sert à l'analyse de portefeuilles non diversifiés (inefficients).

Alpha de Jensen

Constante (α_p) de la régression suivante :

$$R_{pt} = \alpha_p + \beta_p R_{mt} + \varepsilon_{pt}$$

Risque systématique :

$$\beta_p R_{mt}$$

Risque résiduel :

$$\alpha_p + \varepsilon_{pt}$$

En vertu du CAPM :

$$\alpha_p = 0$$

D'où : $\alpha_p > 0 \Rightarrow$ rendement exceptionnel

Caractère significatif de α_p mesuré par la statistique t

$$t = \frac{\hat{\alpha}_p}{\hat{\sigma}\left(\hat{\alpha}_p\right)} \cong \frac{\hat{\alpha}_p}{\hat{\sigma}\left(\varepsilon_p\right)} \times \sqrt{T}$$

- T : nombre d'observations

Autre indicateur de la performance d'un gestionnaire :

$$\frac{\hat{\alpha}_p}{\hat{\sigma}\left(\varepsilon_p\right)}$$

- ratio d'évaluation ;
- mesure directe du caractère significatif du alpha de Jensen.

Quelques scénarios

Scénario 1

Un gestionnaire détient deux portefeuilles :

i) Portefeuille *géré* ou *actif*

ii) Portefeuille *non géré* ou *passif* : portefeuille du marché ou tout autre *benchmark*

Indice de Sharpe non pertinent pour évaluer le portefeuille géré (non diversifié)

Utiliser le *ratio d'information* pour évaluer le portefeuille géré.

On peut démontrer :

$$S_C^2 = S_M^2 + \left(\frac{\alpha_p}{\sigma\left(\varepsilon_p\right)}\right)^2$$

S : indice de Sharpe

M : *benchmark*

P : portefeuille actif

C = M + P

Indice d'évaluation : plus-value d'un portefeuille actif par rapport à un portefeuille géré.

Scénario 2

Un gestionnaire détient plusieurs portefeuilles actifs.

- regroupement : fonds d'investissement diversifié
  ⇒ pas de risque non systématique

Bon critère d'évaluation : indice de Treynor :

$$T_p = \frac{E(R_p) - R_f}{\beta_p}$$

Bêtas des portefeuilles

- bons indicateurs pour discriminer entre les risques des divers secteurs (portefeuilles)

LE SYNCHRONISME (*TIMING*) ET LA SÉLECTIVITÉ

Timing

Prévoir les grandes tendances du marché boursier

Ajuster le bêta du portefeuille en conséquence

On prévoit une hausse du marché boursier :

i) détenir moins de liquidités

ii) Augmenter le bêta : prendre plus de risque

On prévoit une baisse du marché boursier :

i) Détenir davantage de liquidités

ii) Diminuer le bêta : prendre moins de risques

Sélectivité

Achat des titres sous-évalués

Vente (à découvert) des titres surévalués

Sans changer le bêta du benchmark

En résumé

Timing

Modifier le ratio (liquidités / *benchmark*) sans changer la composition du *benchmark* :

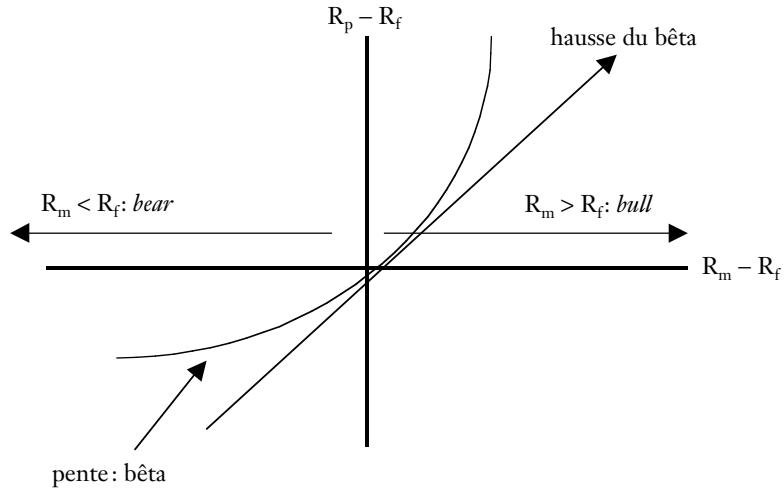
$$\rightarrow \Delta^{+}\beta_p$$

Sélectivité

Modifier la composition du *benchmark* sans changer son bêta.

Graphique d'un bon *timing*

Un bon *timing*



Pente de cette courbe : bêta du portefeuille

$$R_p - R_f = \alpha_p + \beta_p\left(R_m - R_f\right) + \varepsilon_p$$

Bon *timing* :

bêta marché *bull* > bêta marché *bear*

Deux méthodes pour estimer le *timing*

Méthode de Treynor et Mazuy[1]

Estimer l'équation suivante :

$$R_p - R_f = \alpha_p + b(R_m - R_f) + c(R_m - R_f)^2 + \varepsilon_p$$

Bon *timing* si $c > 0$

Plus $(R_m - R_f)$ augmente, plus le bêta augmente.

Méthode de Henriksson et Merton[2]

Estimer l'équation suivante :

$$R_p - R_f = \alpha_p + b(R_m - R_f) + c(R_m - R_f)D + \varepsilon_p$$

- D variable auxiliaire ou dichotomique (*dummy*)
- $D = 0$ si $R_m \leq R_f$ (marché *bear*)
- $D = 1$ si $R_m > R_f$ (marché *bull*)

Si $c > 0$, bon *timing* :

bêta (*bull*) > bêta (*bear*)
$b + c > b$ (puisque $c > 0$)

Stratégie du *market timing*

- Maximiser les gains en période de marché *bull*
- Minimiser les pertes en période de marché *bear*

Le modèle de Grinold et Khan

Un fonds **p** se compare au *benchmark* (ou portefeuille de référence) **b** :

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_b^2 + \omega^2$$

où :

$$\beta_p = \frac{\mathrm{Cov}(r_p, r_b)}{\sigma_b^2}$$

1. Treynor, J. et K. Mazuy (1966), « Can Mutual Funds Outguess the Market », *Harvard Business Review*, juillet-août, p. 131-136.
2. Henriksson, R.D. et R.C. Morton (1981), « On Market Timing and Investment Performance », *Journal of Business*, vol. 54, octobre.

Cas 1 : la composition de p est la même que b : gestion passive

$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2$$

Cas 2 : la composition de p diffère de celle de b, mais p a le même bêta que b : cas de la sélectivité

$$\beta_p = \beta_b = 1$$
$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2 + \omega^2$$

Portefeuille obtenu en modifiant les pondérations du portefeuille b sans modifier son bêta.

Rendement additionnel espéré suite à la sélectivité : l'alpha de Jensen : α_p

Cas 3 : en plus de la sélectivité, le gestionnaire effectue du *benchmark-timing*

Benchmark-timing : le gestionnaire modifie le bêta de son portefeuille en fonction de l'évolution générale du marché boursier.

$$\beta_p = \beta_b + \beta_{pa} = 1 + \beta_{pa}$$
$$\sigma_p^2 = \left(1 + \beta_{pa}\right)\sigma_b^2 + \omega_p^2 \cong \sigma_b^2 + \beta_{pa}^2\sigma_b^2 + \omega_p^2$$

Risque additionnel dû au *benchmark-timing* :

$$\beta_{pa}^2\sigma_b^2$$

Rendement additionnel espéré du *benchmark-timing* :

$$\beta_p\left(\mu_b^* - \mu_b\right)$$

$\mu_b = E\left(r_b\right) - r_f$: prime de risque du marché

μ_b^* : prévision de la prime de risque du marché

Benchmark-timing pur :

i) Ne pas modifier la composition du *benchmark* ;

ii) Modifier la proportion *cash-benchmark* selon la conjoncture du marché.

En résumé

Variance active : obtenue en réaménageant la composition du *benchmark*.

Vecteur des **pondérations actives** des titres du portefeuille :

$$h_{pa} = h_p - h_b$$

Variance active :

$$\psi_p^2 = h_{pa}^T V h_{pa} = \beta_{pa}^2 \sigma_b^2 + \omega_p^2$$

⇒ Variance globale du portefeuille = variance passive + variance active

$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2 + \psi_p^2$$

ψ_p^2: erreur de suivi ou *tracking-error*

Rendement additionnel espéré à la suite de ce risque additionnel :

$$\alpha_p + \beta_p\left(\mu_b^* - \mu_b\right)$$

NOUVELLE EXPRESSION DE LA SML DANS UN CONTEXTE DE GESTION ACTIVE

$$E\left(R_p\right) = R_f + \beta_p\left[E\left(R_b\right) - R_f\right] + \alpha_p + \beta_p\left(\mu_b^* - \mu_b\right)$$

Deux premiers termes : SML classique

Troisième terme : rendement espéré dû à la sélectivité

Quatrième terme : rendement espéré dû au *benchmark-timing*.

Les deux derniers termes sont dus à des inefficiences de marché.

Calcul du portefeuille optimal dans le modèle de Grinold et Khan

Critère de décision

Maximiser une fonction objective sous contrainte

- Fonction objective : valeur ajoutée par le gestionnaire
- Contrainte : capacités du gestionnaire ou son ratio d'information

Fonction objective

Hypothèse : le gestionnaire ne fait pas de *benchmark-timing*. Il ne s'adonne qu'à la sélectivité.

- Fonction objective : **valeur ajoutée par le gestionnaire**
- Définition de la valeur ajoutée :

Valeur ajoutée = {Rendement dû à la sélectivité (alpha de Jensen)} –
{(degré d'aversion pour le risque relié à la sélectivité)
× (risque associé à la sélectivité)}

$$VA = \alpha_P - \lambda_s \omega_p^2$$

Contrainte

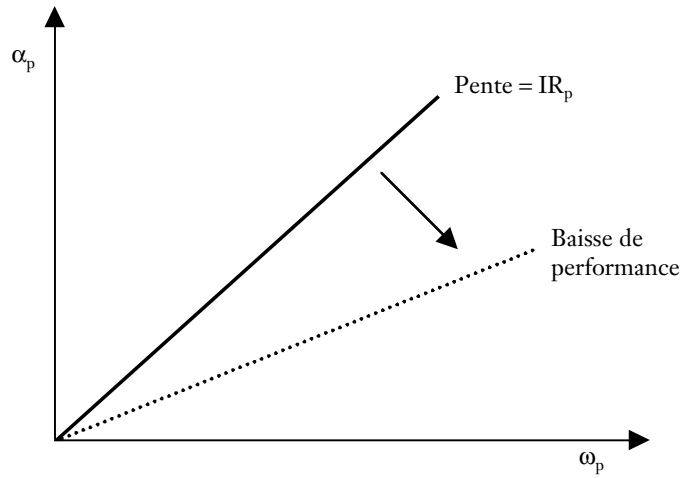
Capacités du gestionnaire : ratio d'information (IR_p) :

$$IR_p = \frac{\alpha_p}{\omega_p}$$

Représentation graphique du ratio d'information :

$$\alpha_p = IR_p \times \omega_p$$

Ratio d'information pour le fonds

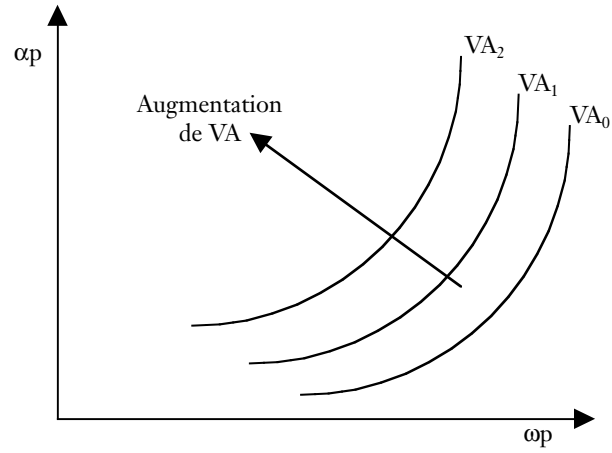


Maximisation de la fonction objective sous la contrainte

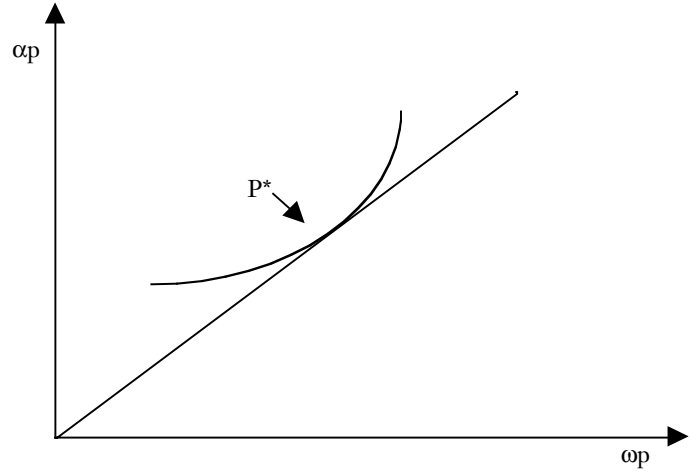
Construire des courbes d'indifférence à partir de la fonction objective :

$$VA = \alpha_P - \lambda_s \omega_p^2$$

Courbe d'indifférence : lieu des combinaisons (α_p, ω_p) qui donnent le même niveau de valeur ajoutée.



Portefeuille optimal : point de tangence entre la contrainte et la courbe d'indifférence.



P* : portefeuille optimal du fonds.

ANALYSE DE LA PERFORMANCE DES FONDS COMMUNS DE PLACEMENT

Les indices de performance de première génération

Le ratio (ou indice) de Sharpe (1966)

Il exprime le rendement excédentaire d'un fonds par unité de risque, le risque étant mesuré par l'écart-type du rendement du fonds :

$$SR_i = \frac{E(R_i) - R_f}{\sigma_i}$$

où SR_i = ratio de Sharpe pour le fonds i ; $E(R_i)$ = espérance de rendement du fonds ; R_f = taux sans risque ; σ_i = écart-type du rendement du fonds.

Avantage : il permet de classifier les fonds.

Désavantages : la mesure retenue du risque, soit l'écart-type du rendement, ne convient que pour l'analyse de fonds très diversifiés. Le ratio est aussi de lecture difficile pour un administrateur qui ne connaît pas la théorie des marchés des capitaux. En effet, le ratio de Sharpe est la pente de la droite qui relie le taux sans risque à l'espérance du rendement du fonds dans le système de coordonnées (σ_i, $E(R_i)$). C'est la pente de la CML (*capital market line*) si le fonds est efficient.

On préférerait une mesure plus évidente de la performance d'un gestionnaire de fonds, qui soit exprimée sur la base d'une différentielle de taux de rendement, c'est-à-dire en points de base. On aurait alors une mesure directe de la plus-value du gestionnaire. Cette mesure sera fournie pas Modigliani et Modigliani (1997).

À remarquer que le ratio de Sharpe peut être exprimé sur une base *ex ante* ou *ex post*. Selon cette dernière base, l'espérance du rendement est remplacée par une moyenne historique des rendements. Le taux sans risque pourrait également être remplacé par un indice de référence (*benchmark*) quelconque.

Il reste que le ratio de Sharpe est encore très utilisé.

Le ratio de Treynor (1965)

Ce ratio est défini comme celui de Sharpe sauf qu'il retient comme mesure du risque le risque systématique, soit le bêta du fonds.

$$TR_i = \frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i}$$

Il permet de classifier des fonds qui ne sont pas nécessairement diversifiés, cela contrairement à l'indice de Sharpe. La mesure de risque choisie, soit le bêta, est commune à tous les fonds puisqu'elle mesure le risque de marché. Elle exclut les risques spécifiques aux titres. Le ratio de Treynor est donc défini en fonction de la SML (*security market line*).

L'indice de Treynor présente cependant le même désavantage que l'indice de Sharpe, à savoir qu'il est une mesure relative de la performance, donc difficilement interprétable.

Le ratio de Jensen (alpha de Jensen, 1968)

L'alpha de Jensen mesure le rendement exceptionnel d'un fonds relié à sa sélectivité.

Il retient la même mesure de risque que Treynor, soit le bêta. L'alpha de Jensen est le rendement d'un fonds en sus du rendement théorique d'un indice de référence de même risque que le fonds, le rendement théorique étant celui donné par la SML (*security market line*) du CAPM.

$$\alpha_{Ji} = E(R_i) - E(R_{BJi})$$

où,

$$E(R_{BJi}) = R_f + \beta_i\left[E(R_m) - R_f\right]$$

Empiriquement, l'alpha de Jensen est la constante du modèle de marché :

$$R_{it} = \alpha_{Ji} + \beta_i R_{mt} + \varepsilon_t$$

L'alpha de Jensen est donc obtenu en régressant le rendement observé du fonds sur celui du portefeuille du marché. La constante de la régression est alors une mesure de l'alpha de Jensen. On peut juger du caractère significatif de l'alpha de Jensen en le divisant par l'écart-type du terme d'erreur de la régression. On a alors le ratio d'information (RI) :

$$RI = \frac{\hat{\alpha}_{Ji}}{\hat{\sigma}_\varepsilon}$$

À remarquer que la statistique t de l'alpha de Jensen, qui mesure directement son degré de signification, est approximativement égale à :

$$t \cong \frac{\hat{\alpha}_{Ji}}{\hat{\sigma}_\varepsilon}\sqrt{T}$$

où T est le nombre d'observations sur les variables de la régression.

L'alpha de Jensen est une mesure de la performance du gestionnaire au niveau de la sélection des titres, soit sa capacité d'identifier les titres sous-évalués et surévalués. C'est donc un indice de sélectivité.

Par rapport aux ratios de Sharpe et de Treynor, l'alpha de Jensen présente l'avantage d'être exprimé directement en termes de taux de rendement, c'est-à-dire en points de pourcentage. Il peut ainsi être interprété facilement par un non-spécialiste de la finance.

Mais l'alpha de Jensen ne peut permettre de classifier directement les fonds. En effet, un fonds peut accroître son alpha simplement en augmentant son levier financier, c'est-à-dire son bêta. On dit que de tels indices souffrent du *biais du levier*. On verra comment corriger ce biais par la suite tout en gardant l'avantage de l'alpha de Jensen au niveau de sa facilité d'interprétation.

On peut toutefois exprimer l'alpha de Jensen en termes de l'indice de Treynor, cela dans le cadre du modèle du CAPM. Après transformation, l'alpha de Jensen peut alors servir à classifier les fonds.

$$\begin{aligned}\alpha_{Ji} &= E\left(R_i\right) - E\left(R_{BJi}\right) \\ &= E(R_i) - R_f - \beta_i\left[E\left(R_m\right) - R_f\right] \\ &= \left[\frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i}\beta_i\right] - \left[\frac{E\left[R_m - R_f\right]}{\beta_m}\beta_i\right]\end{aligned}$$

puisque $\beta_m = 1$.

On a :

$$\alpha_{Ji} = \beta_i\left[TR_i - TR_m\right]$$

Le ratio $\frac{\alpha_{Ji}}{\beta_i}$ est donc corrigé du biais dû au levier et peut alors être utilisé comme mesure de classification d'un fonds. Il est en effet égal à $(TR_i - TR_m)$, TR_m étant commun à tous les fonds et TR_i étant un indice non biaisé de classification.

L'alpha du risque total (alpha de Fama, 1972)

Fama (1972) a mis au point une autre mesure de sélectivité en recourant, pour calculer son benchmark, non au bêta comme chez Jensen mais à l'écart-type du rendement du fonds. Il utilise donc la CML pour calculer son indice de référence et non la SML comme chez Jensen. Moyennant cette différence, l'alpha de Fama s'interprète comme l'alpha de Jensen.

$$\alpha_{Fi} = E(R_i) - E(R_{BFi})$$

où,

$$E\left(R_{BFI}\right) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m}\sigma_i$$

Le rendement de l'indice de référence est donc mesuré par la CML. L'expression : $\frac{E\left(R_m\right) - R_f}{\sigma_m}$ est le prix du risque, soit le rendement excédentaire du portefeuille du marché par unité de risque.

À l'instar de l'alpha de Jensen, l'alpha de Fama souffre du biais du levier. Il ne permet donc pas de classifier directement les fonds.

Comme pour l'alpha de Jensen, on peut toutefois corriger l'alpha de Fama du biais du levier en l'exprimant en termes du ratio de Sharpe. On a :

$$\begin{aligned}\alpha_{Fi} &= E(R_i) - E(R_{BFi}) \\ &= E\left(R_i\right) - R_f - \left[\frac{E\left(R_m\right) - R_f}{\sigma_m}\right]\sigma_i \\ &= \left[\frac{E\left(R_i\right) - R_f}{\sigma_i}\right]\sigma_i - \left[\frac{E\left(R_m\right) - R_f}{\sigma_m}\right]\sigma_i \\ &= \sigma_i\left(SR_i - SR_m\right)\end{aligned}$$

Le ratio $\frac{\alpha_{Fi}}{\sigma_i}$ est alors corrigé du biais dû au levier financier et peut être utilisé comme critère de classement des fonds.

Les indices de seconde génération

Les indicateurs de première génération présentent deux tares majeures. Certes, les indices de Sharpe et de Treynor permettent de classifier les fonds mais ils sont difficiles à interpréter, étant des mesures relatives de performance et non des mesures absolues. Comment arriver à maintenir l'avantage de ces ratios au plan de la classification des fonds tout en les exprimant, comme les alphas, en termes de la mesure du rendement (points de base), qui peut être comprise facilement par le non-spécialiste ? Deuxièmement, les indices de référence utilisés par les indices de première génération commandent des améliorations. En effet, ces indices de référence ne sont pas adaptés au style du gestionnaire. Or, il est impératif de comparer un gestionnaire à un indice de référence qui reflète bien sa politique de placement ou, si l'on veut, l'allocation des actifs qu'il effectue. Les indices de performance de seconde génération essaient donc de résoudre ces deux problèmes associés aux indices de première génération.

Le RAP (risk-adjusted performance) ou M²

Modigliani et Modigliani (1997) ont converti le ratio de Sharpe en mesure absolue, le rendant ainsi d'interprétation plus facile. Le RAP du fonds i s'exprime comme suit :

$$RAP_i = \left[\frac{\sigma_m}{\sigma_i}\left(E\left(R_i\right) - R_f\right)\right] + R_f$$

Le raisonnement sous-jacent au calcul du RAP est fort simple. Soit σ_i l'espérance du rendement du fonds mutuel, qui mesure le risque dudit fonds, et σ_m, l'espérance du rendement du portefeuille du marché, qui mesure le risque de marché. Comme l'objectif est ici de comparer le rendement ajusté du fonds au rendement du

portefeuille du marché, on ramène d'abord le risque du portefeuille au niveau du risque du marché en exerçant un effet de levier sur le portefeuille du fonds[3]. Cet ajustement est le suivant :

$$\sigma_{\text{ajusté}} = (1 + d_i)\sigma_i = \sigma_m$$

Il résulte que d_i est égal à :

$$d_i = \frac{\sigma_m}{\sigma_i} - 1$$

Il est à remarquer que d_i sera positif si $\sigma_m > \sigma_i$ et qu'il sera négatif dans le cas inverse. Le terme d_i sert alors à ajuster le rendement du fonds de façon à pouvoir le comparer au rendement du marché pour un même niveau de risque. Si $d_i > 0$, l'effet de levier est alors positif : il suffit d'augmenter la proportion investie dans le fonds de d_i et d'emprunter cette proportion au taux sans risque. Ce rendement ajusté est celui qui correspond au risque de marché. Dans le cas où d_i est négatif, cette opération revient à vendre une proportion d_i du fonds pour l'investir au taux sans risque.

Le rendement ajusté du Fonds mutuel, soit son RAP, est alors le suivant :

$$\text{rendement}_{\text{ajusté}} = (1 + d_i)E(R_i) - d_i r_f$$

En remplaçant d_i par sa valeur, on a :

$$RAP_i = \frac{\sigma_m}{\sigma_i} E(R_i) + \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_i}\right) R_f$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$RAP_i = \left[\frac{\sigma_m}{\sigma_i}\left(E(R_i) - R_f\right)\right] + R_f$$

ce qui est l'expression finale du RAP. Si $\sigma_m > \sigma_i$, c'est-à-dire que le portefeuille de marché est plus risqué que le fonds, alors le rendement excédentaire du fonds est relevé de manière à le ramener à un niveau de risque équivalant à celui du marché. Le rendement excédentaire est en effet considéré comme proportionnel au risque. On exerce alors un effet de levier positif sur le rendement excédentaire du fonds. Par ailleurs, si $\sigma_m < \sigma_i$, le rendement excédentaire du fonds doit être abaissé pour l'ajuster au risque inférieur du portefeuille du marché.

3. Comme l'indiquent Modigliani et Modigliani dans leur article (1997, p. 47) : *« Given any portfolio i, it is possible to construct a new version of that portfolio having any desired level of dispersion (risk). This can be accomplished by a financial operation called levering or unlevering the original portfolio. By unlevering a portfolio we mean selling a portion of that portfolio and using the proceeds to buy riskless securities. »*

Comme le rendement du fonds est maintenant réconcilié avec le risque de marché, l'indicateur de performance du Fonds mutuel est la différentielle de rendement : $\left(RAP_i - E\left(R_m\right)\right)$.

En termes du ratio de Sharpe, le RAP du fonds i s'écrit comme suit :

$$RAP_i = \left[\frac{E\left(R_i\right) - R_f}{\sigma_i}\sigma_m\right] + R_f = SR_i\sigma_m + R_f$$

On voit que le RAP effectue la même classification que l'indice de Sharpe sauf qu'il est exprimé en points de base plutôt que sous la forme d'un ratio. C'est donc une mesure de performance absolue, laquelle est plus facile à interpréter. Il s'agit là d'une simple conversion d'une mesure relative, le ratio de Sharpe, en une mesure absolue, le RAP.

Le MRAP

Plutôt que de choisir comme mesure du risque l'écart-type du rendement, il est préférable de choisir une mesure de risque qui soit commune à tous les fonds, soit le bêta. En effet, le bêta ne retient que le risque de marché, commun à tous les fonds, et exclut les risques spécifiques, soit le risque non systématique. Ce dernier disparaît en effet dans un portefeuille bien diversifié.

Scholz et Wilkens (2000) ont développé une mesure similaire au RAP, mais qui est définie en termes de l'indice de Treynor et non de Sharpe. Le MRAP du fonds i est défini comme suit :

$$MRAP_i = TR_i + R_f$$

Il est facile d'obtenir ce résultat. Comme chez Modigliani et Modigliani, on ramène ici le risque du fonds au risque du marché. Mais ce dernier est ici mesuré par le bêta du portefeuille du marché, bien sûr égal à 1, et non par l'écart-type de ce portefeuille. Le terme d_i, soit le facteur d'ajustement, devient donc ici :

$$d_i = \frac{1}{\beta_i} - 1$$

La procédure d'ajustement du rendement du fonds est identique à celle de Modigliani et Modigliani. Si $\beta_i < 1$, soit le cas où $d_i > 0$, il faudra alors effectuer un emprunt correspondant à une fraction d_i du portefeuille du fonds de façon à l'investir dans ce portefeuille. On exerce alors l'effet de levier requis pour faire correspondre le risque du fonds au risque du marché. Dans le cas inverse, on écoulera une fraction d_i du portefeuille du fonds de façon à effectuer un prêt. L'effet de levier est négatif dans ce cas. Le rendement ajusté du fonds, appelé $MRAP_i$, est alors de :

$$MRAP_i = \left(1 + d_i\right)E\left(R_i\right) - d_iR_f = E\left(R_i\right) + d_i\left[E\left(R_i\right) - R_f\right]$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$MRAP_i = \frac{E(R_i)}{\beta_i} - \left(\frac{1-\beta_i}{\beta_i}\right)R_f = \frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i} + R_f = TR_i + R_f$$

soit l'expression du MRAP en termes de l'indice de Treynor. Le MRAP classe donc les fonds de la même façon que l'indice de Treynor sauf qu'il est exprimé en points de base, ce qui en facilite la lecture.

La mesure MRAP retient donc l'avantage du RAP au niveau de l'interprétation tout en choisissant une mesure de risque commune à tous les fonds, soit le bêta. À l'instar de Modigliani et Modigliani, la mesure de performance du fonds est : $MRAP_i - E(R_m)$.

On a déjà établi que :

$$TR_i = \frac{\alpha_{Ji}}{\beta_i} + TR_m$$

En termes du ratio $\frac{\alpha}{\beta}$, le MRAP s'écrit donc :

$$MRAP = \frac{\alpha_{Ji}}{\beta_i} + TR_m + R_f$$

L'alpha de Sharpe (1992) et l'analyse du style du gestionnaire

On ne saurait choisir un indice de référence au hasard pour évaluer la performance d'un fonds. Un bon indice de référence doit respecter le mécanisme d'allocation des actifs dudit fonds. Il doit donc être adapté à son style.

Sharpe (1992) s'inspire de l'analyse factorielle pour définir l'indice de référence d'un fonds. Selon cette analyse, le rendement d'un fonds (R_i) est relié à certains facteurs de risque (F_i) et à un terme d'erreur (e_i) qui a les propriétés désirables habituelles :

$$R_i = \left[\beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + ... + \beta_{in}F_n\right] + e_i$$

Les bêtas des facteurs représentent la sensibilité du rendement du fonds aux facteurs, soit les taux d'exposition du fonds aux facteurs de risque.

Pour convertir cette équation en indice de référence (à remarquer que cette équation ne contient pas de terme constant), Sharpe identifie les facteurs comme les rendements d'indices boursiers officiels qui recouvrent l'étendue des placements du fonds. Ces indices doivent être exclusifs et exhaustifs. La corrélation entre ces indices doit être aussi faible que possible. S'ils sont corrélés entre eux, leur écart-type respectif doit différer sensiblement. Par exemple, l'équation comportera des indices ayant trait aux diverses catégories d'obligations et d'actions, en plus d'un indice représentant les avoirs liquides.

* Par exemple, Sharpe distingue un indice d'actions à revenus (*value stocks*) et un indice d'actions de croissance (*growth stocks*). Les actions à revenus sont associées à des compagnies qui ont un rapport (valeur aux livres/valeur marchande) important. Pour les actions de croissance, ce ratio est faible. Cette classification permet de

recouvrir plusieurs dimensions des actions. En effet, une action associée à un ratio (valeur aux livres/valeur marchande) important est habituellement reliée à une entreprise qui a un P/E (*price-earnings ratio*) faible, qui dispose d'une faible croissance de ses bénéfices, qui a un taux de versement du dividende élevé et qui a un rendement faible sur son avoir propre (équité).

Par suite de cette identification des facteurs, l'équation du rendement du Fonds i devient :

$$R_i = \left[\beta_{i1}I_1 + \beta_{i2}I_2 + ... + \beta_{in}I_n\right] + e_i$$

où I_j est le rendement de l'indice j.

Dans le cadre de l'analyse du style, e_i est appelé *erreur de suivi* (*tracking error*). Il est donc égal à :

$$e_i = R_i - \left[\beta_{i1}I_1 + \beta_{i2}I_2 + ... + \beta_{in}I_n\right]$$

Pour calculer les bêtas, on recourt à un critère d'optimisation. On peut utiliser le critère de régression des moindres carrés ordinaires, c'est-à-dire minimiser la somme des erreurs au carré. Les bêtas pourraient alors être interprétés comme les facteurs de pondération du fonds dans chacun des indices. Le fonds est alors vu comme un portefeuille d'indices. Mais comme la régression n'est pas contrainte, ces coefficients ne sommeront pas à 1. De plus, certains seront négatifs, ce qui veut dire que le fonds a vendu l'indice qui lui est associé à découvert, ce qui n'est pas autorisé pour bon nombre de fonds.

Réécrivons l'équation précédente comme suit :

$$e_i = R_i - \left[w_{i1}I_1 + w_{i2}I_2 + ... + w_{in}I_n\right]$$

Le terme entre crochets est l'indice de référence du fonds, w_{ij} étant le coefficient de pondération de ce portefeuille pour l'indice j. Comme on conçoit le terme entre crochets comme un portefeuille, on doit imposer les contraintes suivantes aux coefficients de pondération :

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1$$

$$w_{ij} \geq 0 ... \forall j$$

la deuxième contrainte excluant les ventes à découvert.

Le programme consiste donc à minimiser la variance de e_i, soit l'erreur de suivi, sous les deux contraintes ayant trait aux w_{ij}. La solution donne les w_{ij} optimaux. Ce problème, qui relève de la programmation dynamique et non de la régression, peut être solutionné sur Excel (voir Jackson et Stauton, chapitre 8).

La performance du gestionnaire peut alors être analysée de deux façons :

i) La mesure intra-échantillonnale (*in-the-sample*) de la performance

Cette mesure est appelée alpha de Sharpe (appellation due à la Prudential Investments (1998) et non à Sharpe).

C'est la moyenne des e_i au cours de la période ayant servi à estimer l'indice de référence. Disons que la période d'observation comporte N données. L'alpha de Sharpe est alors égal à[4] :

$$\hat{\alpha}_s = \frac{\sum_{t=1}^{N} \hat{e}_t}{N} = \frac{\sum_{t=1}^{N} \left(R_t - \sum_{j=1}^{n} \hat{w}_j I_{jt} \right)}{N}$$

ii) La mesure extra-échantillonnale (*out-of-the-sample*), soit la mesure de Sharpe proprement dite.

On dispose de N observations sur le rendement du fonds i. Les étapes du calcul de la performance du fonds sont les suivantes :

a) Le style du fonds est estimé en utilisant les observations (t – N) à (t – 1).

b) Le rendement du fonds est estimé pour l'instant t en utilisant les w_j estimés à l'étape a).

$$\hat{R}_t = \hat{w}_1 I_{1t} + \hat{w}_2 I_{2t} + ... + \hat{w}_n I_{nt}$$

c) La différence entre le rendement observé en t et le rendement estimé est calculée. Cet écart (S_t) est appelé *rendement de sélection* pour le mois t.

$$S_t = R_t - \hat{R}_t$$

Pour le mois (t + 1), on estime à nouveau le style de (t – N + 1) à t et on calcule le rendement de sélection comme il vient d'être dit.

* Pour calculer le rendement de sélection au cours d'une période, on calcule la somme cumulative (non composée) des rendements de sélection observés au cours de ladite période.

4. L'indice i du Fonds a été omis pour ne pas surcharger la notation.

BIBLIOGRAPHIE

COPELAND, T.E. et J.F. WESTON (1988), *Financial Theory and Corporate Policy*, 3e édition, New York, Addison-Wesley.

ELTON, E.J. et M.J. GRUBER (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5e édition, New York, Wiley.

FAMA, E. (1972), « Components of Investment Performance », *Journal of Finance*, vol. 27, no 3, p. 551-567.

GRESSIS, N., G.C. PHILIPATTOS et G. VLAHOS (1986), « Net Selectivity as a Component measure of Investment Performance », *Financial Review*, vol. 21, no 1, p. 103-110.

HAUGEN, R.A. (1997), *Modern Investment Theory*, 4e édition, New York, Prentice Hall.

JACKSON, M. et M. STAUNTON (2001), « Performance Measurement and Attribution », dans *Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA*, New York, Wiley.

JACKSON, M. et M. STAUTON (2001), *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*, John Wiley and Sons.

JENSEN, M.C. (1968), « Problems in Selection of Security Portfolios ; The Performance of the Mutual Funds in the Period 1945-1964 », *Journal of Finance*, vol. 23, no 2, p. 389-419.

LIANG, Y. et W. MCINTOSH (1998), Sharpe's Alpha : A New Performance Measure, Prudential Investments.

MODIGLIANI, F. et L. MODIGLIANI (1997), « Risk Adjusted Performance », *Journal of Portfolio Management*, p. 45-54.

SCHOLZ, H. et M. WILKENS (2000), « Market Risk-Adjusted Performance », working paper, University of Goettingen.

SHARPE, W. (1966), « Mutual Fund Performance », *Journal of Business*, vol. 39, no 1, p. 119-138.

SHARPE, W. (1992), « Asset Allocation : Management Style and Performance Measurement », *Journal of Portfolio Management*, p. 7-19.

SHARPE, W. (1994), « The Sharpe Ratio », *Journal of Portfolio Management*, p. 49-58.

STRONG, N. (1992), « Modelling Abnormal Returns : A Survey Article », *Journal of Business Finance and Accounting*, vol. 19, no 4, juin, p. 533-553.

TREYNOR, J.L. (1965), « How to Rate Management of Investment Funds », *Harvard Business Review*, p. 63-75.

ANNEXE

4

TECHNIQUES D'ASSURANCE DE PORTEFEUILLES

REPRODUCTION DES CASH-FLOWS D'UNE OPTION

OBJECTIF

Reproduire les cash-flows d'une option en effectuant des transactions cash-actions (*dynamic option replication* en anglais).

LE *HEDGING* DYNAMIQUE : INTUITION DU CONCEPT

But : reproduire une option par une combinaison actions – cash (actif sans risque).

POUR REPRODUIRE UN PUT

Position à découvert dans l'action

Puts et positions à découvert s'apprécient quand le prix de l'action diminue.

Exemple

Portefeuille : 1000 actions.

- Achat de 10 puts (1 put couvre 100 actions) pour protéger le portefeuille.
- 1000 actions + 10 puts : protective put

Delta du put = –0,435

Position du protective put en termes de delta :

$$\text{delta d'une action} = \frac{\Delta S}{\Delta S} = 1$$

$$(1000 \times 1) + (10 \times 100 \times -0{,}435) = 565$$

⇒ 1000 actions + 10 puts se comportent comme un portefeuille de 565 actions.

Autre façon de réaliser un delta de 565 : la vente à découvert

Portefeuille initial : 1000 actions

- Pour que ce portefeuille reproduise 1000 actions + 10 puts
  delta (1000 actions +VC) = delta protective put = 565

Vente à découvert de 435 actions

Position delta :

$$(1000 \times 1) + (435 \times -1) = 565$$

⇒ 1000 actions + 10 puts équivalent à 1000 actions + 435 vendues à découvert

Portefeuille actions + ventes à découvert : *portefeuille réplique (replicating portfolio)*

⇒ même protection qu'avec l'achat de puts

⇒ **deltas des deux catégories de portefeuille égaux**

Rajustements du portefeuille avec le passage du temps

Modification du delta à la suite du changement du prix de l'action :

⇒ rajustement du portefeuille

Ex. (1) : Après diminution du prix de l'action : delta du put : –0,509

Position delta du portefeuille que l'on veut reproduire : 1000 actions + 10 puts

$$(1000 \times 1) + (10 \times 100 \times 0{,}509) = 491$$

Le delta du portefeuille réplique doit être abaissé de 565 à 491.

$$(1000 \times 1) + (\text{VC} \times -1) = 491$$

$$\Rightarrow \text{VC} = 509$$

En regard des 435 actions vendues avant la baisse de prix

⇒ vendre à découvert 74 actions de plus pour continuer à reproduire le protective put.

Ex. (2) : Le prix de l'action augmente au lieu de diminuer.

Delta du put = –0,371

Position delta de 1000 actions + 10 puts :

$$(1000 \times 1) + (-0,371 \times 1000) = 629$$

Ventes à découvert du portefeuille réplique :

$$(1000 \times 1) + (\text{VC} \times -1) = 629$$

$\Rightarrow$ VC = 371 en regard des 435 initiales

Racheter 64 actions pour répliquer le protective put.

Principe général de l'assurance de portefeuille

delta du portefeuille avec options = delta du portefeuille réplique (actions + cash)

Un investisseur veut reproduire les cash-flows d'une option

Instruments à sa dispostion :

- cash
- actions

Portefeuille réplique défini sur la base d'une action

Valeur du portefeuille réplique (R) :

$$R = \alpha S + (1 - \alpha)\text{cash}$$

α : part de l'action dans le portefeuille

S : prix d'une action

Delta du portefeuille réplique :

$$\frac{dR}{dS} = \alpha \frac{dS}{dS} + (1 - \alpha)\frac{d\text{cash}}{dS} = \alpha$$

$$\Delta R = \alpha$$

Pour reproduire l'option

$$\alpha = \textbf{delta de l'option reproduite}$$

Reste du portefeuille réplique : investi en cash

Ex. (1) : Stratégie qui veut reproduire le protective put

Protective put : S + P (portefeuille *hedgé* ou assuré)

Delta de ce portefeuille : V

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial S}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial S} = 1 + \frac{\partial P}{\partial S}$$

$$\Delta V = 1 + \Delta P$$

Selon la parité put-call :

$$\Delta P = \Delta C - 1$$
$$\Delta V = 1 + (\Delta C - 1) = \Delta C$$

Pour que R reproduise V :

$$\text{delta de R} = \text{delta de V}$$
$$\alpha = \Delta C$$

$\Rightarrow$ proportion du portefeuille investie dans l'action = delta du call

Ex. :

$$S = 120\,\$$$
$$X = 100\,\$$$
$$r = 5\,\%$$
$$T = 1 \text{ an}$$
$$\text{sigma} = 22\,\% \text{ (par an)}$$
$$\alpha = \Delta C = N(d_1)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{120}{100}\right) + 0,05}{0,22} + \frac{1}{2} \times 0,22 = 1,1660$$

Selon la table de la normale :

$$N(1,16) = 0,8770$$
$$N(1,17) = 0,8790$$
$$N(1,1660) = 0,8770 + 0,6(0,8790 - 0,8770)$$

$\Rightarrow$ Si S = 120, a = 88 %

Pour reproduire le protective put, 88 % du portefeuille en actions et le reste en cash alpha pour d'autres prix d'actions

Prix de l'action	α
120	88 %
110	78 %
100	63 %
90	44 %
80	25 %

Si S très élevé par rapport à X (ex : 120)

- put *out-of-the money*
- delta du put pratiquement nul
- R qui reproduit le protective put est en majeure partie composé d'actions

Plus le prix de l'action diminue

- plus le put devient *in-the-money*
- plus le delta du put augmente
- plus la proportion de cash augmente dans le portefeuille
  ⇒ plus a diminue

Autre cas de réplique : le covered call

Valeur d'un covered call :

$$V = S - C$$

Delta du covered call :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial S}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial S} = 1 - \frac{\partial C}{\partial S}$$

$$\Delta V = 1 - \Delta C$$

Valeur du portefeuille qui reproduit le covered call :

$$R = \alpha S + (1 - \alpha)\text{cash}$$

$$\textbf{delta de R} = \alpha$$

Pour que R reproduise le covered call :

$$\alpha = 1 - \Delta C$$

Avec les données précédentes :

Prix de l'action	**α**
120	12 %
110	22 %
100	37 %
90	56 %
80	75 %

Plus le prix de l'action diminue :

⇒ plus le call devient *out-of-the-money*

⇒ plus la proportion d'actions dans le portefeuille augmente

cela pour reproduire le covered call.

On recourra aux fonctions Visual Basic suivantes pour calculer le delta du call (*NormSDist(dOne)*) et le prix du call correspondant (CallOption) :

```
Function dOne(S, X, T, rf, sigma)
dOne = (Log(S / X) + rf * T) / (sigma * Sqr(T)) + 0.5 * sigma * Sqr(T)
End Function
Function CallOption(S, X, T, rf, sigma)
CallOption = S * Application.NormSDist(dOne(S, X, T, rf, sigma)) - _
X * Exp(-T * rf) * Application.NormSDist(dOne(S, X, T, rf, sigma) -
sigma * Sqr(T))
End Function
```

où S désigne le prix de l'action ; X, le prix d'exercice ; T, la durée de l'option ; rf, le taux sans risque et sigma, la volatilité du rendement de l'action.

BIBLIOGRAPHIE

BENNINGA, S. (2000), *Financial Modeling*, 2e édition, Cambridge, The MIT Press.

CLARKE, R.G. (1992), *Options and Futures : A Tutorial*, CFA, Virginie, The Research Foundation of the Institute of Chartered Financial Analysts.

KHOURY, N. et P. LAROCHE (1990), *L'assurance de portefeuille : options ou rebalancement dynamique*, novembre, p. 45-54.

TIAN, Y. (1996), « A Reexamination of Postfolio Insurance : The Use of Index Put Options », *The Journal of Futures Markets*, vol. 16, no 2, p. 163-188.

ANNEXE

5

PROGRAMME VISUAL BASIC D'UNE MATRICE DE CORRÉLATION ET DE VARIANCE-COVARIANCE DES RENDEMENTS DES TITRES D'UN PORTEFEUILLE

```
Function Correlmatrix(rendements)
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, nc As Integer, nr As
Integer
Dim vec1() As Variant, vec2() As Variant, corrmat() As Variant

nc = rendements.Columns.Count
ReDim corrmat(1 To nc, 1 To nc)

nr = rendements.Rows.Count

ReDim vec1(1 To nr)
ReDim vec2(1 To nr)

For i = 1 To nc

   For k = 1 To nr
   vec1(k) = rendements(k, i)
   Next k

   For j = 1 To nc

   For k = 1 To nr
   vec2(k) = rendements(k, j)
   Next k

   corrmat(i, j) = Application.Correl(vec1, vec2)
   Next j

Next i

Correlmatrix = corrmat

End Function
```

```
Function VarCovar(rendements)

Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, nc As Integer, nr As
Integer
Dim vec1() As Variant, vec2() As Variant, corrmat() As Variant

nc = rendements.Columns.Count
ReDim corrmat(1 To nc, 1 To nc)

nr = rendements.Rows.Count

ReDim vec1(1 To nr)
ReDim vec2(1 To nr)

For i = 1 To nc

   For k = 1 To nr
   vec1(k) = rendements(k, i)
   Next k

   For j = 1 To nc

   For k = 1 To nr
   vec2(k) = rendements(k, j)
   Next k

   corrmat(i, j) = Application.Covar(vec1, vec2)
   Next j

Next i

VarCovar = corrmat

End Function


Sub correlmatrix1()

Set rendements = Range("rendements")
Range("corrmat1").Value = Correlmatrix(rendements)

End Sub

Sub VarCovar1()
Set rendements = Range("rendements")

Range("varcovar2").Value = VarCovar(rendements)

End Sub
```

```
Sub Correlmatrix2()
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, nc As Integer, nr As
Integer
Dim vec1() As Variant, vec2() As Variant, corrmat() As Variant

Set rendements = Range("rendements")

nc = rendements.Columns.Count
ReDim corrmat(1 To nc, 1 To nc)

nr = rendements.Rows.Count

ReDim vec1(1 To nr)
ReDim vec2(1 To nr)

For i = 1 To nc

   For k = 1 To nr
   vec1(k) = rendements(k, i)
   Next k

   For j = 1 To nc

   For k = 1 To nr
   vec2(k) = rendements(k, j)
   Next k

   corrmat(i, j) = Application.Correl(vec1, vec2)
   Range("corrmat2").Offset(i, j) = corrmat(i, j)

   Next j

Next i

End Sub
```

ANNEXE

6

FRONTIÈRES EFFICIENTES INSPIRÉES DE BENNINGA (2000) ET DE JACKSON ET STAUNTON (2001)

FRONTIÈRE EFFICIENTE VENTES À DÉCOUVERT PERMISES

```
Sub EFF()
' Founit un portefeuille efficient pour un rendement donné
SolverReset
Call SolverAdd(Range("porter"), 2, Range("target1"))
Call SolverOk(Range("portec"), 2, 0, Range("change2"))
Call SolverSolve(True)
SolverFinish

End Sub
```

```
Sub EFF1()
Dim target11: Dim incr
Dim iter As Integer, niter As Integer

' On declare atop et aoutput comme Variant pour indiquer
' que ce ne sont pas des scalaires

Dim atop As Variant, aoutput As Variant

Range("k1:o15000").ClearContents

' La valeur de départ de target11 dans le chiffrier

target11 = Range("mintgt").Value

incr = Range("incr").Value
niter = Range("niter").Value
iter = 1
```

```
' La mise en forme du Solver
SolverReset

Call SolverAdd(Range("porter"), 2, Range("target11"))
Call SolverOk(Range("portec"), 2, 0, Range("change2"))

' les itérations commencent ici

Do While iter <= niter

' On indique où stocker target11 à chaque itération

Range("target11").Value = target11
Call SolverChange(Range("porter"), 2, Range("target11"))
Call SolverSolve(True)

SolverFinish

' On stocke les résultats dans des cellules à chaque iter

   Range("atop").Offset(iter - 1, 0) = target11

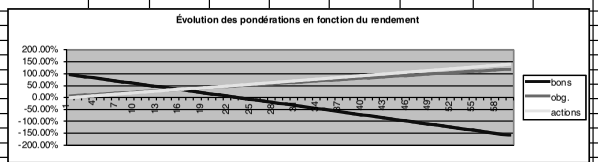
   ' Il faut indiquer où trouver portec dans le chiffrier

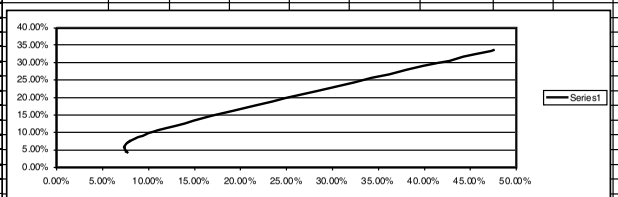
   Range("aoutput").Offset(iter - 1, 0) =
   Sqr(Range("portec").Value)
   Range("poids1").Offset(iter - 1, 0) = Range("wbt").Value
      Range("poids2").Offset(iter - 1, 0) = Range("wobg").Value
         Range("poids3").Offset(iter - 1, 0) = Range("wact").Value

target11 = target11 + incr
iter = iter + 1
Loop


End Sub
```

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		ER	Sigma			Niveau-cible	6.0%		target11	0.335	7.86%	4.00%	96.15%	6.16%	-2.31%	100.00%
2	Bons du Trésor	4.00%	8.00%								7.59%	4.50%	91.83%	8.07%	0.10%	100.00%
3	Obligations	10.00%	20.00%			Poids	-159%				7.41%	5.00%	87.51%	9.98%	2.51%	100.00%
4	Actions	20.00%	30.00%				118.7%				7.32%	5.50%	83.20%	11.89%	4.92%	100.00%
5							139.9%				7.33%	6.00%	78.88%	13.79%	7.33%	100.00%
6	Matrice VCV										7.43%	6.50%	74.56%	15.70%	9.74%	100.00%
7	0.0064	0.0007	0.0008				ERP	33.5%			7.63%	7.00%	70.24%	17.61%	12.15%	100.00%
8	0.0007	0.04	-0.005				Sigp	22.57%			7.91%	7.50%	65.93%	19.52%	14.56%	100.00%
9	0.0008	-0.005	0.09								8.27%	8.00%	61.61%	21.42%	16.97%	100.00%
10	Corrélations					mintgt	0.04				8.70%	8.50%	57.29%	23.33%	19.38%	100.00%
11	1.00	0.04	0.03			incr	0.005				9.19%	9.00%	52.98%	25.24%	21.79%	100.00%
12	0.04	1.00	-0.08			niter	60				9.72%	9.50%	48.66%	27.15%	24.20%	100.00%
13	0.03	-0.08	1.00								10.30%	10.00%	44.34%	29.05%	26.61%	100.00%
14											10.91%	10.50%	40.02%	30.96%	29.01%	100.00%
15											11.55%	11.00%	35.71%	32.87%	31.42%	100.00%
16											12.21%	11.50%	31.39%	34.78%	33.83%	100.00%
17											12.90%	12.00%	27.07%	36.68%	36.24%	100.00%
18											13.60%	12.50%	22.76%	38.59%	38.65%	100.00%
19											14.32%	13.00%	18.44%	40.50%	41.06%	100.00%
20											15.06%	13.50%	14.12%	42.41%	43.47%	100.00%
21											15.80%	14.00%	9.80%	44.31%	45.88%	100.00%
22											16.55%	14.50%	5.49%	46.22%	48.29%	100.00%
23											17.31%	15.00%	1.17%	48.13%	50.70%	100.00%
24											18.08%	15.50%	-3.15%	50.03%	53.11%	100.00%
25											18.86%	16.00%	-7.46%	51.94%	55.52%	100.00%
26											19.64%	16.50%	-11.78%	53.85%	57.93%	100.00%
27											20.43%	17.00%	-16.10%	55.76%	60.34%	100.00%
28											21.22%	17.50%	-20.42%	57.66%	62.75%	100.00%
29											22.01%	18.00%	-24.73%	59.57%	65.16%	100.00%
30											22.81%	18.50%	-29.05%	61.48%	67.57%	100.00%
31											23.61%	19.00%	-33.37%	63.39%	69.98%	100.00%
32											24.42%	19.50%	-37.68%	65.29%	72.39%	100.00%
33											25.22%	20.00%	-42.00%	67.20%	74.80%	100.00%
34											26.03%	20.50%	-46.32%	69.11%	77.21%	100.00%
35											26.84%	21.00%	-50.64%	71.02%	79.62%	100.00%
36											27.66%	21.50%	-54.95%	72.92%	82.03%	100.00%
37											28.47%	22.00%	-59.27%	74.83%	84.44%	100.00%
38											29.29%	22.50%	-63.59%	76.74%	86.85%	100.00%
39											30.11%	23.00%	-67.90%	78.65%	89.26%	100.00%
40											30.93%	23.50%	-72.22%	80.55%	91.67%	100.00%
41											31.75%	24.00%	-76.54%	82.46%	94.08%	100.00%
42											32.57%	24.50%	-80.86%	84.37%	96.49%	100.00%
43											33.40%	25.00%	-85.17%	86.28%	98.90%	100.00%
44											34.22%	25.50%	-89.49%	88.18%	101.31%	100.00%
45											35.05%	26.00%	-93.81%	90.09%	103.72%	100.00%
46											35.87%	26.50%	-98.12%	92.00%	106.13%	100.00%
47											36.70%	27.00%	-102.44%	93.91%	108.54%	100.00%
48											37.53%	27.50%	-106.76%	95.81%	110.95%	100.00%
49											38.36%	28.00%	-111.08%	97.72%	113.35%	100.00%
50											39.19%	28.50%	-115.39%	99.63%	115.76%	100.00%
51											40.02%	29.00%	-119.71%	101.54%	118.17%	100.00%
52											40.85%	29.50%	-124.03%	103.44%	120.58%	100.00%





FRONTIÈRE EFFICIENTE VENTES À DÉCOUVERT NON PERMISES

```
Sub EFF()
' Founit un portefeuille efficient pour un rendement donné
SolverReset
Call SolverAdd(Range("porter"), 2, Range("target1"))
Call SolverOk(Range("portec"), 2, 0, Range("change2"))
Call SolverSolve(True)
SolverFinish

End Sub
```

```
Sub EFF1()
Dim target11: Dim incr
Dim iter As Integer, niter As Integer

' On déclare atop et aoutput comme Variant pour indiquer
' que ce ne sont pas des scalaires

Dim atop As Variant, aoutput As Variant

Range("k1:o15000").ClearContents

' La valeur de départ de target11 dans le chiffrier

target11 = Range("mintgt").Value

incr = Range("incr").Value
niter = Range("niter").Value
iter = 1

' La mise en forme du Solver
SolverReset

' Ajout de la contrainte du rendement

Call SolverAdd(Range("porter"), 2, Range("target11"))
' Ajout des contraintes de non-ventes à découvert

Call SolverAdd(Range("wbt"), 3, 0)
Call SolverAdd(Range("wobg"), 3, 0)
Call SolverAdd(Range("wact"), 3, 0)


Call SolverOk(Range("portec"), 2, 0, Range("change2"))

' les itérations commencent ici

Do While iter <= niter

' On indique où stocker target11 à chaque itération

Range("target11").Value = target11
```

```
Call SolverChange(Range("porter"), 2, Range("target11"))
Call SolverSolve(True)

SolverFinish

' On stocke les résultats dans des cellules à chaque iter

   Range("atop").Offset(iter - 1, 0) = target11

   ' Il faut indiquer où trouver portec dans le chiffrier

   Range("aoutput").Offset(iter - 1, 0) =
   Sqr(Range("portec").Value)
   Range("poids1").Offset(iter - 1, 0) = Range("wbt").Value
      Range("poids2").Offset(iter - 1, 0) = Range("wobg").Value
         Range("poids3").Offset(iter - 1, 0) = Range("wact").Value


target11 = target11 + incr
iter = iter + 1
Loop


End Sub
```

FRONTIÈRE EFFICIENTE
VENTES À DÉCOUVERT PERMISES
DEUX ACTIFS : POUR VÉRIFIER LES RÉSULTATS THÉORIQUES

```
Sub EFF()
' Founit un portefeuille efficient pour un rendement donné
SolverReset
Call SolverAdd(Range("porter"), 2, Range("target1"))
Call SolverOk(Range("portec"), 2, 0, Range("change2"))
Call SolverSolve(True)
SolverFinish

End Sub
```

```
Sub EFF1()
Dim target11: Dim incr
Dim iter As Integer, niter As Integer

' On déclare atop et aoutput comme Variant pour indiquer
' que ce ne sont pas des scalaires

Dim atop As Variant, aoutput As Variant

Range("k1:o15000").ClearContents
' La valeur de départ de target11 dans le chiffrier

target11 = Range("mintgt").Value

incr = Range("incr").Value
niter = Range("niter").Value
iter = 1

' La mise en forme du Solver
SolverReset


Call SolverAdd(Range("porter"), 2, Range("target11"))


Call SolverOk(Range("portec"), 2, 0, Range("wobg"))

' les itérations commencent ici

Do While iter <= niter

' On indique où stocker target11 à chaque itération

Range("target11").Value = target11
Call SolverChange(Range("porter"), 2, Range("target11"))
Call SolverSolve(True)

SolverFinish
```

```
' On stocke les résultats dans des cellules à chaque iter

   Range("atop").Offset(iter - 1, 0) = target11

   ' Il faut indiquer où trouver portec dans le chiffrier

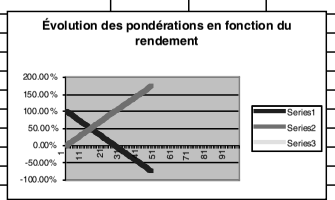
   Range("aoutput").Offset(iter - 1, 0) =
   Sqr(Range("portec").Value)
   Range("poids1").Offset(iter - 1, 0) = Range("wbt").Value
      Range("poids2").Offset(iter - 1, 0) = Range("wobg").Value

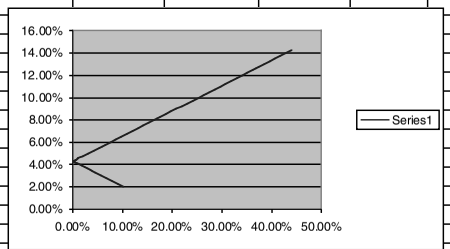

target11 = target11 + incr
iter = iter + 1
Loop


End Sub
```

Corrélation entre les rendements : −1

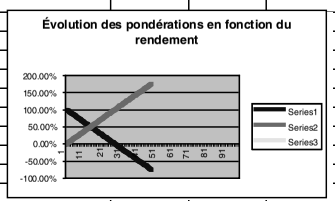
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		ER	Sigma			Niveau-cible	6.0%		target11	0.1425	10.10%	2.00%	100.00%	0.00%
2	Obligations	2.00%	10.10%								9.00%	2.25%	96.43%	3.57%
3	Actions	9.00%	20.80%			Poids	-75%				7.89%	2.50%	92.86%	7.14%
4							175.0%				6.79%	2.75%	89.29%	10.71%
5											5.69%	3.00%	85.71%	14.29%
6	Matrice VCV										4.59%	3.25%	82.14%	17.86%
7	0.0102	-0.021					ERP	14.3%			3.48%	3.50%	78.57%	21.43%
8	-0.021	0.0433					Variance	19.35%			2.38%	3.75%	75.00%	25.00%
9											1.29%	4.00%	71.43%	28.57%
10	Corrélations					mintgt	0.02				0.31%	4.25%	67.86%	32.14%
11	1.00	-1.00				incr	0.0025				0.98%	4.50%	64.29%	35.71%
12	-1.00	1.00				niter	50				2.06%	4.75%	60.71%	39.29%
13											3.16%	5.00%	57.14%	42.86%
14											4.26%	5.25%	53.57%	46.43%
15											5.36%	5.50%	50.00%	50.00%
16											6.46%	5.75%	46.43%	53.57%
17											7.57%	6.00%	42.86%	57.14%
18											8.67%	6.25%	39.29%	60.71%
19											9.77%	6.50%	35.71%	64.29%
20											10.88%	6.75%	32.14%	67.86%
21											11.98%	7.00%	28.57%	71.43%
22											13.08%	7.25%	25.00%	75.00%
23											14.19%	7.50%	21.43%	78.57%
24											15.29%	7.75%	17.86%	82.14%
25											16.39%	8.00%	14.29%	85.71%
26											17.50%	8.25%	10.71%	89.29%
27											18.60%	8.50%	7.14%	92.86%
28											19.71%	8.75%	3.57%	96.43%
29											20.81%	9.00%	0.00%	100.00%
30											21.91%	9.25%	-3.57%	103.57%
31											23.02%	9.50%	-7.14%	107.14%
32											24.12%	9.75%	-10.72%	110.72%
33											25.22%	10.00%	-14.29%	114.29%
34											26.33%	10.25%	-17.86%	117.86%

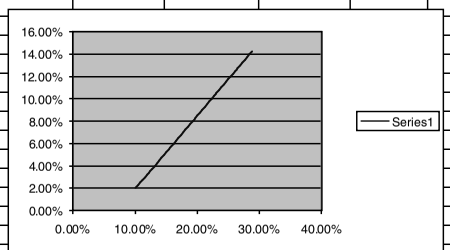




Corrélation entre les rendements : +1

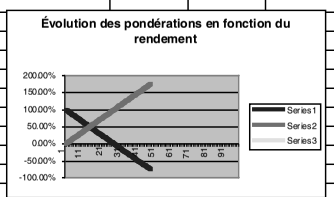
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		ER	Sigma			Niveau-cible	6.0%		target11	0.1425	10.10%	2.00%	100.00%	0.00%
2	Obligations	2.00%	10.10%								10.48%	2.25%	96.43%	3.57%
3	Actions	9.00%	20.80%			Poids	-75%				10.86%	2.50%	92.86%	7.14%
4							175.0%				11.25%	2.75%	89.29%	10.71%
5											11.63%	3.00%	85.71%	14.29%
6	Matrice VCV										12.01%	3.25%	82.14%	17.86%
7	0.0102	0.021					ERP	14.3%			12.39%	3.50%	78.57%	21.43%
8	0.021	0.0433					Variance	8.32%			12.77%	3.75%	75.00%	25.00%
9											13.16%	4.00%	71.43%	28.57%
10	Corrélations					mintgt	0.02				13.54%	4.25%	67.86%	32.14%
11	1.00	1.00				incr	0.0025				13.92%	4.50%	64.29%	35.71%
12	1.00	1.00				niter	50				14.30%	4.75%	60.71%	39.29%
13											14.69%	5.00%	57.14%	42.86%
14											15.07%	5.25%	53.57%	46.43%
15											15.45%	5.50%	50.00%	50.00%
16											15.83%	5.75%	46.43%	53.57%
17											16.22%	6.00%	42.86%	57.14%
18											16.60%	6.25%	39.29%	60.71%
19											16.98%	6.50%	35.71%	64.29%
20											17.36%	6.75%	32.14%	67.86%
21											17.75%	7.00%	28.57%	71.43%
22											18.13%	7.25%	25.00%	75.00%
23											18.51%	7.50%	21.43%	78.57%
24											18.90%	7.75%	17.86%	82.14%
25											19.28%	8.00%	14.29%	85.71%
26											19.66%	8.25%	10.71%	89.29%
27											20.04%	8.50%	7.14%	92.86%
28											20.43%	8.75%	3.57%	96.43%
29											20.81%	9.00%	0.00%	100.00%
30											21.19%	9.25%	-3.57%	103.57%
31											21.57%	9.50%	-7.14%	107.14%

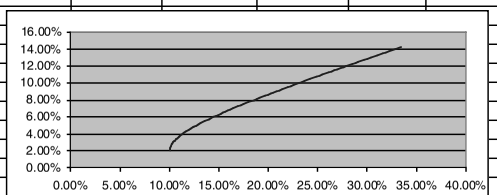




Corrélation entre les rendements : entre 0 et 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		ER	Sigma			Niveau-cible	6.0%		target11	0.1425	10.10%	2.00%	100.00%	0.00%
2	Obligations	2.00%	10.10%								10.11%	2.25%	96.43%	3.57%
3	Actions	9.00%	20.80%			Poids	-75%				10.17%	2.50%	92.86%	7.14%
4							175.0%				10.27%	2.75%	89.29%	10.71%
5											10.41%	3.00%	85.71%	14.29%
6	Matrice VCV										10.58%	3.25%	82.14%	17.86%
7	0.0102	0.01					ERP	14.3%			10.79%	3.50%	78.57%	21.43%
8	0.01	0.0433					Variance	11.21%			11.04%	3.75%	75.00%	25.00%
9											11.32%	4.00%	71.43%	28.57%
10	Corrélations					mintgt	0.02				11.63%	4.25%	67.86%	32.14%
11	1.00	0.48				incr	0.0025				11.97%	4.50%	64.29%	35.71%
12	0.48	1.00				niter	50				12.33%	4.75%	60.71%	39.29%
13											12.72%	5.00%	57.14%	42.86%
14											13.13%	5.25%	53.57%	46.43%
15											13.56%	5.50%	50.00%	50.00%
16											14.00%	5.75%	46.43%	53.57%
17											14.46%	6.00%	42.86%	57.14%
18											14.94%	6.25%	39.29%	60.71%
19											15.42%	6.50%	35.71%	64.29%
20											15.92%	6.75%	32.14%	67.86%
21											16.43%	7.00%	28.57%	71.43%
22											16.95%	7.25%	25.00%	75.00%
23											17.48%	7.50%	21.43%	78.57%
24											18.02%	7.75%	17.86%	82.14%
25											18.57%	8.00%	14.29%	85.71%
26											19.12%	8.25%	10.71%	89.29%
27											19.68%	8.50%	7.14%	92.86%
28											20.24%	8.75%	3.57%	96.43%
29											20.81%	9.00%	0.00%	100.00%
30											21.38%	9.25%	-3.57%	103.57%
31											21.96%	9.50%	-7.14%	107.14%





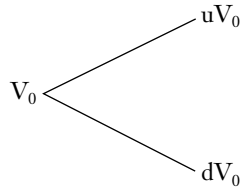
ANNEXE

7

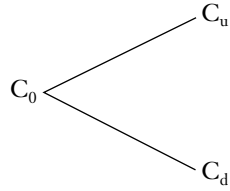
DISTINCTION ENTRE L'APPROCHE DU PORTEFEUILLE DUPLIQUANT ET L'APPROCHE RISQUE-NEUTRE À LA CONSTRUCTION DE L'ARBRE BINOMIAL

Du point de vue théorique, l'approche risque-neutre est différente de celle du portefeuille dupliquant même si Trigeorgis (1996) les regroupe. Copeland et Antikorov (2001) établissent par ailleurs une nette distinction entre ces deux approches.

Soit l'évolution suivante du sous-jacent au call (une période), ce sous-jacent étant ici un projet d'investissement :



Soit l'évolution suivante du call correspondant (une période), qui peut être une option de reporter le projet[1] :



1. Cette approche est celle des options réelles. Le chapitre 12 traite en détails les options réelles.

APPROCHE PAR LE PORTEFEUILLE DUPLIQUANT

On considère un portefeuille qui duplique les cash-flows du call. Il est formé de m unités du sous-jacent et d'un montant d'encaisse B rapportant un taux r_f (obligations à coupon zéro sans risque). Si B est négatif, il s'agit d'un emprunt.

$$C_0 = mV_0 + B \tag{1}$$

Au temps 1, le portefeuille vaut, dans les deux états de la nature:

$$C_u = muV_0 + \left(1 + r_f\right)B \tag{2}$$

$$C_d = mdV_0 + \left(1 + r_f\right)B \tag{3}$$

Il y a deux inconnues dans cette équation, m et B puisque:

$$C_u = \left(uV_0 - X\right)^+$$
$$C_d = \left(dV_0 - X\right)^+$$

Pour trouver m, on soustrait C_d de C_u:

$$mV_0\left(u - d\right) = C_u - C_d$$
$$m = \frac{C_u - C_d}{V_0\left(u - d\right)}$$

C'est là une forme générale. Comparez le numérateur et le dénominateur : C_u est associé à V_0u et C_d est associé à V_0d. m est aussi un ratio de *hedging* puisque:

$$m = \frac{C_u - C_d}{V_u - V_d} = \frac{\Delta C}{\Delta V}$$

Pour résoudre pour B, on recourt à l'équation 2 :

$$muV_0 + \left(1 + r_f\right)B = C_u$$
$$B = \frac{C_u - muV_0}{1 + r_f}$$

En substituant la valeur de m, on trouve:

$$B = \frac{C_u - \left[\frac{C_u - C_d}{V_0\left(u - d\right)}\right]uV_0}{1 + r_f}$$
$$= \frac{\frac{C_u\left(u - d\right) - \left(C_u - C_d\right)u}{u - d}}{1 + r_f}$$
$$= \frac{\frac{uC_d - dC_u}{u - d}}{1 + r_f}$$

C'est là un autre résultat général (comparez les éléments du ratio au numérateur).

L'approche du portefeuille dupliquant est basée sur les probabilités objectives. Il y a d'ailleurs une circularité dans ce modèle. Comme l'actualisation dans l'arbre du sous-jacent (ici un projet d'investissement) s'effectue au coût du capital et comme les probabilités objectives sont fixes d'un pas à l'autre, connaissant le coût du capital ainsi que u (d = 1 / u), on peut déduire les probabilités objectives p et (1 – p), où p = probabilité de hausse.

En effet, pour l'arbre du sous-jacent, on a:

$$V_0 = puV_0e^{-kt} + (1 - p)dV_0e^{-kt}$$

Par conséquent, connaissant p et u, on peut calculer k, le coût du capital.

Il est à remarquer que, dans cette approche, à l'inverse de l'approche neutre au risque, les taux d'actualisation changent à chaque nœud de l'arbre puisque le risque change à chaque nœud (d'où la fausseté de l'approche par l'arbre de décision qui garde un taux d'actualisation constant d'un nœud à l'autre: le WACC). On peut calculer ex post ces taux d'actualisation ajustés pour le risque comme suit pour chaque noeud:

$$C_0 = \frac{pC_u + (1 - p)C_d}{1 + RAR_0}$$

RAR_0 étant le taux d'actualisation pour le premier nœud.

L'APPROCHE RISQUE-NEUTRE

On considère un portefeuille parfaitement couvert formé d'une unité du sous-jacent et à découvert à hauteur de m unités dans le call. Ce portefeuille rapporte le taux sans risque. À la période 1, ce portefeuille vaut, puisqu'il rapporte le taux sans risque:

$$(V_0 - mC_0)(1 + r_f) = uV_0 - mC_u$$

Isolons m, le ratio de *hedging*:

$$\begin{aligned} V_0(1 + r_f) - mC_0(1 + r_f) &= uV_0 - mC_u \\ V_0(1 + r_f) - uV_0 &= mC_0(1 + r_f) - mC_u \\ m &= \frac{V_0(1 + r_f) - uV_0}{C_0(1 + r_f) - C_u} \end{aligned}$$

Comme le portefeuille est couvert, il rapporte le même flux monétaire dans les deux états de la nature à la période 1:

$$uV_0 - mC_u = dV_0 - mC_d$$

En substituant m par sa valeur, on a :

$$u - \left[\frac{(1+r_f)-u}{C_0(1+r_f)-C_u}\right]C_u = d - \left[\frac{(1+r_f)-u}{C_0(1+r_f)-C_u}\right]C_d$$

$$u - d = \left[\frac{(1+r_f)-u}{C_0(1+r_f)-C_u}\right]C_u - \left[\frac{(1+r_f)-u}{C_0(1+r_f)-C_u}\right]C_d$$

$$C_0(1+r_f) - C_u = \left[\frac{(1+r_f)-u}{u-d}\right]C_u + \left[\frac{u-(1+r_f)}{u-d}\right]C_d$$

$$C_0(1+r_f) = \left[\frac{(1+r_f)-u}{u-d} + 1\right]C_u + ""$$

$$C_0(1+r_f) = \left[\frac{(1+r_f)-d}{u-d}\right]C_u + ""$$

$$C_0 = \frac{\left[\frac{(1+r_f)-d}{u-d}\right]C_u + \left[\frac{u-(1+r_f)}{u-d}\right]C_d}{1+r_f}$$

$$C_0 = \frac{qC_u + (1-q)C_d}{1+r_f}$$

où q et (1 – q) sont les probabilités neutres au risque. Elles ne sont pas égales aux probabilités objectives p et (1 – p). Elles ne sont qu'un subterfuge mathématique pour ajuster les flux monétaires du call au risque de telle sorte qu'ils puissent être escomptés au taux sans risque (*risk-adjusted probabilities* or *hedging probabilities*).

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Traité d'économétrie financière
Modélisation financière
François-Éric Racicot et Raymond Théoret
2001, ISBN 2-7605-1123-5, 386 pages

Traité de gestion bancaire
Raymond Théoret
1999, ISBN 2-7605-1023-9, 268 pages

Traité de gestion de portefeuille, 4e édition
Titres à revenus fixes et produits dérivés
François-Éric Racicot et Raymond Théoret
2000, ISBN 2-7605-1271-1, 780 pages

Traité de finance corporative
Alain Coën, Guy Mercier et Raymond Théoret
2004, ISBN 2-7605-1235-5, 1020 pages

L'ingénierie financière, symbiose entre la finance mathématique et la théorie des produits dérivés, se développe à vive allure dans les institutions financières, tant au Canada que partout ailleurs dans le monde. Déterminer les prix des produits dérivés est devenu une tâche de plus en plus complexe, tout comme gérer les risques financiers.

François-Éric Racicot et Raymond Théoret présentent dans cette deuxième édition un exposé rigoureux sur la détermination des prix des options, tant sur les actions que sur les taux d'intérêt, et traitent plus particulièrement des options réelles de plus en plus utilisées pour évaluer les projets d'investissement. Un nouveau chapitre, très étoffé, sur la théorie de l'ingénierie financière a été ajouté, de même que deux autres sur l'analyse des données à haute fréquence et sur les erreurs liées aux variables financières. Ils rappellent également des notions de calcul différentiel et intégral et proposent une preuve détaillée de l'équation de Black et Scholes.

Aux programmes Visual Basic (Excel) de la première édition, conçus pour calculer les prix d'un très grand nombre d'options financières américaines et européennes, se sont ajoutés des programmes inédits pour calculer les prix de diverses options réelles et d'autres recourant aux logiciels EViews et Gauss.

L'adepte de la finance empirique et quantitative trouvera dans cet ouvrage un complément essentiel au *Traité d'économétrie financière* publié chez le même éditeur.

FRANÇOIS-ÉRIC RACICOT, Ph. D., est professeur d'économétrie financière à l'École des sciences de la gestion de l'Université du Québec à Montréal. Il est également consultant en modélisation financière auprès de grandes institutions financières québécoises. Ses champs d'intérêt portent sur les théories des titres à revenus fixes, de régie d'entreprises et des produits dérivés, incluant les options réelles. Il se consacre présentement à des projets de recherche en finance empirique.

RAYMOND THÉORET, Ph. D., est professeur titulaire de finance à l'École des sciences de la gestion de l'Université du Québec à Montréal. Il a été professeur à HEC Montréal, conseiller économique et financier dans de grandes institutions financières québécoises et secrétaire du Comité Campeau. Il a publié de nombreux articles et manuels en finance.

9 782760 512672

ISBN 2-7605-1267-3